

MÉTODO MATRICIAL NA TEORIA DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS EM MEIOS POROSOS ESTRATIFICADOS

MATRIX METHOD OF THE PROPAGATION THEORY OF ELASTIC WAVES IN STRATIFIED POROELASTIC MEDIUM

Márcia Miranda Azeredo¹, Viatcheslav Ivanovich Priimenko²

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

¹E-mail: marcia578@gmail.com

²E-mail: slava211054@gmail.com

RESUMO

A teoria clássica da poroelasticidade de Biot, desenvolvida em meados da década de 1950, descreve teoricamente a propagação de ondas elásticas através de um meio poroso contendo fluido. Esta teoria vem sendo consideravelmente aplicada em vários campos relacionados com o meio poroso: exploração sísmica, caracterização de reservatórios de óleo e gás, geofísica ambiental, sismologia de terremoto etc. Neste trabalho foi utilizado o formalismo de Ursin com a proposta de se criar um método efetivo na análise da propagação de ondas elásticas em um meio 3D poroso e estratificado, em que os parâmetros do meio são caracterizados por funções constantes por partes de uma única variável, a profundidade. A fonte sísmica e o receptor que foram considerados no estudo podem estar localizados em qualquer ponto do meio. De modo geral, mostra-se aqui um método capaz de solucionar analiticamente o sistema das equações de Biot e que pode servir como base para o desenvolvimento de um eficiente algoritmo computacional.

Palavras-chave: meio poroelástico estratificado, teoria de Biot, formalismo de Ursin, modelagem matemática, solução explícita.

ABSTRACT

The classic poroelastic theory of Biot, developed in the 1950's, describes the propagation of elastic waves through a porous media containing a fluid. This theory has been extensively used in many fields dealing with porous media: seismic exploration, oil gas reservoir characterization, environmental geophysics, earthquake seismology, etc. In this work, it was used the Ursin formalism to create an effective method for the analysis of propagation of elastic waves through a stratified 3D porous media, where the parameters of the media are characterized by piece-wise constant functions of only one spatial variable, depth. In addition, it was considered that the source and the receiver could be localized in any point of the medium. Therefore, it was showed that the method is useful to construct the explicit solution of the Biot's equations, and this method can be a base to the development of an efficient computational algorithm.

Keywords: stratified poroelastic medium, Biot's theory, formalism of Ursin, mathematical modeling, explicit solution.

1 – INTRODUÇÃO

Um meio poroso que apresenta a característica de voltar ao seu estado inicial após sofrer deformação é chamado de meio poroelástico. Os materiais poroelásticos são amplamente utilizados na engenharia e geofísica, em especial caso quando são preenchidos por fluido.

A teoria da poroelasticidade descreve, por meio da modelagem matemática, o comportamento mecânico dos meios porosos preenchidos por fluido. Este comportamento pode ser observado quando o meio é submetido à um esforço externo, como por exemplo, o esforço causado pela explosão de uma fonte sísmica (dinamite). No momento em que isto acontece, parte da carga aplicada ao meio é transferida ao fluido existente nos poros, o que resulta num excesso de pressão e provoca a expulsão de uma porção do fluido. Com isto, a pressão em excesso é dissipada transferindo a descarga, em forma de tensões, para a parte sólida da rocha, resultando então na deformação do meio.

Inicialmente, a teoria da poroelasticidade foi desenvolvida pelo engenheiro eletricitista e pesquisador belga Maurice Biot. Entre 1935 e 1962, ele publicou uma

série de artigos que fundamentaram tal teoria, atualmente conhecida como teoria de Biot. Suas publicações mais famosas podem ser conferidas em Biot (1956a) e Biot (1956b).

Como o solo é um material poroelástico, a teoria de Biot é essencial em algumas áreas, tais como, exploração de óleo, detecção de gás-hidrato, monitoramento sísmico de armazenamento de CO₂, hidrogeologia, dentre outras.

O conhecimento dos fenômenos associados à propagação das ondas sísmicas e suas relações com as propriedades físicas do reservatório é de grande importância para a interpretação de dados sísmicos realizada no estudo de reservatórios. Uma forma de analisar os efeitos causados pelas propriedades físicas das rochas nas seções sísmicas é por meio da modelagem numérica.

A maior diferença entre campos de ondas em meios poroelásticos e puramente elásticos é a existência da onda compressional do segundo tipo, também chamada de onda lenta, em adição às ondas convencionais compressional e cisalhante existentes nos campos elásticos. Como consequência disto, a amplitude do campo de onda sofre

atenuação devido às perdas da energia na presença de fluido viscoso. Tais peculiaridades do processo trazem certas dificuldades na modelagem da propagação de ondas em meios poroelásticos.

Os trabalhos de Thomson (1950), Haskell (1953), Brekhovskih (1960), Kunetz e d'Erceville (1962), Ursin (1983), Molotkov (1984), Akkuratov e Dmitriev (1984) e Fat'yanov (1990) são dedicados ao desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos para análise de propagação de ondas em meios puramente elásticos estratificados. Por outro lado, quando se trata de meios poroelásticos, as soluções analíticas existentes são, em geral, limitadas. Isto ocorre devido à simplicidade dos modelos geológicos que são considerados nos estudos, como se pode observar, por exemplo, em Allard *et al.* (1989), Baird *et al.* (1999) e Molotkov (2002). Entretanto, estas soluções proporcionam maior credibilidade nos resultados das análises de propagação de ondas elásticas em meios porosos quando os mesmos são obtidos a partir de métodos numéricos, tais como, diferenças finitas, pseudospectrais e elementos finitos. Além disso, as soluções existentes são amplamente utilizadas na elaboração de métodos efetivos capazes de solucionar problemas inversos associados com o sistema de Biot.

O objetivo desta pesquisa é desenvolver um método matricial capaz obter a solução analítica das equações de Biot. Este método baseia-se no formalismo apresentado em Ursin (1983), o qual foi anteriormente utilizado apenas na construção da solução de problemas relacionados à propagação de ondas em meios eletromagnéticos (sistema de Maxwell) ou elásticos puros (sistema de Lamé).

Para o desenvolvimento desta pesquisa, considera-se um meio geológico 3D estratificado formado por camadas homogêneas e isotrópicas, o que aumenta a complexidade do problema apesar de aproximá-lo de situações reais. Além disso, pode-se observar que a estrutura matricial da solução e o método da sua construção têm importância significativa para a elaboração de um algoritmo computacional numericamente eficiente.

2 – O MEIO POROSO E O MODELO GEOLÓGICO

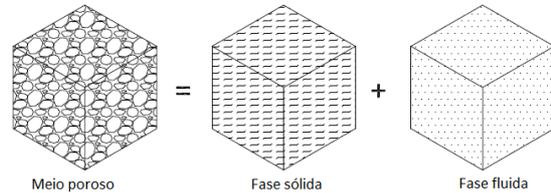
O meio poroso natural (rocha reservatório) é composto de uma fase sólida granular com espaços vazios entre os grãos, em que estes espaços podem ou não estar preenchidos por fluido e/ou gás.

Neste trabalho foi considerado que os poros do meio estão interconectados e completamente preenchidos por fluido.

A interação física e química neste caso é mais complexa do que em um meio monofásico. Desta forma, um volume elementar infinitesimal é utilizado para representar todas as propriedades físicas do meio, que são: porosidade, permeabilidade, saturação, propriedades elásticas, propriedades elétricas e propriedades térmicas. Além disso, considera-se que o meio utilizado como objeto de estudo é formado por três componentes: o esqueleto sólido (ou matriz porosa), o fluido que preenche os poros e o material sólido ou grãos que formam o esqueleto. Sendo assim, o volume elementar pode ser visto como a

sobreposição no tempo e no espaço de dois meios contínuos: a matriz porosa e a região vazia preenchida por fluido (ver Figura 1).

Figura 1 – Sobreposição da fase sólida e da fase fluida de um material poroso



O modelo geológico considerado para efeito de estudo é formado por camadas horizontais de materiais poroelásticos homogêneos e isotrópicos, como mostrado na Figura 2. De forma geral, os parâmetros físicos do meio são caracterizados por funções constantes por partes, já que são constantes em cada camada e variam somente de acordo com a profundidade $x_3 = z$.

Figura 2 – Seção transversal de um modelo geológico com quatro camadas



3 – SISTEMA DE BIOT

Para cada ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, as equações da poroelasticidade de Biot no domínio da frequência temporal $\omega \in \mathbb{R}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} -\omega^2(\rho\mathbf{u} + \rho_f\mathbf{w}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F} \\ -i\omega\mathbf{w} &= \frac{\kappa}{\eta}(-\nabla p + \omega^2\rho_f\mathbf{u} + \omega^2\rho_E\mathbf{w} + \mathbf{f}) \\ \boldsymbol{\tau} &= (\lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + C\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{I} + G(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \\ -p &= C\nabla \cdot \mathbf{u} + M\nabla \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.1)$$

A influência da fonte no meio material é definida nas equações de Biot por $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, em que estes representam o campo de força imposto na matriz sólida e na fase fluida, respectivamente.

As variáveis das equações são: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, o campo de deslocamentos da fase sólida; $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, o campo de deslocamentos relativos do fluido; $\boldsymbol{\tau}$, o tensor de tensões *bulk* do meio; e p , a função escalar da pressão de poro.

Os parâmetros materiais que aparecem nas equações de Biot são: λ e G , os parâmetros de Lamé; C e M , os módulos de Biot; ρ , a densidade *bulk* do meio; ρ_f , a

densidade do fluido; ρ_E , a densidade efetiva do fluido; κ , a permeabilidade; e η , a viscosidade do fluido. Em (3.1), \mathbf{I} é a matriz identidade 3×3 .

A primeira e segunda equações apresentadas em (3.1) representam as equações do movimento, as quais podem ser obtidas a partir da segunda Lei de Newton para cada fase separadamente (sólida e fluida). A terceira e quarta equações mostradas em (3.1) são as equações constitutivas, que relacionam parâmetros poroelásticos do meio com as grandezas de interesse consideradas (tensão, deslocamentos e pressão). As equações constitutivas podem ser obtidas a partir da Lei de Hooke para meios poroelásticos (Carcione, 2007).

3.1 Condições de Fronteira

Sejam $\dot{\mathbf{u}} = -i\omega\mathbf{u}$ e $\dot{\mathbf{w}} = -i\omega\mathbf{w}$, a velocidade da fase sólida e a velocidade relativa do fluido no domínio espectral, respectivamente. De acordo com Carcione (2007), na interface entre duas camadas homogêneas do meio geológico que está sendo considerado, as seguintes variáveis são contínuas:

$$\dot{u}_i, \dot{w}_3, \tau_{i3}, p, \quad i \in \{1,2,3\} \quad (3.2)$$

Além disso, na superfície livre do meio poroso, não existem restrições para o deslocamento, isto porque o meio encontra-se livre para se movimentar. Por esta razão, as componentes de tensão e a pressão de fluido desaparecem. Sendo assim, as condições naturais na superfície livre são

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{33} = 0, \quad p = 0 \quad (3.3)$$

4 – FORMATO URSIN - SISTEMA DE BIOT COMO UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A partir das ideias apresentadas em (Ursin, 1983), o sistema de equações diferenciais parciais de Biot (3.1) pode ser escrito como dois sistemas desacoplados de equações diferenciais ordinárias lineares, os quais seguem o seguinte formato:

$$\frac{d}{dz}\Phi^{(m)} = -i\omega\mathbf{M}^{(m)}\Phi^{(m)} + \mathbf{S}^{(m)}, \quad m = 1,2 \quad (4.1)$$

Em que: $\Phi^{(m)}$ é um vetor $2n \times 1$ formado pelas variáveis do sistema, $\mathbf{S}^{(m)}$ é um vetor $2n \times 1$ que representa a fonte e $\mathbf{M}^{(m)}$ é uma matriz $2n \times 2n$ definida em blocos dada por:

$$\mathbf{M}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^{(m)} \\ \mathbf{M}_2^{(m)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Em que: $\mathbf{M}_1^{(m)}$ e $\mathbf{M}_2^{(m)}$ são matrizes simétricas.

O primeiro passo a ser tomado em direção do formalismo de Ursin, é substituir o sistema de equações diferenciais de Biot nas variáveis x_1 , x_2 e x_3 por um sistema de equações diferenciais que dependa apenas da

variável $x_3 = z$. Para isso, aplica-se a transformada de Fourier bidimensional das coordenadas laterais x_1 e x_2 no sistema de Biot (3.1), em que a transformada de um campo $\mathbf{X}(x_1, x_2, z)$ é dada por:

$$\tilde{\mathbf{X}}(k_1, k_2, z) \equiv \mathcal{F}[\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_1x_1 + k_2x_2)} \mathbf{X}(x_1, x_2, z) dx_1 dx_2 \quad (4.3)$$

Neste caso, $(k_1, k_2)^T$ é o vetor do número de onda horizontal, e:

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \gamma = \frac{k}{\omega} \quad (4.4)$$

são a magnitude do número de onda horizontal e a vagarosidade horizontal, respectivamente.

Além disso, a transformada inversa de Fourier bidimensional de $\tilde{\mathbf{X}}$ é

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, z) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{X}}] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_1x_1 + k_2x_2)} \tilde{\mathbf{X}}(k_1, k_2, z) dk_1 dk_2 \quad (4.5)$$

Aplicando a transformada (4.3) no sistema de Biot (3.1) obtém-se a representação do sistema em termos de $\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\tau}, \tilde{p}$.

Após, observa-se que o sistema pode ser simplificado caso seja realizada uma mudança de coordenadas. Sendo assim, ao invés de ser utilizada a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, considera-se para cada número de onda $(k_1, k_2)^T$ uma nova base ortogonal cuja matriz mudança de base é:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{k} & \frac{k_2}{k} & 0 \\ -\frac{k_2}{k} & \frac{k_1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Sendo assim, os termos que aparecem no sistema de Biot (3.1) são escritos na nova base da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \Omega\hat{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \Omega\hat{\mathbf{w}}, \quad \tilde{\tau} = \Omega\hat{\tau}\Omega^T \\ \tilde{\mathbf{F}} = \Omega\hat{\mathbf{F}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \Omega\hat{\mathbf{f}}, \quad \tilde{p} = \hat{p} \quad (4.7)$$

As variáveis que compõem o vetor $\Phi^{(m)}$ devem ser escolhidas de forma que as condições de fronteira em uma interface entre dois meios heterogêneos sejam satisfeitas se $\Phi^{(m)}$ for contínua por meio desta interface. Logo, de acordo com (3.2), os vetores com as variáveis do sistema 1 e do sistema 2 são, respectivamente:

$$\Phi^{(1)} = [\tilde{u}_3, \tilde{\tau}_{13}, -\tilde{w}_3, \tilde{\tau}_{33}, \tilde{u}_1, \tilde{p}] \mathbf{e}, \quad (4.8)$$

$$\Phi^{(2)} = [\tilde{u}_2, \tilde{\tau}_{23}]$$

Define-se:

$$\beta = [C^2 - M(\lambda + 2G)]^{-1}. \quad (4.9)$$

Assim, para o sistema 1, as submatrizes são:

$$\mathbf{M}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -\beta M & \beta\gamma(C^2 - \lambda M) & -\beta C \\ \beta\gamma(C^2 - \lambda M) & \rho + \frac{i\omega\rho_f^2\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} - 4\beta\gamma^2 G[C^2 - M(\lambda + G)] & 2\beta\gamma GC - \frac{i\omega\rho_f\gamma\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \\ -\beta C & 2\beta\gamma GC - \frac{i\omega\rho_f\gamma\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} & -\beta(\lambda + 2G) + \frac{i\omega\gamma^2\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

e

$$\mathbf{M}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \rho & \gamma & -\rho_f \\ \gamma & \frac{1}{G} & 0 \\ -\rho_f & 0 & \frac{-\eta + i\omega\kappa\rho_E}{i\omega\kappa} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

E o vetor fonte para este sistema é dado por:

$$\mathbf{S}^{(1)} = \left[0, -\tilde{F}_1 - \frac{i\omega\rho_f\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \tilde{f}_1, \frac{i\kappa\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \tilde{f}_1, -\tilde{f}_3, 0, \tilde{f}_3 \right]^T \quad (4.12)$$

Enquanto que, para o sistema 2, as submatrizes são mais simples, como a seguir:

$$\mathbf{M}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ G \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{M}_2^{(2)} = \left[\rho - G\gamma^2 + \frac{i\omega\rho_f^2\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \right] \quad (4.14)$$

Além disso, o vetor fonte neste caso é:

$$\mathbf{S}^{(2)} = \left[0, -\tilde{F}_2 - \frac{i\omega\rho_f\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \tilde{f}_2 \right]^T \quad (4.15)$$

As variáveis \tilde{W}_1 , $\tilde{\tau}_{11}$ e $\tilde{\tau}_{22}$ dependem apenas da solução encontrada para o *sistema 1* e são dadas por:

$$\tilde{W}_1 = \frac{\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} (-i\tilde{p}\kappa + i\omega\rho_f\tilde{u}_1 + \tilde{f}_1), \quad (4.16)$$

$$\tilde{\tau}_{11} = \beta[-4\gamma G[C^2 - M(\lambda + G)]\tilde{u}_1 + (C^2 - \lambda M)\tilde{\tau}_{33} + 2GC\tilde{p}], \quad (4.17)$$

$$\tilde{\tau}_{22} = \beta[-2\gamma G(C^2 - \lambda M)\tilde{u}_1 + (C^2 - \lambda M)\tilde{\tau}_{33} + 2GC\tilde{p}]. \quad (4.18)$$

Analogamente, as variáveis \tilde{W}_2 e $\tilde{\tau}_{12}$ dependem apenas da solução encontrada para o *sistema 2*. Assim:

$$\tilde{W}_2 = \frac{i\omega\kappa\rho_f}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \tilde{u}_2 + \frac{\kappa}{\eta - i\omega\kappa\rho_E} \tilde{f}_2, \quad (4.19)$$

$$\tilde{\tau}_{12} = -G\gamma\tilde{u}_2. \quad (4.20)$$

5 – DIAGONALIZAÇÃO DE URSIN

De acordo com Ursin (1983), a solução analítica do sistema:

$$\frac{d}{dz} \Phi = -i\omega \mathbf{M} \Phi \quad (5.1)$$

Em que:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

pode ser decomposta em duas partes: ondas ascendentes e ondas descendentes. Para que isto aconteça é preciso aplicar o método de diagonalização de Ursin à matriz \mathbf{M} , como será feito adiante.

Suponha que $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ possui n autovalores não nulos e distintos designados por q_m^2 , os quais estão associados aos autovetores \mathbf{b}_m . Assim:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{b}_m = q_m^2\mathbf{b}_m \quad (5.3)$$

Define-se:

$$\mathbf{y}_m = \frac{1}{q_m} \mathbf{M}_2\mathbf{b}_m \quad (5.4)$$

Em que: $q_m = \sqrt{q_m^2}$. O valor da raiz quadrada será escolhido de forma que $\text{Im}(q_m) \geq 0$ e, se q_m for real, $q_m > 0$.

Multiplicando (5.4) por $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ e utilizando a equação dada em (5.3), obtém-se:

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{y}_m = q_m^2\mathbf{y}_m \quad (5.5)$$

O que significa que \mathbf{y}_m é autovetor de $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ associado ao autovalor q_m^2 .

Da definição dada em (5.4), tem-se que:

$$\mathbf{M}_2\mathbf{b}_m = q_m\mathbf{y}_m \quad (5.6)$$

Além disso, multiplicando (5.4) por \mathbf{M}_1 e utilizando (5.3), chega-se a:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{y}_m = q_m\mathbf{b}_m \quad (5.7)$$

Logo, de (5.6) e (5.7), pode-se dizer que q_m é autovalor da matriz \mathbf{M} dada em (5.2) associado ao autovetor $[\mathbf{b}_m, \mathbf{y}_m]^T$.

Seja \mathbf{L}_1 uma matriz $n \times n$ em que sua m -ésima coluna é formada por \mathbf{b}_m , e seja \mathbf{L}_2 uma matriz $n \times n$ em que sua m -ésima coluna é formada por \mathbf{y}_m . É possível verificar que:

$$(\mathbf{L}_1^T)^{-1} = \mathbf{L}_2 \quad (5.8)$$

Seja Λ uma matriz diagonal em que as entradas da diagonal são formadas por q_m . Por meio da definição dada em (5.4) e da Equação (5.8), tem-se,

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{L}_2\Lambda\mathbf{L}_2^T \quad (5.9)$$

Além disso, a partir das igualdades (5.7) e (5.8), pode-se verificar que:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{L}_1\Lambda\mathbf{L}_1^T \quad (5.10)$$

Seja \mathbf{L} a matriz $2n \times 2n$ definida em blocos dada por:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 & -\mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

E seja $\tilde{\Lambda}$ a matriz diagonal:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Assim, de acordo com (5.9) e (5.10), conclui-se que a matriz \mathbf{M} pode ser diagonalizada da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\tilde{\Lambda}\mathbf{L}^{-1} \quad (5.13)$$

Em que: a partir da Equação (5.8), a matriz \mathbf{L}^{-1} é dada por:

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2^T & \mathbf{L}_1^T \\ \mathbf{L}_2^T & -\mathbf{L}_1^T \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

5.1 – Autovalores e autovetores para o sistema 1

Os autovalores distintos para o *sistema 1* são dados por:

$$(q_m^{(1)})^2 = -\gamma^2 + \beta \left(C_{\rho_f} - \frac{1}{2} M \rho - \frac{1}{2} (\lambda + 2G) \left(\frac{\eta - i\omega\rho_E\kappa}{\kappa\omega} \right) \right) \quad (5.15)$$

$$\pm \frac{1}{2} \beta \left(\sqrt{\left(i(\lambda + 2G) \left(\frac{\eta - i\omega\rho_E\kappa}{\kappa\omega} \right) - M \rho \right)^2 - 4 \left(M \rho_f - i \left(\frac{\eta - i\omega\rho_E\kappa}{\kappa\omega} \right) C \right) (C \rho - (\lambda + 2G) \rho_f)} \right), e$$

$m = 1, 2;$

$$(q_3^{(1)})^2 = -\gamma^2 + \frac{1}{G} \left(\rho + \frac{i\rho_f^2\kappa\omega}{\eta - i\omega\rho_E\kappa} \right) \quad (5.16)$$

Em (5.15), quando $m = 1$, considera-se a presença da onda P (sinal positivo) e quando $m = 2$ há a presença da onda lenta de Biot (sinal negativo). Já a igualdade (5.16), refere-se à presença de ondas cisalhantes verticais.

Os autovetores do sistema 1 são:

$$\mathbf{b}_m^{(1)} = \bar{a}_m \begin{bmatrix} -1 \\ 2\gamma G \\ \xi_m \end{bmatrix}, m = 1, 2 \quad (5.17)$$

$$\mathbf{b}_3^{(1)} = \frac{\bar{a}_3}{q_3^{(1)}} \begin{bmatrix} -\gamma \\ G(\gamma^2 - (\lambda_3^{(1)})^2) \\ i\gamma\rho_f \left(\frac{\kappa\omega}{\eta - i\omega\rho_E\kappa} \right) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{y}_m^{(1)} = \frac{\bar{a}_m}{q_m^{(1)}} \begin{bmatrix} 2\gamma^2 G - \rho - \rho_f \xi_m \\ \gamma \\ \rho_f + i \left(\frac{\eta - i\omega\rho_E\kappa}{\kappa\omega} \right) \xi_m \end{bmatrix}, m = 1, 2; e \quad (5.19)$$

$$\mathbf{y}_3^{(1)} = \bar{a}_3 \begin{bmatrix} 2\gamma G \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Em que:

$$\xi_m = \frac{(C\rho - (\lambda + 2G)\rho_f)}{\left(\left(\frac{(\lambda_m^{(1)})^2 + \gamma^2}{\beta_1} \right) - C\rho_f + i(\lambda_m^{(1)} + 2G) \left(\frac{\eta - i\omega\rho_E\kappa}{\kappa\omega} \right) \right)}, m = 1, 2 \quad (5.21)$$

$$\bar{a}_m = \sqrt{\frac{\lambda_m^{(1)}}{\rho + 2\rho_f \xi_m + i \left(\frac{\eta - i\omega\rho_E\kappa}{\kappa\omega} \right) \xi_m^2}}, m = 1, 2; e \quad (5.22)$$

$$\bar{a}_3 = \sqrt{\frac{\lambda_m}{G(\lambda_m^2 + \gamma^2)}}. \quad (5.23)$$

5.2 – Autovalores e autovetores para o sistema 2

Para o sistema 2 haverá apenas um autovalor correspondente às ondas cisalhantes horizontais, o qual é dado por:

$$(q^{(2)})^2 = -\gamma^2 + \frac{1}{G} \left(\rho + \left(\frac{i\rho_f^2\kappa\omega}{\eta - i\omega\rho_E\kappa} \right) \right) \quad (5.24)$$

Os autovetores para o sistema 2 são:

$$\mathbf{b}^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{Gq^{(2)}}} \right], e \quad (5.25)$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \left[\sqrt{Gq^{(2)}} \right] \quad (5.26)$$

6 – SOLUÇÃO SEM A PRESENÇA DE FONTE

Para encontrar a solução do sistema de Biot no meio geológico considerado nesta pesquisa, obtém-se inicialmente a solução no interior de uma camada homogênea sem a presença de fonte. Em seguida, verificam-se as condições de salto nas interfaces entre as camadas e, por último, as possibilidades de se obter a solução no interior de qualquer camada quando há a presença de uma fonte sísmica.

Em um meio homogêneo com ausência de fontes o vetor \mathbf{S} é nulo. Assim, no interior de uma camada, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias conforme o mostrado em (5.1).

Escrevendo Φ com respeito à base de autovetores obtida na seção anterior, tem-se:

$$\Psi = \mathbf{L}^{-1}\Phi, \text{ ou seja,} \quad (6.1)$$

$$\Phi = \mathbf{L}\Psi \quad (6.2)$$

Substituindo (6.2) em (5.1) e utilizando a Equação (5.13), é obtido o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d}{dz}\Psi = -i\omega\tilde{\Lambda}\Psi \quad (6.3)$$

Cuja solução com condição inicial $\Psi(\mathbf{z}_0)$ é:

$$\Psi(\mathbf{z}) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)} \Psi(\mathbf{z}_0) \quad (6.4)$$

Esta solução pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Em que: \mathbf{U} e \mathbf{D} são vetores de dimensão $n \times 1$ e são interpretados como ondas ascendentes e ondas descendentes, respectivamente (Ursin, 1983). Assim, a Equação (6.4) para um meio homogêneo com ausência de fontes pode ser escrita como:

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} e^{-i\omega\Lambda(z-z_0)} \mathbf{U}(z_0) \\ e^{-i\omega\Lambda(z-z_0)} \mathbf{D}(z_0) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

A onda, ao atravessar diferentes camadas do meio geológico, irá se deparar com uma superfície de descontinuidade $z = \bar{z}$ entre elas. Assim, é preciso determinar as condições de salto nesta superfície. Para isto, denotam-se com o sobrescrito (+) as quantidades avaliadas imediatamente abaixo da interface, enquanto que (-) representa quantidades avaliadas exatamente acima da interface.

De acordo com as condições de fronteira sabe-se que Φ é contínua por meio da interface \bar{z} . Logo:

$$\Phi^+ = \Phi^- \quad (6.7)$$

O que implica, conforme (6.2), em:

$$\mathbf{L}^+ \Psi^+ = \mathbf{L}^- \Psi^- \quad (6.8)$$

Seja \mathbf{J} a matriz de salto dada por:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{L}^+)^{-1} \mathbf{L}^- \quad (6.9)$$

De acordo com (5.11) e (5.14) tem-se:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A & \mathbf{J}_B \\ \mathbf{J}_B & \mathbf{J}_A \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_A &= \frac{1}{2} [(\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- + (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^-] \\ \mathbf{J}_B &= \frac{1}{2} [(\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- - (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^-] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Utilizando a Equação (5.8) pode-se verificar que:

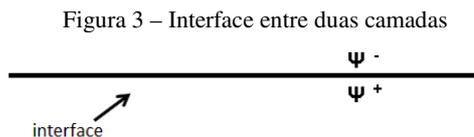
$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A^T & -\mathbf{J}_B^T \\ -\mathbf{J}_B^T & \mathbf{J}_A^T \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Assim, as condições de salto numa interface entre duas camadas homogêneas são:

$$\Psi^+ = \mathbf{J} \Psi^-, \text{ e} \quad (6.13)$$

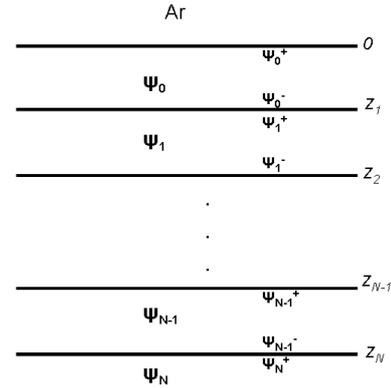
$$\Psi^- = \mathbf{J}^{-1} \Psi^+ \quad (6.14)$$

E, por meio destas, é possível relacionar as soluções abaixo e acima da interface, conforme mostrado na Figura 3.



Para analisar a solução do problema em qualquer posição do modelo geológico, considera-se um meio estratificado com N interfaces localizadas nas profundidades $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N < \infty$, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Meio estratificado com N interfaces



Denota-se, com o subscrito m as soluções avaliadas entre as interfaces z_m e z_{m+1} , em que a espessura desta camada é dada por:

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m, \quad m = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (6.15)$$

Assim, Ψ_m^- representa a solução imediatamente acima da interface z_{m+1} enquanto que Ψ_m^+ representa a solução imediatamente abaixo de z_m (Figura 4). Além disso, a matriz \mathbf{J}_m representa a matriz de salto na interface z_m .

Estabelecidas as notações, observe a última interface z_N . Pode-se afirmar que, de acordo com a condição de salto (6.14):

$$\Psi_{N-1}^- = \mathbf{J}_N^{-1} \Psi_N^+ \quad (6.16)$$

Sabendo-se que a camada abaixo de z_N é infinita, não haverá ondas refletidas nesta camada, o que implica em $\mathbf{U}_N^+ = 0$. Logo, de acordo com (6.10), tem-se:

$$\mathbf{U}_{N-1}^- = -\mathbf{J}_{B,N}^T \mathbf{D}_N^+, \text{ e} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{D}_{N-1}^- = -\mathbf{J}_{A,N}^T \mathbf{D}_N^+ \quad (6.18)$$

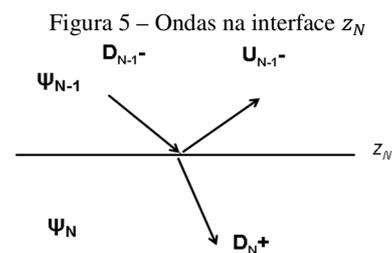
Destas relações chega-se ao seguinte resultado

$$\mathbf{U}_{N-1}^- = \mathbf{\Gamma}_N \mathbf{D}_{N-1}^-, \quad (6.19)$$

Em que:

$$\mathbf{\Gamma}_N = -(\mathbf{J}_{B,N}^T)(\mathbf{J}_{A,N}^T)^{-1} \quad (6.20)$$

É a matriz de reflexão na última interface. Sendo assim, uma vez conhecida a onda incidente na interface z_N é possível encontrar a onda refletida por esta mesma interface, como pode ser observado na Figura 5.



De acordo com (6.17), (6.19) e (6.20), verifica-se que:

$$\mathbf{D}_N^+ = \mathbf{T}_N \mathbf{D}_{N-1}^- \quad (6.21)$$

Em que:

$$\mathbf{T}_N = (\mathbf{J}_{A,N}^T)^{-1} \quad (6.22)$$

É a matriz de transmissão da interface z_N , pois permite obter a onda transmitida por esta interface quando a onda incidente na mesma é conhecida.

Utilizando as condições de salto (6.13) e (6.14), e também utilizando a expressão (6.4) para a solução no interior de uma camada, serão encontradas as matrizes de reflexão $\mathbf{\Gamma}_m$ e transmissão \mathbf{T}_m em uma interface z_m qualquer.

Para isto, obtém-se inicialmente o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m^- &= \mathbf{J}_{A,m}^T e^{i\omega\Lambda_m \Delta z_m} \mathbf{U}_{m+1}^- - \mathbf{J}_{B,m}^T e^{-i\omega\Lambda_m \Delta z_m} \mathbf{D}_{m+1}^- \\ \mathbf{D}_m^- &= -\mathbf{J}_{B,m}^T e^{i\omega\Lambda_m \Delta z_m} \mathbf{U}_{m+1}^- + \mathbf{J}_{A,m}^T e^{-i\omega\Lambda_m \Delta z_m} \mathbf{D}_{m+1}^- \end{aligned} \quad (6.23)$$

A partir das equações anteriores, chega-se à

$$\mathbf{U}_{m-1}^- = \mathbf{\Gamma}_m \mathbf{D}_{m-1}^-, \quad (6.24)$$

Em que:

$$\mathbf{\Gamma}_m = (\mathbf{J}_{A,m}^T \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{m+1} - \mathbf{J}_{B,m}^T) (-\mathbf{J}_{B,m}^T \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{m+1} + \mathbf{J}_{A,m}^T)^{-1}, \quad (6.25)$$

e

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{m+1} = e^{i\omega\Lambda_m \Delta z_m} \mathbf{\Gamma}_{m+1} e^{i\omega\Lambda_m \Delta z_m}. \quad (6.26)$$

Além disso, tem-se que

$$\mathbf{D}_N^+ = \mathbf{T}_m \mathbf{D}_{m-1}^-, \quad (6.27)$$

Em que:

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{T}_{m+1} e^{i\omega\Lambda_m \Delta z_m} (-\mathbf{J}_{B,m}^T \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{m+1} + \mathbf{J}_{A,m}^T)^{-1}. \quad (6.28)$$

De acordo com (6.24) e (6.27) observa-se que quando a onda \mathbf{D}_{m-1}^- incidente na interface z_m é dada, pode-se calcular a onda refletida \mathbf{U}_{m-1}^- por essa mesma interface e a onda transmitida \mathbf{D}_N^+ pela última interface por meio das matrizes de reflexão e transmissão. Além disso, utilizando o princípio de indução matemática é possível verificar que a matriz de reflexão $\mathbf{\Gamma}_m$ é simétrica.

A partir das equações (6.20) e (6.22), todas as matrizes de reflexão e de transmissão podem ser computadas por recursão usando (6.25) e (6.28). Estas matrizes são essenciais para o cálculo da solução do sistema em um meio estratificado.

7 – SOLUÇÃO COM A PRESENÇA DE FONTE

Assume-se que o vetor da fonte, quando esta se encontra localizada a uma profundidade z_s , é dado da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \delta(z - z_s) + \mathbf{S}_1 \delta'(z - z_s) \quad (7.1)$$

Em que: \mathbf{S}_0 e \mathbf{S}_1 são independentes de z e δ representa o Delta de Dirac.

Seja:

$$\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi} - \mathbf{S}_1 \delta(z - z_s) \quad (7.2)$$

É possível observar que $\mathbf{\Phi}_0$ satisfaz o sistema (4.1), já que:

$$\frac{d}{dz} \mathbf{\Phi}_0 = -i\omega \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_0 + (\mathbf{S}_0 - i\omega \mathbf{M} \mathbf{S}_1) \delta(z - z_s) \quad (7.3)$$

Sejam \mathbf{S}_A e \mathbf{S}_B vetores $n \times 1$ definidos por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{bmatrix} = i\omega \mathbf{M} \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0 \quad (7.4)$$

Uma fonte do tipo dinamite gera uma força na fase sólida e fluida dada pela Equação (7.5):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -h(\omega) \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (7.5)$$

Em que: $\mathbf{x}_s = (0, 0, z_s)^T$ corresponde à posição da fonte e $h(\omega)$ é o espectro do momento sísmico $H(t)$, o qual representa a função matemática da fonte.

Aplicando a transformada bidimensional de Fourier (4.3) em (7.5) e, em seguida, fazendo a rotação de acordo com (4.6), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{F}}(k_1, k_2, z) = \tilde{\mathbf{f}}(k_1, k_2, z) = -h(\omega) [ik\delta(z - z_s), 0, \delta'(z - z_s)]^T \quad (7.6)$$

Ao substituir (7.6) em (4.12) e utilizar a Equação (7.4) define-se para o sistema 1:

$$\mathbf{S}_A^{(1)} = i\beta_1 h(\omega) [\omega(C - M), 2kG(M - C), \omega(\lambda + 2G - C)]^T, e \quad (7.7)$$

$$\mathbf{S}_B^{(1)} = [0, 0, 0]^T \quad (7.8)$$

Enquanto que, de acordo com (4.15), os vetores da fonte para o sistema 2 são:

$$\mathbf{S}_A^{(2)} = 0, e \quad (7.9)$$

$$\mathbf{S}_B^{(2)} = 0 \quad (7.10)$$

É preciso analisar as condições de salto no local onde se encontra a fonte. Para isto, será considerada uma interface imaginária em z_s .

Integrando a equação (7.3) com valores bem próximos de z_s obtém-se a seguinte condição de salto para o local da fonte:

$$\mathbf{\Phi}(z_s^-) = \mathbf{\Phi}(z_s^+) + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Estabelecida esta condição, busca-se inicialmente encontrar a solução $\mathbf{\Psi}(z_s^+)$, ou seja, imediatamente abaixo da fonte e, em seguida, encontrar $\mathbf{\Psi}(z_s^-)$, que é a solução em um ponto localizado logo acima da posição da fonte.

Considere uma interface fictícia logo abaixo do local onde se encontra a fonte, ou seja, no ponto $z = z_s^+$. Como esta interface é fictícia, tem-se que $\mathbf{J}_A = \mathbf{I}$ e $\mathbf{J}_B = \mathbf{0}$.

Seja:

$$\mathbf{\Psi}(z_s^+) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(z_s^+) \\ \mathbf{D}(z_s^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

De acordo com (6.24), pode-se dizer que:

$$\Psi(z_s^+) = \begin{bmatrix} \Gamma_s \mathbf{D}_s \\ \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Em que: Γ_s é a matriz de reflexão na interface fictícia z_s^+ dada por:

$$\Gamma_s = \tilde{\Gamma}_{s+1} \quad (7.14)$$

Neste caso, tem-se que:

$$\tilde{\Gamma}_{s+1} = e^{i\omega\Lambda_s\Delta z_s} \Gamma_{s+1} e^{i\omega\Lambda_s\Delta z_s} \quad (7.15)$$

Em que: Γ_{s+1} é a matriz de reflexão da interface localizada logo após a posição da fonte, denotada por z_{s+1} , Λ_s é a matriz dos autovalores da camada onde se encontra a fonte e $\Delta z_s = z_{s+1} - z_s^+$.

Considerando a condição de salto (7.11), a expressão (5.4) e a solução (7.13), pode-se dizer que:

$$\Psi(z_s^-) = \begin{bmatrix} \Gamma_s \mathbf{D}_s \\ \mathbf{D}_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B \\ \mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Logo, as expressões (7.13) e (7.16) fornecem todos os valores de Φ justamente abaixo e acima da fonte, respectivamente.

A expressão (7.13) pode ser propagada para baixo de z_s^+ utilizando (6.4) e respeitando as condições de salto dadas em (6.13) e (6.14).

Analogamente, a expressão (7.16) pode ser propagada a partir de z_s^- para cima utilizando a solução no interior de cada camada (6.4) e respeitando as condições de salto (6.13) e (6.14). Porém, isto pode ser realizado até que se chegue um pouco abaixo da interface terra/ar, ou seja, em $z = 0^+$, em que, nesta posição, é necessário encontrar a solução. Para isto, admite-se nesta pesquisa que a fonte encontra-se localizada abaixo da interface terra/ar, ou seja, $0 < z_s < z_1$.

Como $z = 0^+$ está na mesma camada de z_s^- e, além disso, z_s^- está bem próximo de z_s , de acordo com (6.4) pode-se estabelecer que:

$$\Psi(0^+) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(-z_s)} \Psi(z_s^-) \quad (7.17)$$

Assim, substituindo (5.12) e (7.10) em (7.17), obtém-se:

$$\Psi(0^+) = \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s \\ e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \\ e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

As condições de fronteira na interface terra/ar serão utilizadas para encontrar as n incógnitas de \mathbf{D}_s . Para isto, são definidas:

$$\Phi(0^+) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A \Phi_g \\ \mathbf{G}_B \Phi_g \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Em que: Φ_g é um vetor $n \times 1$ formado por incógnitas em $z = 0$ e \mathbf{G}_A e \mathbf{G}_B são matrizes $n \times n$.

Assim, considerando os vetores com as variáveis do sistema 1 e do sistema 2 dados em (4.8), e também as condições de fronteira (3.3) para a superfície livre do meio, tem-se para o sistema 1:

$$\Phi_g^{(1)} = [\dot{u}_3, -\dot{w}_3, \dot{u}_1]_{z=0^+}^T \quad (7.20)$$

$$\mathbf{G}_A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

e

$$\mathbf{G}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Enquanto que, para o sistema 2:

$$\Phi_g^{(2)} = [\dot{u}_2]_{z=0^+}^T \quad (7.23)$$

$$\mathbf{G}_A^{(2)} = [1], e \quad (7.24)$$

$$\mathbf{G}_B^{(2)} = [0] \quad (7.25)$$

De (6.2) pode-se estabelecer que:

$$\Phi(0^+) = \mathbf{L}\Psi(0^+) \quad (7.26)$$

Substituindo (5.11), (7.18) e (7.19) em (7.26) obtém-se:

$$\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A \Phi_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s) + \frac{1}{2} [e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) + e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)], e \quad (7.27)$$

$$\mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B \Phi_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s - e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s) + \frac{1}{2} [e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) - e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \quad (7.28)$$

A partir das Equações (7.27) e (7.28), encontra-se as expressões para \mathbf{D}_s e Φ_g , as quais são dadas respectivamente por:

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) \Phi_g - \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B), e \quad (7.29)$$

$$\Phi_g = [e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) - (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B)]^{-1} \cdot e^{i\omega\Lambda z_s} [\Gamma_s (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) - (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \quad (7.30)$$

Depois de obter Φ_g , é possível determinar todas as condições iniciais em $z = 0$. Além disso, determina-se também \mathbf{D}_s e $\mathbf{U}_s = \Gamma_s \mathbf{D}_s$, obtendo então a solução imediatamente abaixo da fonte, de acordo com a expressão (7.13). Assim, o vetor solução Φ pode ser teoricamente calculado em qualquer outro lugar utilizando a propagação através das camadas, a partir de (6.4), e respeitando as condições de salto nas fronteiras entre as camadas de acordo com (6.13) e (6.14). Por outro lado, a propagação

de uma onda ascendente contínua no sentido descendente é numericamente instável usando (6.4) porque as exponenciais complexas crescem ao invés de diminuírem com a distância. Assim, deve-se obter \mathbf{U} a partir de \mathbf{D} usando $\mathbf{\Gamma}_m$ ou fazendo uso das matrizes de transmissão \mathbf{T}_m .

8 – SOLUÇÃO NO ESPAÇO ORIGINAL

As variáveis de $\mathbf{\Phi}^{(1)}$ e $\mathbf{\Phi}^{(2)}$ aparecem com \sim , ou seja, estas variáveis foram obtidas após sofrerem a rotação dada por Ω em (4.6). Assim, para retorná-las à notação com \wedge , deve-se aplicar uma rotação inversa, a qual é calculada pelas equações:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Omega^T \tilde{\mathbf{u}}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \Omega^T \tilde{\mathbf{w}}, \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \Omega^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}. \quad (8.1)$$

Os resultados obtidos são:

$$\hat{u}_1 = \frac{k_1}{k} \tilde{u}_1, \quad \hat{u}_2 = \frac{k_2}{k} \tilde{u}_1, \quad \hat{u}_3 = \tilde{u}_3 \quad (8.2)$$

$$\hat{w}_1 = \frac{k_1}{k} \tilde{w}_1, \quad \hat{w}_2 = \frac{k_2}{k} \tilde{w}_1, \quad \hat{w}_3 = \tilde{w}_3 \quad (8.3)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{11} &= \frac{k_1^2}{k^2} \tilde{\tau}_{11} + \frac{k_2^2}{k^2} \tilde{\tau}_{22}, & \hat{\tau}_{12} &= \frac{k_1 k_2}{k^2} (\tilde{\tau}_{11} - \tilde{\tau}_{22}) \\ \hat{\tau}_{22} &= \frac{k_2^2}{k^2} \tilde{\tau}_{11} + \frac{k_1^2}{k^2} \tilde{\tau}_{22}, & \hat{\tau}_{23} &= \frac{k_2}{k} \tilde{\tau}_{13} \\ \hat{\tau}_{13} &= \frac{k_1}{k} \tilde{\tau}_{13}, & \hat{\tau}_{33} &= \tilde{\tau}_{33} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Observa-se que as matrizes dos sistemas 1 e 2 dependem apenas da magnitude k do vetor $(k_1, k_2)^T$, e não de sua direção. Para qualquer função $\hat{g}(k)$, seja:

$$\begin{aligned} \Theta_{m_1, m_2} [\hat{g}(k)] &= \mathcal{F}^{-1} [k_1^{m_1} k_2^{m_2} \hat{g}(k)] \\ &= (-i)^{m_1 + m_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{m_2} \mathcal{F}^{-1} [\hat{g}(k)] \end{aligned} \quad (8.5)$$

A transformada de Hankel inversa é dada por

$$B_{m_1, m_2} [\hat{g}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^{m_1} J_{m_2}(kr) \hat{g}(k) dk \quad (8.6)$$

Em que: J_m é a função de Bessel e m_1 e m_2 são inteiros não negativos.

Fazendo uso das coordenadas cilíndricas estabelecidas pelas relações:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z \quad (8.7)$$

Pode-se obter correspondências entre a transformada bidimensional de Fourier inversa (4.5) e a transformada de Hankel (8.6), as quais são dadas por

$$\begin{aligned} \Theta_{0,0} &= B_{1,0}, & \Theta_{1,0} &= i \cos \theta B_{2,1}, & \Theta_{0,1} &= i \sin \theta B_{2,1} \\ \Theta_{1,1} &= \sin \theta \cos \theta \left[B_{3,0} - \frac{2}{r} B_{2,1} \right] \\ \Theta_{2,0} &= \cos^2 \theta B_{3,0} - \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r} B_{2,1} \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\Theta_{0,2} = \sin^2 \theta B_{3,0} + \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r} B_{2,1}$$

Logo, de acordo com (8.2), o vetor que representa a velocidade da fase sólida $\hat{\mathbf{u}}$ é dado por:

$$\hat{\mathbf{u}} = (i B_{1,1} [\hat{u}_1]) \mathbf{e}_r + (B_{1,0} [\hat{u}_3]) \mathbf{e}_z \quad (8.9)$$

Em que: \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_z são vetores unitários nas direções coordenadas r e z , respectivamente. Analogamente, conforme (8.3), tem-se:

$$\hat{\mathbf{w}} = (i B_{1,1} [\hat{w}_1]) \mathbf{e}_r + (B_{1,0} [\hat{w}_3]) \mathbf{e}_z \quad (8.10)$$

A partir de (8.4), as seguintes relações são obtidas

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \Theta_{2,0} \left[\frac{\tilde{\tau}_{11}}{k^2} \right] + \Theta_{0,2} \left[\frac{\tilde{\tau}_{22}}{k^2} \right], & \tau_{12} &= \Theta_{1,1} \left[\frac{\tilde{\tau}_{11} - \tilde{\tau}_{22}}{k^2} \right] \\ \tau_{22} &= \Theta_{0,2} \left[\frac{\tilde{\tau}_{11}}{k^2} \right] + \Theta_{2,0} \left[\frac{\tilde{\tau}_{22}}{k^2} \right], & \tau_{13} &= \Theta_{1,0} \left[\frac{\tilde{\tau}_{13}}{k} \right], \\ \tau_{23} &= \Theta_{0,1} \left[\frac{\tilde{\tau}_{13}}{k} \right], & \tau_{33} &= \Theta_{0,0} [\tilde{\tau}_{33}] \end{aligned} \quad (8.11)$$

Em que as igualdades acima podem ser calculadas a partir de (8.8).

Por último, tem-se que:

$$\mathbf{p} = B_{1,0} [\hat{\mathbf{p}}] \quad (8.12)$$

Observa-se que, fazendo uso da transformada de Hankel inversa, é possível obter a solução do problema no domínio original sem haver a necessidade de aplicar a rotação inversa, em que, para isto, são utilizadas as Equações (8.9) a (8.12).

Para obter a resposta no domínio do tempo t , é necessário aplicar às variáveis até agora encontradas, a transformada de Fourier inversa simples, a qual é dada por

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.13)$$

CONCLUSÕES

Por meio do método que foi desenvolvido neste trabalho é possível que seja criado um eficiente algoritmo computacional capaz de encontrar a solução das equações de Biot a partir de fórmulas explícitas.

O fato de ser este um método matricial o diferencia dos métodos convencionais e o torna mais simples do ponto de vista da implementação computacional.

Este método pode ser aplicado para investigar as relações entre a propagação de ondas sísmicas e as propriedades físicas do reservatório. Além disso, trata-se de um método efetivo para encontrar a solução de problemas inversos associados com a caracterização de parâmetros petrofísicos de reservatórios.

AGRADECIMENTOS

Agradecimento à CAPES, pela bolsa de estudos concedida durante o período do doutorado e ao Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo (LENEP/CCT/UENF), por ter propiciado as condições para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALLARD, J. F.; DEPOLLIER, C.; REBILLARD, P.; LAURIS, W.; COPS, A. Inhomogeneous Biot waves in layered media. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 66 (6), p. 2278-2284, 1989.
- BAIRD, G. E.; THOMAS, P. D.; SANG, G. The propagation of elastic waves through a layered poroelastic medium. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 99 (6), p.3385-3392, 1996.
<http://dx.doi.org/10.1121/1.414895>.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: I – Low-frequency range. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 28, p. 168-178, 1956a.
<http://dx.doi.org/10.1121/1.1908239>.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: II – Higher frequency range. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 28, p. 179-191, 1956b. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1908241>.
- BREKHOVSKIĖ, L. M. **Waves in Layered Media**. New York, Academic Press, 1960.
- CARCIONE, J. M. **Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media**. Handbook of Geophysical Exploration, Klaus Helbig and Sven Treitel (Editors), 2007.
- FAT'YANOV (1990)
- HASKELL, N. A. The dispersion of surface waves on multilayered media. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 43(1), p. 17-43, 1953.
- KUNETZ, G.; D'ERCEVILLE. Sur certaines propriétés d'une onde acoustique plane de compression dans un milieu stratifié. **Geophysics**, 18, p. 351-359, 1962.
- MOLOTKOV, L. A. **Matrix Method in the Theory of Waves Propagation in Layered Elastic and Fluid Media**. Nauka, Leningrad, Russia, 1984.
- MOLOTKOV, L. A. On the matrix method in the theory of wave propagation in layered porous Biot media. **Journal of Mathematical Sciences**, 111 (5), p.3737-3749, 2002.
<http://dx.doi.org/10.1023/A:1016398212462>.
<http://dx.doi.org/10.1023/A:1016350329301>.
<http://dx.doi.org/10.1023/A:1016346228392>.
- THOMSON, W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. **Journal of Applied Physics**, 21, p. 89-93, 1950. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1699629>.
- URSIN, B. Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media. **Geophysics**, 48, p. 1063-1081, 1983.
<http://dx.doi.org/10.1190/1.1441529>.