

## IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS PREDOMINANTES DE UM MODELO DE BAIXA DIMENSÃO PARA A ANÁLISE DA VIBRAÇÃO FORÇADA DE CASCAS CILÍNDRICAS

*IDENTIFICATION OF MAIN MODES OF A LOW ORDER MODEL FOR A FORCED VIBRATIONS ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELLS*

**Leysyer Pacheco Pires Filho<sup>1</sup>, Frederico Martins Alves da Silva<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Civil na Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil

E-mail: leyserpierfilho@gmail.com

<sup>2</sup>Professor Doutor na Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil

E-mail: silvafma@gmail.com

### RESUMO

Este trabalho analisa a participação de cada modo não linear, presente na solução modal do campo de deslocamento transversal, na vibração não linear forçada e amortecida de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada e excitada axialmente. A geometria da casca cilíndrica analisada neste trabalho provoca um cenário de interação modal entre dois modos de vibração distintos, que apresentam a mesma frequência natural que, por sua vez, criam uma solução modal discretizada para os deslocamentos transversais com um número elevado de graus de liberdade para garantir convergência até vibrações da ordem de duas vezes a espessura da casca cilíndrica. Assim, o objetivo deste trabalho é identificar a partir da aplicação do método de Karhunen-Lòeve os modos mais importantes da solução modal que represente a vibração não linear forçada e amortecida da casca cilíndrica e que seja um modelo de baixa de dimensão (poucos graus de liberdade). Para isto, foi utilizado um programa computacional comercial de elementos finitos para construir a matriz de amostragem necessária para o método de Karhunen-Lòeve e obter os modos ortogonais próprios do problema e a participação de cada modo da solução modal na vibração não linear da casca cilíndrica. Os resultados encontrados indicam a redução no número de graus de liberdade do problema.

**Palavras-chaves:** Karhunen-Lòeve, interação modal, casca cilíndrica, modelo de baixa dimensão.

### ABSTRACT

This work analyzes the contribution of each nonlinear vibration mode, present in the modal solution of the transverse field displacement, on nonlinear forced vibration of a simply supported cylindrical shell axially excited. The geometry of the cylindrical shell analyzed causes a scenario with modal interaction between two distinct modes of vibration that have the same natural frequency, which in turn creates a modal discretized solution to transverse displacements with a high number of degrees of freedom to ensure convergence of the order vibrations twice the thickness of the cylindrical shell. Then, the aim of this work is to identify by the application of Karhunen-Loève method the most important modes of modal solution that represents the nonlinear forced vibration of cylindrical shell and it is a dimension of reduced order model (few degrees of freedom). It was used a commercial finite element computational code to build the sample matrix necessary for the Karhunen-Loève method, and obtaining its orthogonal modes of the problem and the modal participation of each nonlinear vibration mode on the nonlinear of the cylindrical shell. The results indicate a reduction in the number of degrees of freedom of the problem.

**Keywords:** Karhunen-Loève, modal interaction, cylindrical shell, reduced order model.

### 1 – INTRODUÇÃO

Existe uma grande quantidade de aplicações de cascas cilíndricas que podem ser notadas principalmente nas diversas áreas de engenharia. No campo da engenharia civil, essas aplicações podem ser encontradas em diversas construções usuais como, por exemplo, coberturas, reservatórios, silos de armazenagem etc. A forma geométrica simples de uma casca cilíndrica envolve uma série de equacionamento em termos de formulação, podendo apresentar um comportamento dinâmico complexo quando submetida a uma excitação externa. Grandes progressos podem ser notados no estudo de dinâmica não linear de cascas, devido aos avanços teóricos e numéricos.

As equações diferenciais que descrevem o comportamento físico real são não lineares e simplificações para torná-las lineares são bastante utilizadas, pois se pretende que a estrutura trabalhe em um regime linear. Para estruturas esbeltas como cascas cilíndricas, essa simplificação pode ser grosseira e os fenômenos não lineares associados à vibração das cascas se tornam difíceis de serem avaliados. Portanto, é necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos que sejam ao mesmo tempo precisos (adequado acoplamento modal) e de baixa dimensão (pequeno número de graus de liberdade). Assim, é necessário verificar a predominância dos modos não lineares envolvidos no comportamento dinâmico e reduzir a dimensão da solução modal, eliminando os modos menos

participativos nas expansões modais que descrevem os campos de deslocamentos da casca cilíndrica.

Recentemente, para minimizar o esforço computacional na análise de sistemas dinâmicos não lineares, grande atenção tem sido dada à derivação de modelos precisos de baixa dimensão. Particularmente, na mecânica dos sólidos e dos fluidos, essa preocupação tornou-se um campo de investigação muito atraente, permitindo uma compreensão mais profunda de sistemas complexos não lineares. As abordagens mais comuns são o uso de modos normais não lineares (SHAW; PIERRE, 1993; VAKAKIS, 1997), o método das formas normais (NAYFEH, 1993), a decomposição de Karhunen-Loève (SIROVICH, 1987a, 1987b, 1987c; STEINDL; TROGER, 2001) e técnicas de perturbação (GONÇALVES; BATISTA, 1988; GONÇALVES; DEL PRADO, 2004, 2005; GONÇALVES; SILVA; DEL PRADO, 2008).

O fenômeno de acoplamento modal é outro tópico extremamente importante no estudo da estabilidade de estruturas. A influência do acoplamento modal no comportamento dinâmico tem sido foco de poucos estudos, apesar de existirem vários trabalhos sobre acoplamento na presença de cargas estáticas. No estudo da instabilidade estática e dinâmica de sistemas estruturais sempre se procurou obter modelos de baixa dimensão capazes de representar de forma qualitativa o comportamento global do sistema. Na análise de cascas cilíndricas esta procura levou à criação de vários modelos aproximados, que por sua vez geraram uma série de respostas distintas, o que tem causado debates quanto à maneira de se modelar o problema (CHU, 1961; NOWINSKI, 1963; EVENSEN, 1963; OLSON, 1965). Uma revisão detalhada sobre esse tópico pode ser vista nos trabalhos de Amabili e Paidoussis (2003) e Alijani e Amabili (2014).

Diferente das vigas e placas, que apresentam frequências naturais bem espaçadas, as cascas cilíndricas podem apresentar frequências naturais muito próximas, ou até mesmo iguais, para dois modos de vibração diferentes. Quando se considera um carregamento estático compressivo, essa proximidade das frequências pode ser mais bem observada. Isto faz com que haja mesmo para nível baixo de carregamento dinâmico, uma superposição das regiões de instabilidade paramétrica. Quando o efeito de não linearidade geométrica é levado em consideração, pode então ocorrer o fenômeno de interação modal entre os modos não lineares, o que pode causar grandes mudanças nas fronteiras de instabilidade e nos diagramas de bifurcação (GONÇALVES; DEL PRADO, 2004, 2005; RODRIGUES *et al.*, 2013).

Rodrigues *et al.* (2013) investigaram os efeitos da interação modal entre dois modos distintos de vibração no comportamento não linear e na estabilidade de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas e sujeitas a um carregamento axial e a pressão lateral harmônicos. Os autores utilizam a teoria não linear de Donnell para descrever as deformações da casca e aplicam o método de Galerkin para discretizar as equações de movimento da casca cilíndrica. Por meio de técnicas de perturbação dos campos de deslocamento, Rodrigues *et al.* (2013) desenvolvem uma solução modal para representar os

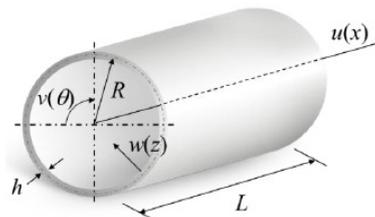
deslocamentos laterais da casca usando como solução inicial uma expansão que considera os modos clássicos de vibração (driven modes) e os modos que apresentam a mesma configuração de ondas dos modos clássicos de vibração (companion modes), porém são defasados circunferencialmente de cada um dos modos que dão origem à interação, levando a uma interação modal interna do tipo 1:1:1:1. Eles realizam uma análise paramétrica para verificar a influência da interação modal nas bifurcações, curvas de ressonância e fronteiras de instabilidade do sistema. Os resultados apresentados pelos autores indicam uma intensa mudança no comportamento dinâmico não linear da casca cilíndrica, principalmente, na presença de interação modal. Porém, o modelo discretizado apresentado possui 29 graus de liberdade e, segundo Rodrigues *et al.* (2013), apresenta um elevado tempo de processamento.

O objetivo deste trabalho foi reduzir a dimensão de uma expansão modal conhecida de 29 graus de liberdade, obtida por Rodrigues *et al.* (2013), que considera o acoplamento de termos não lineares na expansão modal para os deslocamentos transversais da casca cilíndrica e o fenômeno de interação modal, identificando quais modos não lineares são importantes na expansão modal dos deslocamentos transversais. A modelagem e a análise dinâmica da casca cilíndrica serão feitas via elementos finitos com o auxílio do programa computacional ANSYS (versão 6.5). Com os resultados obtidos, a importância de cada modo para os deslocamentos transversais da casca cilíndrica serão avaliados utilizando-se o método de Karhunen-Loève (SIROVICH, 1987a, 1987b, 1987c; GONÇALVES; SILVA; DEL PRADO, 2008).

## 2 – INTERAÇÃO MODAL NA CASCA CILÍNDRICA

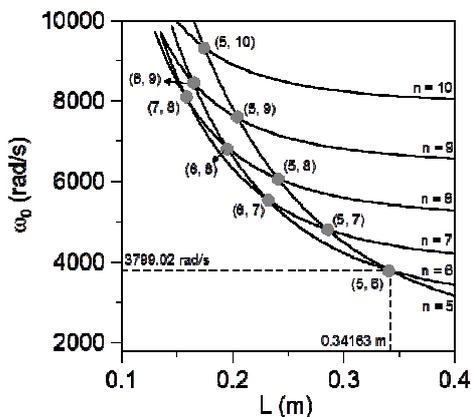
Casca cilíndrica é definida como uma estrutura tridimensional, em que a distância de qualquer ponto no interior da estrutura até uma superfície de referência, usualmente adotada como sendo a superfície média, é muito menor do que as dimensões que definem a superfície adotada. Isso propicia a ocorrência da interação modal, que é um fenômeno linear que ocorre quando dois, ou mais, modos de vibração distintos apresentam o mesmo valor, ou valores muito próximos, de frequência de vibração, podendo causar mudanças significativas nas fronteiras de instabilidade paramétrica. Na Figura 1 são apresentados os parâmetros geométricos da casca cilíndrica, como raio  $R$ , comprimento  $L$  e espessura  $h$ , assim como os campos de deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , nas direções longitudinal, circunferencial e transversal, respectivamente, que, por sua vez, estão associados às coordenadas  $x$ ,  $\theta$  e  $z$ .

Figura 1 – Parâmetros geométricos e campos de deslocamentos da casca cilíndrica



A interação modal pode ser obtida para determinadas geometrias e combinação de semiondas longitudinais e ondas circunferenciais de uma casca cilíndrica. Para isto, deve-se determinar qual a geometria da casca apresenta dois modos de vibração distintos com o mesmo valor de frequência natural. A determinação da frequência natural da casca cilíndrica é obtida a partir da solução das equações lineares de equilíbrio do problema, reduzindo-o a um problema de autovalor e autovetor. Na Figura 2 é apresentado o espectro de frequências naturais para uma casca cilíndrica de raio  $R = 0,2$  m e espessura  $h = 0,002$  m, feita de material linear-elástico com módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e densidade  $\rho = 7.850$  kg/m<sup>3</sup>. Na Figura 2 variou-se tanto o número de ondas circunferenciais quanto o comprimento da casca cilíndrica, mantendo constante o número de semiondas longitudinais igual a 1, uma vez que a menor frequência natural da casca cilíndrica está associada a este valor. Nota-se que a interseção de duas curvas representa um caso em que ocorre a interação modal. Os pontos cartesianos apresentados são do tipo  $(n, N)$ , denotando, portanto, dois modos de vibração distintos, com número de ondas circunferenciais  $(n, N)$  distintos, que apresentam a mesma frequência natural (PIRES FILHO; SILVA, 2012; RODRIGUES *et al.*, 2013).

Figura 2 – Geometrias que apresentam a interação modal



As análises que serão apresentadas neste trabalho consideram o ponto de interação modal entre os modos de vibração  $(m, n) = (1, 5)$  e  $(m, N) = (1, 6)$ , como mostrado na Figura 2, ou seja, com comprimento  $L = 0,34163$  m.

Expansão modal para o campo de deslocamentos transversais.

A partir da equação diferencial parcial de equilíbrio transversal da casca cilíndrica linearizada, é possível determinar os modos fundamentais de vibração, também denominados soluções lineares, pois além de atender as soluções da equação diferencial parcial de equilíbrio, atendem as condições de contorno do problema. Neste trabalho, considera-se que a casca cilíndrica está simplesmente apoiada ao longo das duas bordas

longitudinais. O modo fundamental no qual a coordenada  $\theta$ , que descreve os pontos na direção circunferencial, é discretizada pela função cosseno, é denominado *driven mode*, e quando é discretizada pela função seno, o modo é denominado *companion mode*, segundo a literatura. As Equações (1) e (2) representam as soluções lineares para os números de ondas circunferenciais da interação  $n = 5$  e  $N = 6$ , respectivamente.

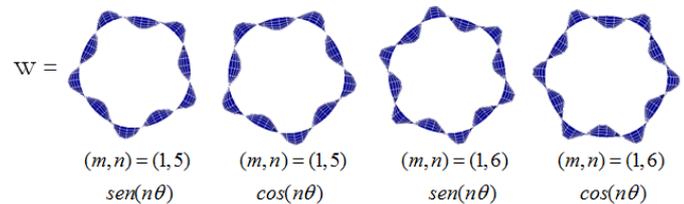
$$w = A_{11}(t) h \cos(n\theta) \sin \frac{m\pi x}{L} + B_{11}(t) h \sin(n\theta) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1)$$

$$w = A_{21}(t) h \cos(N\theta) \sin \frac{m\pi x}{L} + B_{21}(t) h \sin(N\theta) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (2)$$

Em que:  $A_{11}(t)$  e  $B_{11}(t)$  são, respectivamente, as amplitudes modais do *driven mode* e do *companion mode* do modo de vibração  $(m, n) = (1, 5)$ .  $A_{21}(t)$  e  $B_{21}(t)$  são, respectivamente, as amplitudes modais do *driven mode* e do *companion mode* do modo de vibração  $(m, N) = (1, 6)$ .

A expansão modal para o deslocamento transversal da casca cilíndrica é obtido a partir de técnicas de perturbação (GONÇALVES; BATISTA, 1988; GONÇALVES; SILVA; DEL PRADO, 2008). Para isto, a técnica de perturbação precisa de uma solução modal inicial que represente o fenômeno de interação modal. Assim, a partir da soma algébrica das soluções modais dadas pelas Equações (1) e (2), tem-se a solução modal inicial para ser aplicada ao método da perturbação, como ilustrado na Figura 3 (RODRIGUES *et al.*, 2013).

Figura 3 – Expansão modal inicial para o campo de deslocamento transversal da casca



A partir da solução modal básica, Figura 3, pode-se utilizar o método da perturbação para determinar os principais termos que devem compor o campo de deslocamento transversal da casca cilíndrica, ou seja, os termos não lineares que vão ser acoplados aos modos fundamentais (soma das Equações (1) e (2), como apresentado na Figura 3) formando uma expansão modal acoplada que representa o campo deslocamentos transversais da casca cilíndrica, dada pela Equação (3). Neste caso a solução básica inicial considera uma ressonância interna do tipo 1:1:1. Rodrigues *et al.* (2013) propõem um modelo de 29 graus de liberdade utilizando-se o método da perturbação, a partir da solução modal da Equação (3), determinando uma expansão com 29 graus de liberdade que têm uma boa aproximação para o campo de deslocamento transversal da casca cilíndrica.

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1,3,5}^{\bar{N}_1} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} [A1_{ij}(\tau)\cos(i\theta) + B1_{ij}(\tau)\sin(i\theta)] \\
 & + A2_{ij}(\tau)\cos(iN\theta) + B2_{ij}(\tau)\sin(iN\theta)] \sin(jm\pi\varepsilon) \\
 & + \sum_{i=1,3,5}^{\bar{N}_1-1} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \{A3_{ij}(\tau)\cos[(iN-(\bar{N}_1-i)n)\theta] + B3_{ij}(\tau)\sin[(iN-(\bar{N}_1-i)n)\theta] \\
 & + A4_{ij}(\tau)\cos[(iN+(\bar{N}_1-i)n)\theta] + B4_{ij}(\tau)\sin[(iN+(\bar{N}_1-i)n)\theta]\} \sin(jm\pi\varepsilon) \\
 & + \sum_{\alpha=0,2,4}^{\bar{N}_2} \sum_{\beta=0}^{\infty} [A5_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\cos(\alpha n\theta) + B5_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\sin(\alpha n\theta)] \\
 & \left\{ -\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)}\cos(6\beta m\pi\varepsilon) + \cos[(2+6\beta)m\pi\varepsilon] - \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)}\cos[(4+6\beta)m\pi\varepsilon] \right\} \\
 & + \sum_{\alpha=2,4,6}^{\bar{N}_2} \sum_{\beta=0}^{\infty} [A6_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\cos(\alpha N\theta) + B6_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\sin(\alpha N\theta)] \\
 & \left\{ -\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)}\cos(6\beta m\pi\varepsilon) + \cos[(2+6\beta)m\pi\varepsilon] - \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)}\cos[(4+6\beta)m\pi\varepsilon] \right\} \\
 & + \sum_{\alpha=1,2,3}^{\bar{N}_2-1} \sum_{\beta=0}^{\infty} [A7_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\cos[(\alpha N-(\bar{N}_2-\alpha)n)\theta] + B7_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\sin[(\alpha N-(\bar{N}_2-\alpha)n)\theta] \\
 & + A8_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\cos[(\alpha N+(\bar{N}_2-\alpha)n)\theta] + B8_{\alpha(2+6\beta)}(\tau)\sin[(\alpha N+(\bar{N}_2-\alpha)n)\theta]] \\
 & \left\{ -\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)}\cos(6\beta m\pi\varepsilon) + \cos[(2+6\beta)m\pi\varepsilon] - \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)}\cos[(4+6\beta)m\pi\varepsilon] \right\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Em que: o modelo com 29 graus de liberdade contém as seguintes amplitudes da Equação (3):  $A1_{11}(\tau) + B1_{11}(\tau) + A2_{11}(\tau) + B2_{11}(\tau) + A5_{02}(\tau) + A5_{22}(\tau) + B5_{22}(\tau) + A6_{22}(\tau) + B6_{22}(\tau) + A7_{12}(\tau) + B7_{12}(\tau) + A8_{12}(\tau) + B8_{12}(\tau) + A1_{13}(\tau) + B1_{13}(\tau) + A2_{13}(\tau) + B2_{13}(\tau) + A1_{31}(\tau) + B1_{31}(\tau) + A2_{31}(\tau) + B2_{31}(\tau) + A3_{11}(\tau) + B3_{11}(\tau) + A4_{11}(\tau) + B4_{11}(\tau) + A3_{21}(\tau) + B3_{21}(\tau) + A4_{21}(\tau) + B4_{21}(\tau)$ .

Destaca-se aqui o objetivo deste trabalho, que é a identificação da importância de cada modo da solução modal, dada pela Equação (3), nas vibrações não lineares da casca cilíndrica, para que seja possível a construção de um modelo com um menor número de graus de liberdade.

### 3 – MODELAGEM DO PROBLEMA NO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Para avaliar a participação dos modos da Equação (3), utilizam-se as respostas no tempo obtidas a partir do programa computacional ANSYS (versão 6.5). O elemento finito utilizado para atender as condições do problema, como grandes deslocamentos e esforços internos de membrana e de flexão, é o elemento de casca SHELL63. A casca cilíndrica de raio  $R = 0,2$  m, comprimento  $L = 0,34163$  m, espessura  $h = 0,002$  m foi modelada com 576 elementos retangulares com comprimentos iguais a 0,028 m e 0,026 m, nas direções longitudinal e circunferencial, respectivamente, resultando um total de 624 nós. Essa discretização foi obtida após a realização de diversos testes de malha, sendo essa a que apresentou melhores resultados com o menor esforço computacional. Quanto às condições de contorno, as restrições aos deslocamentos nulos na direção transversal foram aplicadas nas extremidades da casca cilíndrica. Já na direção longitudinal, as restrições foram aplicadas no meio ( $L/2$ ) da casca, simulando, desta forma, a condição de apoio simples. Quanto ao material utilizou-se um material linear elástico com módulo de

elasticidade  $E = 210$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Ressalta-se que o objetivo da modelagem via elementos finitos é simular dinamicamente o comportamento da casca cilíndrica que apresenta o fenômeno de interação modal e verificar se o modelo com 29 graus de liberdade proposto por Rodrigues *et al.* (2013) pode ser reduzido.

Na Tabela 1 são apresentadas as seis primeiras frequências naturais resultantes da análise modal obtidas no ANSYS. Observa-se que cada valor de frequência natural aparece em pares, devido à simetria axial da casca cilíndrica, e indicam exatamente a existência dos modos *driven* e *companion*, e a proximidade dos quatro primeiros valores de frequência natural o que explica o fenômeno de interação modal, no qual, a geometria empregada na modelagem e as condições de contorno favorecem o aparecimento de frequências naturais iguais para modos de vibração distintos. Na solução analítica os quatro valores são absolutamente os mesmos, uma vez que não existe possibilidade de erros e/ou aproximações numéricas.

Tabela 1 – Frequências naturais obtidas via elementos finitos

Modo de vibração (m, n)	Frequência (Hz)
1º.	570,78
2º.	570,78
3º.	571,12
4º.	571,12
5º.	666,55
6º.	666,55

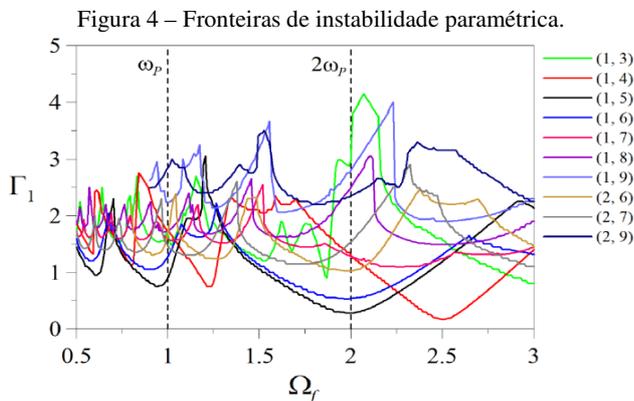
Nota-se, a partir da Tabela 1, uma pequena diferença do resultado analítico quando comparado com a solução numérica. O primeiro valor da Tabela 1 é 570,78 Hz (= 3.586,32 rad/s) enquanto que, a partir da Figura 2, observa-se que a solução analítica levou ao resultado 3.799,02 rad/s, o que representa uma diferença de 5,6%. A diferença pode ser justificada pelas considerações numéricas sobre a inércia do problema construído no programa ANSYS. Enquanto na solução analítica considera-se apenas a contribuição dos deslocamentos transversais,  $w$ , para o cálculo da inércia do problema (RODRIGUES *et al.*, 2013), no método dos elementos finitos considera-se a contribuição de todos os campos de deslocamentos,  $u$ ,  $v$  e  $w$  para o cálculo da inércia global da casca cilíndrica.

### 4 – DECOMPOSIÇÃO DE KARHUNEN-LÔEVE PARA A DETERMINAÇÃO DO MODELO DE BAIXA DIMENSÃO

É possível utilizar diversas ferramentas da dinâmica não linear para determinar as fronteiras de instabilidade paramétrica do sistema (Figura 4) para diferentes modos de vibração desacoplados da casca cilíndrica, ou seja, sem a consideração da interação modal. Todas as fronteiras foram obtidas numericamente por meio da aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem, incrementando-se a amplitude da excitação harmônica e mantendo-se a frequência de excitação constante (RODRIGUES, 2013). O eixo das abscissas contém os percentuais de frequência em relação à frequência natural. Os valores do eixo das ordenadas representam a razão entre a carga aplicada e a carga crítica axial estática.

A partir das fronteiras de instabilidade, é possível determinar o comportamento da resposta no tempo para uma análise dinâmica da estrutura. Assim, uma carga dinâmica que apresente o carregamento harmônico axial ( $\Omega_f, \Gamma_1$ ) abaixo de determinada fronteira, significa que a resposta no tempo para uma análise dinâmica será em torno de zero, ou seja, não haverá oscilações na casca. Já para o carregamento harmônico axial ( $\Omega_f, \Gamma_1$ ) acima da fronteira, a carga dinâmica promove uma resposta no tempo com oscilações.

Considerando-se que a solução numérica apresentou a menor frequência natural para os modos de vibração  $(m, n) = (1, 5)$  e  $(m, n) = (1, 6)$ , as análises no domínio do tempo, via elementos finitos, serão feitas em torno das fronteiras de instabilidade paramétrica desses modos, curvas em azul e em preto da Figura 4. Serão avaliados dois casos: o primeiro considera o ponto  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$  que está abaixo da fronteira de instabilidade, e, o segundo caso considera o ponto  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$  que está acima da fronteira.



Fonte: Rodrigues (2013)

A importância dos modos da Equação (3) na resposta no tempo da casca cilíndrica excitada axialmente será obtida a partir do método de Karhunen-Löve, também denominado decomposição ortogonal completa. O método é capaz de quantificar a participação de cada modo da expansão modal, Equação (3), e determinar a importância de cada um deles na energia total do sistema (SIROVICH 1987a, 1987b, 1987c). Isso permite a dedução de modelos de baixa dimensão e que ainda assim conduzem a respostas precisas até grandes amplitudes de vibração (GONÇALVES; SILVA; DEL PRADO, 2008).

Para cada incremento de tempo na aplicação da carga dinâmica, os deslocamentos dos 624 nós da casca são alterados e armazenados em um arquivo de saída. Uma matriz de amostragem, de dimensão  $k \times j$ , é construída de forma que  $k$  é o número de passos ao longo do tempo da análise no domínio do tempo, e,  $j$  é o número de nós da modelagem da casca cilíndrica. Foram utilizados 5.000 passos para todas as análises no domínio do tempo. Na Equação (4) é apresentada a matriz de amostragem para o método de Karhunen-Loève. Os principais passos da formulação matemática do método de Karhunen-Loève são apresentados a seguir e, para maiores detalhes, consultar Sirovich (1987a, 1987b, 1987c).

$$\bar{\mathbf{W}} = [\bar{w}_1 \ \bar{w}_2 \ \dots \ \bar{w}_{624}] = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(t_1) & \bar{w}_2(t_1) & \dots & \bar{w}_{624}(t_1) \\ \bar{w}_1(t_2) & \bar{w}_2(t_2) & \dots & \bar{w}_{624}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}_1(t_{5000}) & \bar{w}_2(t_{5000}) & \dots & \bar{w}_{624}(t_{5000}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Segundo o método de Karhunen-Loève, deve-se determinar o campo vetorial médio  $\bar{\mathbf{E}}$ , que consiste na matriz de amostragem em termos dos valores médios de cada coluna da matriz  $\bar{\mathbf{W}}$ ; o valor médio é repetido para os 5.000 passos em cada coluna. Posteriormente, a matriz de amostragem em relação à média,  $\bar{\mathbf{V}}$ , que mostra a variação do campo vetorial com relação ao valor médio, é resultante da subtração das duas matrizes anteriores.

Finalmente, como o método de Karhunen-Loève é um processo ergódico (SIROVICH, 1987a, 1987b, 1987c; GONÇALVES; SILVA; DEL PRADO, 2008), a matriz de correlação espacial,  $\mathbf{R}$ , pode ser escrita da seguinte:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{5000} \bar{\mathbf{V}}^t \bar{\mathbf{V}} \quad (5)$$

Em que: a dimensão de  $\mathbf{R}$  é de  $5.000 \cdot 624$ . Cada autovalor da matriz  $\mathbf{R}$  representa um POV, do inglês *proper orthogonal value*, que mede a importância de cada um dos autovetores POM, *proper orthogonal mode*, que está associado a resposta dinâmica do problema.

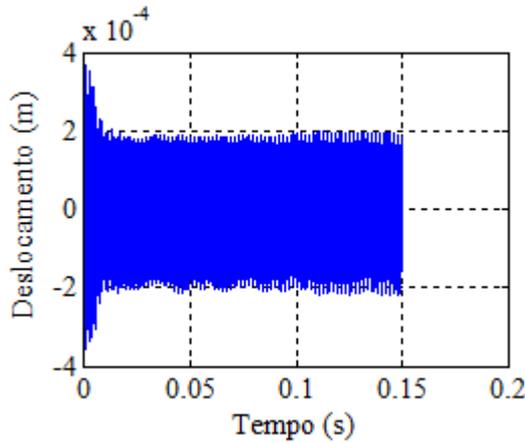
Utilizando os seguintes parâmetros de carregamento  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$  na Equação (6) é possível construir o carregamento dinâmico que foi aplicado no trabalho de Rodrigues *et al.* (2013). A carga crítica de flambagem para a casca cilíndrica, com a geometria e parâmetros físicos da interação modal, é  $P_{CR} = 2.679,54$  kN. O carregamento dinâmico é aplicado axialmente e em toda a extremidade da casca cilíndrica dado por.

$$P = \Gamma_1 P_{cr} \cos(\Omega_f \omega_0 t) \quad (6)$$

Em que:  $\omega_0$  é a frequência natural da casca cilíndrica e os parâmetros  $\Gamma_1$  e  $\Omega_f$  são parâmetros adimensionais de carga e de frequência de excitação.

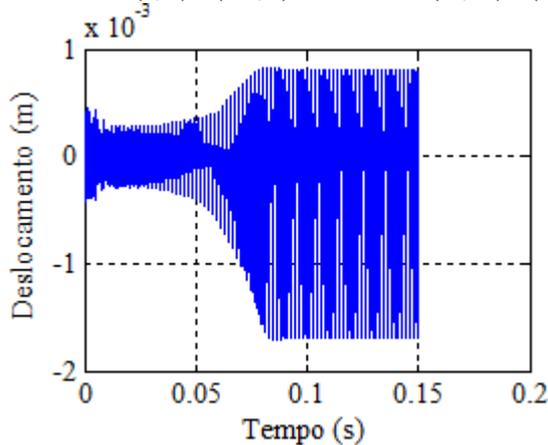
Na Figura 5 é mostrado o resultado da análise dinâmica, obtido via elementos finitos, para um ponto situado no meio da casca  $(x; \theta) = (L/2; 0)$ , considerando o carregamento harmônico  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$ . Observa-se que, inicialmente, os deslocamentos desse ponto estão no regime transiente de vibração. Logo depois, o regime de vibração passa para o estado permanente de vibração e as oscilações se tornam constantes em torno de zero, o que era esperado para um ponto abaixo da fronteira de instabilidade paramétrica. É importante destacar que a solução numérica não obtém um “zero absoluto”, mas pode-se afirmar que é, pois a ordem de grandeza das oscilações é dez vezes menor que a espessura da casca cilíndrica.

Figura 5 – Resposta no tempo para um ponto da casca cilíndrica posicionado em  $(x; \theta) = (L/2; 0)$  considerando  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$



A partir da análise no domínio do tempo obtida pela integração explícita no tempo do modelo construído em elementos finitos, é possível obter a matriz de amostragem, Equação (4), de cada um dos nós da malha de elementos finitos empregada neste trabalho que, por sua vez, conduz a matriz de correlação espacial dado pela Equação (5). Na Tabela 2 são apresentados os três primeiros POM obtidos a partir do resultado da aplicação do método de Karhunen-Loève, considerando todo o regime de vibração da análise dinâmica (transiente e permanente) da Figura 5. Os POM estão apresentados na Figura 7 e estão associados aos três maiores valores de POV. Somando-se a contribuição de energia dos três primeiros POV tem-se que os POM envolvidos na análise somam 99,48% da energia total do sistema. Nota-se que o carregamento  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$  tem um acréscimo de 10% do valor da carga crítica e a resposta no tempo, obtida via elementos finitos, para o ponto  $(x, \theta) = (L/2; 0)$  é apresentada na Figura 6. Existe, como na Figura 5, uma fase transitória inicial e, em seguida, a resposta no estado permanente não oscila em torno de zero. Este resultado é o esperado para um carregamento situado acima da curva de instabilidade paramétrica.

Figura 6 – Resposta no tempo para um ponto da casca cilíndrica posicionado em  $(x; \theta) = (L/2; 0)$  considerando  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$



Foi utilizada uma escala bicolor diferente para cada POM da Tabela 2 a fim de destacar os modos predominantes da Equação (3) em cada POM. Para isto, os

POM da Figura 7 foram expandidos em série dupla de Fourier, avaliando o peso de cada modo da Equação (3) para a construção de cada um dos POM. Observa-se, na Tabela 2, que há uma grande similaridade entre os modos predominantes do primeiro e segundo POM, principalmente dos modos  $A_{411}(\tau)$  e  $A_{321}(\tau)$ , que são oriundos da interação modal. Além disso, o modo fundamental  $A_{111}(\tau)$  aparece com grande destaque para os três sinais. Os termos em azul mais claro representam modos com menor participação em cada POM, podendo ser desprezados para a construção de um modelo de baixa dimensão.

Figura 7 – Representação dos três primeiros POM para a resposta no tempo:  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$

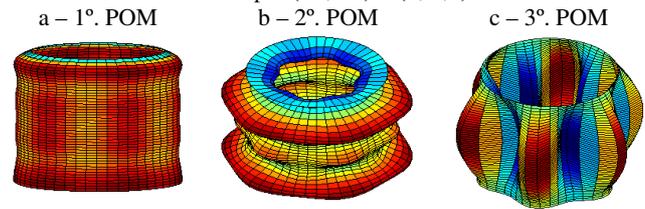


Tabela 2 – Participação dos modos da Equação (3) na resposta dinâmica da casca.  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$

POM	POV	A1 <sub>11</sub>	B1 <sub>11</sub>	A2 <sub>11</sub>	B2 <sub>11</sub>	A5 <sub>02</sub>	A5 <sub>22</sub>
1º	93,6%	41,5	5,5	6,9	21,2	13,3	25,2
2º	5,7%	36,7	4,8	3,8	25,1	0,2	19,9
3º	0,4%	7,4	1,0	1,9	7,4	7,8	20,3
POM	POV	B5 <sub>22</sub>	A6 <sub>22</sub>	B6 <sub>22</sub>	A7 <sub>12</sub>	B7 <sub>12</sub>	A8 <sub>12</sub>
1º	93,6%	3,1	13,7	20,9	8,4	21,5	5,3
2º	5,7%	1,6	14,6	16,8	8,1	22,2	3,9
3º	0,4%	4,7	18,6	13,7	5,9	19,5	2,2
POM	POV	B8 <sub>12</sub>	A1 <sub>13</sub>	B1 <sub>13</sub>	A2 <sub>13</sub>	B2 <sub>13</sub>	A1 <sub>31</sub>
1º	93,6%	7,9	4,7	3,4	0,4	0,6	31,6
2º	5,7%	6,7	3,7	4,5	1,0	6,2	29,4
3º	0,4%	7,1	72,5	6,5	9,9	44,6	4,2
POM	POV	B1 <sub>31</sub>	A2 <sub>31</sub>	B2 <sub>31</sub>	A3 <sub>11</sub>	B3 <sub>11</sub>	A4 <sub>11</sub>
1º	93,6%	0,0	33,8	10,9	18,2	9,8	37,9
2º	5,7%	1,6	36,2	6,5	23,2	8,8	41,0
3º	0,4%	15,2	0,4	8,4	3,3	2,9	9,6
POM	POV	B4 <sub>11</sub>	A3 <sub>21</sub>	B3 <sub>21</sub>	A4 <sub>21</sub>	B4 <sub>21</sub>	
1º	93,6%	8,1	27,6	14,3	7,6	20,7	
2º	5,7%	13,5	32,3	14,6	10,3	18,4	
3º	0,4%	16,6	5,9	15,1	5,1	2,8	

Na Tabela 3 é apresentado o resultado do método de Karhunen-Loève também para todo o regime de vibração da análise (transiente e permanente), porém, para o carregamento  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$ . A energia envolvida pelos três primeiros valores de POV totaliza 99,67% da energia total do sistema. Percebe-se que a participação dos modos da expansão modal para os dois primeiros POM ocorre de forma idêntica aos da Tabela 2. Já para o terceiro POM, dois modos em específico ( $A_{113}(\tau)$  e  $B_{213}(\tau)$ ), que não tiveram grande contribuição na primeira análise, apresentam grande destaque.

Com o intuito de avaliar a interferência na participação dos modos causada pelo regime transiente de vibração, utilizando a resposta numérica, aplicou-se

novamente o método de Karhunen-Loève para as duas análises dinâmicas, considerando somente o regime permanente de vibração. Nas Tabelas 4 e 5 é apresentada a participação dos modos, somente no regime permanente de vibração, para os pontos abaixo e acima da fronteira, respectivamente.

Para a primeira análise,  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$ , os dados considerados foram a partir do tempo igual a 0,05 s; já para a segunda análise,  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$ , o tempo inicial foi igual a 0,1 s, eliminando em ambos os casos, o regime transiente de vibração.

Tabela 3 – Participação dos modos da Equação (3) na resposta dinâmica da casca.  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$

POM3	POV	A1 <sub>11</sub>	B1 <sub>11</sub>	A2 <sub>11</sub>	B2 <sub>11</sub>	A5 <sub>02</sub>	A5 <sub>22</sub>
1°	95,1%	36,9	4,9	4,2	24,7	1,5	18,7
2°	3,4%	35,5	4,7	4,1	23,8	1,5	23,3
3°	1,0%	42,5	5,6	7,6	20,2	16,4	25,8
POM	POV	B5 <sub>22</sub>	A6 <sub>22</sub>	B6 <sub>22</sub>	A7 <sub>12</sub>	B7 <sub>12</sub>	A8 <sub>12</sub>
1°	95,1%	1,3	13,2	16,1	7,7	20,8	3,8
2°	3,4%	2,6	17,5	18,9	8,8	24,6	4,2
3°	1,0%	3,3	12,8	21,4	8,3	20,8	5,5
POM	POV	B8 <sub>12</sub>	A1 <sub>13</sub>	B1 <sub>13</sub>	A2 <sub>13</sub>	B2 <sub>13</sub>	A1 <sub>31</sub>
1°	95,1%	6,2	8,8	5,0	0,1	9,4	29,6
2°	3,4%	7,8	21,6	1,5	3,9	10,2	27,8
3°	1,0%	8,0	4,4	3,3	0,1	0,7	32,2
POM	POV	B1 <sub>31</sub>	A2 <sub>31</sub>	B2 <sub>31</sub>	A3 <sub>11</sub>	B3 <sub>11</sub>	A4 <sub>11</sub>
1°	95,1%	0,3	36,6	6,1	23,5	9,4	40,8
2°	3,4%	4,8	32,9	7,9	19,3	8,1	39,4
3°	1,0%	0,9	33,3	11,8	17,3	10,0	36,9
POM	POV	B4 <sub>11</sub>	A3 <sub>21</sub>	B3 <sub>21</sub>	A4 <sub>21</sub>	B4 <sub>21</sub>	
1°	95,1%	12,1	32,1	16,0	10,8	18,6	
2°	3,4%	15,7	30,4	10,0	8,1	17,5	
3°	1,0%	6,3	26,3	14,7	7,2	21,2	

Pode ser observado, a partir das Tabelas 4 e 5, que os modos participam exatamente da mesma forma como anteriormente, na análise conjunta dos regimes transiente e permanente de vibração. Apesar das amplitudes em módulo serem diferentes, os modos mais predominantes são mantidos os mesmos. Um resultado importante é que os três primeiros autovalores, para cada caso, contêm uma parcela de energia do sistema maior que antes. A soma dos três valores de POV resulta em 99,71% para o primeiro caso, e 99,84% para o segundo. Portanto, a consideração do regime transiente de vibração não interfere na participação dos modos de forma significativa, mas reduz a energia associada aos três primeiros POM.

Com as tabelas de participação dos modos é possível agora obter uma expansão de baixa dimensão para o modelo apresentado pela Equação (3). Os modos que apresentam pequena importância para os três primeiros POM (destacados em azul claro), em todas as análises dinâmicas feitas, podem ser desprezados, a fim de manter um modelo que represente de forma qualitativa o comportamento dinâmico da casca cilíndrica com interação modal. Vale lembrar, que o critério adotado levará em consideração os três primeiros POM. Apesar da maior parte da energia do sistema estar contida nos dois primeiros, os outros POM também são importantes numa

análise qualitativa das participações, pois somados representam uma parcela importante de energia.

Tabela 4 – Participação dos modos da Equação (3) na resposta dinâmica da casca para o regime permanente de vibração  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,5)$

POM	POV	A1 <sub>11</sub>	B1 <sub>11</sub>	A2 <sub>11</sub>	B2 <sub>11</sub>	A5 <sub>02</sub>	A5 <sub>22</sub>
1°	95,3%	36,9	4,9	4,2	24,7	1,5	18,7
2°	3,2%	36,2	4,8	4,2	24,0	2,0	22,8
3°	1,2%	42,3	5,6	7,5	20,2	16,2	26,4
POM	POV	B5 <sub>22</sub>	A6 <sub>22</sub>	B6 <sub>22</sub>	A7 <sub>12</sub>	B7 <sub>12</sub>	A8 <sub>12</sub>
1°	95,3%	1,3	13,2	16,1	7,7	20,8	3,8
2°	3,2%	2,5	16,8	18,7	8,7	24,1	4,2
3°	1,2%	3,5	13,4	21,8	8,5	21,3	5,6
POM	POV	B8 <sub>12</sub>	A1 <sub>13</sub>	B1 <sub>13</sub>	A2 <sub>13</sub>	B2 <sub>13</sub>	A1 <sub>31</sub>
1°	95,3%	6,2	9,0	5,0	0,1	9,5	29,6
2°	3,2%	7,6	18,2	1,9	3,4	7,9	28,4
3°	1,2%	8,2	7,0	3,1	0,2	0,9	32,0
POM	POV	B1 <sub>31</sub>	A2 <sub>31</sub>	B2 <sub>31</sub>	A3 <sub>11</sub>	B3 <sub>11</sub>	A4 <sub>11</sub>
1°	95,3%	0,2	36,7	6,1	23,5	9,4	40,8
2°	3,2%	4,0	33,7	7,8	20,1	8,4	39,8
3°	1,2%	0,3	32,9	12,0	16,8	9,9	36,8
POM	POV	B4 <sub>11</sub>	A3 <sub>21</sub>	B3 <sub>21</sub>	A4 <sub>21</sub>	B4 <sub>21</sub>	
1°	95,3%	12,0	32,1	16,1	10,8	18,6	
2°	3,2%	15,0	30,7	11,2	8,5	17,9	
3°	1,2%	6,8	26,2	13,9	6,8	21,1	

Tabela 5 – Participação dos modos da Equação (3) na resposta dinâmica da casca para o regime permanente de vibração  $(\Omega_f; \Gamma_1) = (2; 0,6)$

POM	POV	A1 <sub>11</sub>	B1 <sub>11</sub>	A2 <sub>11</sub>	B2 <sub>11</sub>	A5 <sub>02</sub>	A5 <sub>22</sub>
1°	96,0%	41,5	5,5	6,9	21,2	13,4	25,2
2°	3,7%	36,7	4,8	3,7	25,2	0,2	20,2
3°	0,1%	17,9	2,4	6,0	8,7	14,6	4,8
POM	POV	B5 <sub>22</sub>	A6 <sub>22</sub>	B6 <sub>22</sub>	A7 <sub>12</sub>	B7 <sub>12</sub>	A8 <sub>12</sub>
1°	96,0%	3,1	13,7	20,9	8,4	21,5	5,3
2°	3,7%	1,7	15,0	17,0	8,1	22,5	3,9
3°	0,1%	3,2	7,5	0,9	0,1	3,2	0,6
POM	POV	B8 <sub>12</sub>	A1 <sub>13</sub>	B1 <sub>13</sub>	A2 <sub>13</sub>	B2 <sub>13</sub>	A1 <sub>31</sub>
1°	96,0%	7,9	4,8	3,4	0,4	0,6	31,7
2°	3,7%	6,8	2,1	4,3	1,2	5,3	29,3
3°	0,1%	2,0	65,5	8,5	6,5	44,2	15,6
POM	POV	B1 <sub>31</sub>	A2 <sub>31</sub>	B2 <sub>31</sub>	A3 <sub>11</sub>	B3 <sub>11</sub>	A4 <sub>11</sub>
1°	96,0%	0,0	33,8	11,0	18,2	9,8	37,9
2°	3,7%	1,9	36,0	6,7	23,1	8,7	41,0
3°	0,1%	13,0	23,7	3,1	18,2	8,6	17,9
POM	POV	B4 <sub>11</sub>	A3 <sub>21</sub>	B3 <sub>21</sub>	A4 <sub>21</sub>	B4 <sub>21</sub>	
1°	96,0%	8,1	27,5	14,3	7,6	20,7	
2°	3,7%	13,8	32,3	14,2	10,2	18,4	
3°	0,1%	6,1	14,8	26,2	11,4	9,9	

A partir dos resultados da decomposição ortogonal apresentados observa-se que um modelo com apenas 17 graus de liberdade representa um campo de deslocamento transversal que representa, ao menos dinamicamente, o comportamento não linear da casca cilíndrica, sendo que este modelo pode ser computacionalmente vantajoso ao proposto por Rodrigues *et al.* (2013). O modelo com 17 graus de liberdade deve conter os seguintes modos:  $A_{11}(\tau) + B_{21}(\tau) + A_{502}(\tau) + A_{522}(\tau) + A_{622}(\tau) + B_{622}(\tau) + B_{712}(\tau) + A_{113}(\tau) + B_{213}(\tau) + A_{131}(\tau) + A_{231}(\tau) + A_{311}(\tau) + A_{411}(\tau) + B_{411}(\tau) + A_{321}(\tau) + B_{321}(\tau) + B_{421}(\tau)$ .

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foram obtidas as repostas não lineares de vibração, via elementos finitos, de uma casca cilíndrica excitada axialmente por um carregamento harmônico. A geometria da casca cilíndrica proporciona o aparecimento do fenômeno de interação modal, ou seja, dois modos de vibração distintos apresentam a mesma frequência natural. Nessa situação o problema quando resolvido analiticamente necessita de uma expansão modal com 29 graus de liberdade para descrever corretamente o acoplamento modal e o fenômeno de interação modal, como apresentado por Rodrigues *et al.* (2013). Os resultados no domínio do tempo foram obtidos a partir de um programa computacional comercial de elementos finitos (ANSYS versão 6.5) que, por sua vez, foram decompostos segundo o método de Karhunen-Loève para que fosse investigada a participação de cada um dos modos presentes na expansão modal de 29 graus de liberdade dada por Rodrigues *et al.* (2013). Os resultados apresentados indicam que um modelo com apenas 17 graus de liberdade, menos graus de liberdade do que o proposto por Rodrigues *et al.* (2013), pode ser obtido sem que haja perda de qualidade dos resultados, ao menos no cenário dinâmico da resposta da casca cilíndrica. É visto, ainda, que o regime transiente de vibração não interfere de forma significativa na participação dos modos; entretanto, altera o conteúdo de energia associado aos três primeiros POM do sistema.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível graças ao apoio das agências de fomento: CNPq e FAPEG.

## REFERÊNCIAS

ALIJANI, F.; AMABILI, M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 58, p. 233-257, 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012>.  
 AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P. Review of studies on geometrically non-linear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, p. 655-699, 2003. <http://dx.doi.org/10.1115/1.1565084>.  
 CHU, H. N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of thin circular cylindrical shells. **Journal of Aerospace Science**, v. 58, p. 302-609. 1961.  
 EVENSEN, D. A. Some observations on the nonlinear vibrations of thin cylindrical shells. **American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA Journal**, v. 1, p. 2857-2858, 1963. <http://dx.doi.org/10.2514/3.2188>.  
 GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Non-linear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, v. 127, p. 133-143, 1988. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90354-9](http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X(88)90354-9).  
 GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. Effect of non-linear modal interaction on the dynamic instability of axially excited cylindrical shells. **Computers and**

**Structures**, v. 82, p. 2621-2634, 2004. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.04.020>.  
 GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Low-dimensional Galerkin models for nonlinear vibration and instability analysis of cylindrical shells. **Nonlinear Dynamics**, v. 41, p. 129-145, 2005. <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-005-2802-3>.  
 GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition. **Journal of Sound and Vibration**, v. 315, p. 641-663, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.063>.  
 NOWINSKI, J. L. Nonlinear transverse vibration of orthotropic cylindrical shells. **American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA Journal**, v. 1, p. 617-620, 1963. <http://dx.doi.org/10.2514/3.1604>.  
 OLSON, M. D. Some experimental observations on the nonlinear vibrations of cylindrical shells. **American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA Journal**, v. 3, p. 1775-1777, 1965. <http://dx.doi.org/10.2514/3.55196>.  
 PIRES FILHO, L. P.; SILVA, F. M. A. Influência da interação modal no comportamento estático não linear de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas. In: **IX Congresso de Ensino, Pesquisa e Extensão da Universidade Federal de Goiás**, Goiânia, Goiás, 2012.  
 RODRIGUES, L. **Uma introdução à influência da interação modal nas oscilações não lineares de cascas cilíndricas**. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, 2013.  
 RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Effects of modal coupling on the dynamics of parametrically and directly excited cylindrical shells. **Thin-Walled Structures**, v. 81, p. 210-224, 2013. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2013.08.004>.  
 SIROVICH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: coherent structures. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 45, p. 561-571, 1987a.  
 SIROVICH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures part II: symmetries and transformations. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 45, p. 573-582, 1987b.  
 SIROVICH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures part III: dynamics and scaling. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 45, p. 583-590, 1987c.  
 SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal modes for nonlinear vibratory systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 164, p. 85-124, 1993. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1993.1198>.  
 STEINDL, A.; TROGER, H. Methods for dimension reduction and their applications in nonlinear dynamics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 2131-2147, 2001. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00157-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00157-8).  
 VAKAKIS, A. F. Non-linear normal modes and their applications in vibration theory: an overview. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 11, p. 3-22, 1997. <http://dx.doi.org/10.1006/mssp.1996.9999>.