

ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS DE SETOR CIRCULAR

LAMINAR FLOW INSIDE CIRCULAR SECTOR DUCTS

Thiago Antonini Alves¹, Ricardo Alan Verdú Ramos², Cassio Roberto Macedo Maia³

¹Graduado, Mestre e Doutor em Engenharia Mecânica, Professor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Ponta Grossa, PR. E-mail: thiagoalves@utfpr.edu.br.

²Graduado, Mestre e Doutor em Engenharia Mecânica, Professor na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Câmpus Ilha Solteira, SP. E-mail: ramos@dem.feis.unesp.br.

³Graduado em Física, Mestre em Tecnologia Nuclear e Doutor em Engenharia Mecânica, Professor na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Câmpus Ilha Solteira, SP. E-mail: cassio@dem.feis.unesp.br.

RESUMO

O escoamento de fluidos no interior de dutos é de grande importância na engenharia, pois está presente na maioria dos equipamentos de aplicação residencial, comercial e industrial. Neste trabalho foi apresentada uma solução híbrida analítico-numérica do problema fluidodinâmico de escoamento laminar completamente desenvolvido em dutos de setor circular. Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno, uma Transformação Conforme foi utilizada. Feito isso, a Técnica da Transformada Integral Generalizada foi aplicada na equação do *momentum* para determinação do campo de velocidade. Os resultados numéricos foram obtidos para parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de *Fanning*, número de *Poiseuille*, fator de *Hagenbach* e comprimento de entrada fluidodinâmico. Os resultados foram comparados, quando possível, com aqueles disponíveis na literatura e apresentaram uma ótima concordância, com uma diferença inferior a 1,5%.

Palavras-chave: Transformada Integral, Transformação Conforme, Escoamento Laminar, Fluido *Newtoniano*, Setor Circular.

ABSTRACT

The fluid flow inside ducts is of great importance in engineering, because it is present in most domestic, commercial, and industrial application equipments. In this work was presented a hybrid analytical-numerical solution to hydrodynamic problem of fully developed laminar flow inside circular sector ducts. In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was used. Thereafter, the Generalized Integral Transform Technique was applied on the momentum equation to obtain the velocity field. Numerical results were obtained for quantities of practical interest, such as maximum and minimum velocity, Fanning friction factor, Poiseuille number, Hagenbach factor, and hydrodynamic entry length. The results were compared, as much as possible, with the parameter values available in the literature and they presented a great agreement, with a difference less than 1.5%.

Keywords: Integral Transform, Conformal Transform, Laminar Flow, Newtonian Fluid, Circular Sector.

1 – INTRODUÇÃO

O escoamento interno de fluidos em dutos representa uma classe de problemas de natureza difusiva elíptica de grande interesse na engenharia devido ao fato de estar presente em equipamentos de grande aplicação residencial, comercial e industrial. Diante deste cenário, os dutos de seção circular são amplamente utilizados pela sua simplicidade construtiva e pela facilidade de sua aplicação durante a concepção de um projeto de um determinado equipamento, como, por exemplo, em um trocador de calor compacto. Desta forma, inúmeros trabalhos e investigações relacionados a esta classe de problemas já foram realizados e uma vasta documentação é encontrada na literatura (KAKAÇ; SHAH; AUNG, 1998; BEJAN; KRAUS, 2003; WHITE, 2011). Por sua vez, o escoamento de fluidos em dutos que apresentam seção transversal de geometria não convencional encontra aplicações mais restritas, porém, do ponto de vista analítico-numérico, estes problemas sempre despertam grande atenção, devido a sua maior complexidade, a busca de soluções fomenta o

desenvolvimento de novas metodologias e a construção de novas ferramentas computacionais.

Neste contexto, o presente trabalho trata do problema fluidodinâmico relacionado ao escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos *Newtonianos* no interior de dutos de seção transversal com formato de um setor circular. Geralmente, problemas com essa geometria são resolvidos por meio da utilização do sistema de coordenadas cilíndricas. Entretanto, para facilitar o tratamento analítico, decidiu-se pela utilização de uma Transformação Conforme conveniente com o objetivo de transformar o domínio original em um retângulo no novo sistema de coordenadas. Além de facilitar a aplicação das condições de contorno, esta transformação permite escrever a equação diferencial do *momentum* de forma mais simples. Para a obtenção do perfil de velocidade do fluido optou-se pela aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT, do inglês, *Generalized Integral Transform Technique* (COTTA, 1998), pois, para este caso, a equação diferencial parcial que descreve a conservação do *momentum* é transformada em um sistema

de equações algébricas de fácil solução. Este procedimento vem permitindo a solução analítica de forma simples e elegante de problemas difusivos e difusivo-convectivos que apresentam geometrias relativamente complexas (MAIA, 2003; MAIA *et al.*, 2005; ANTONINI ALVES, 2006; MAIA; APARECIDO; MILANEZ, 2006; NAVEIRA-COTTA; COTTA; ORLANDE, 2010; SILVA *et al.*, 2011; SPHAIER, 2012; COTTA *et al.*, 2013, 2014; KNUPP; NAVEIRA-COTTA; COTTA, 2013a, 2013b, 2015; CHALHUB; SPHAIER; ALVES, 2013, 2014; SPHAIER; BARLETTA, 2014; ANTONINI ALVES *et al.*, 2014; ANTONINI ALVES; RAMOS; MAIA, 2014, 2015a, 2015b, 2016; PELEGRINI *et al.*, 2014a, 2014b; KNUPP *et al.*, 2015a, 2015b).

2 – PROCEDIMENTO HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Considera-se para o presente problema o escoamento laminar de fluidos no interior de dutos de seção transversal de setor circular conforme Figura 1. Desta forma, para fluidos *Newtonianos* com propriedades constantes, a equação do *momentum* pode ser escrita como

$$\rho \frac{D\mathbf{v}(x, y, z)}{Dt} = -\nabla p(x, y, z) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(x, y, z) \quad \{(x, y) \in \Omega, z > 0\} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{0}, \quad \{(x, y) \in \Gamma, z > 0\} \quad (2)$$

Em que: ρ representa a massa específica do fluido, μ a viscosidade dinâmica do fluido, p o campo de pressão, \mathbf{v} o campo vetorial de velocidades, Γ o contorno e Ω o domínio da geometria analisada.

Para escoamento completamente desenvolvido e em regime permanente, a equação do *momentum*, Equação (1) se reduz a:

$$\nabla^2 \mathbf{v}(x, y) - \frac{1}{\mu} \nabla p(z) = 0, \quad \{(x, y) \in \Omega, z > 0\} \quad (3)$$

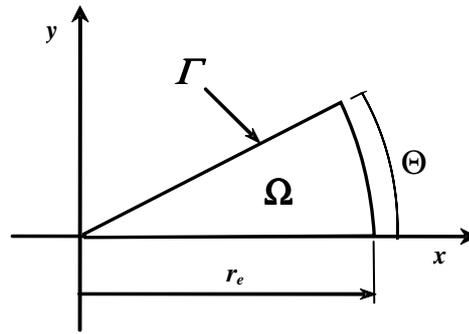
$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{0}, \quad \{(x, y) \in \Gamma, z > 0\} \quad (4)$$

Em que:

$$\mathbf{v}(x, y) = w(x, y) \mathbf{k} \quad (5)$$

$$\nabla p(z) = \frac{dp(z)}{dz} \mathbf{k} \quad (6)$$

Figura 1 – Geometria original do problema



2.1 Adimensionalização

Reescrevendo a equação do *momentum*, Equação (3), na forma adimensional tem-se que:

$$\frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} + 1 = 0, \quad \{(X, Y) \in \Omega\} \quad (7)$$

$$W(X, Y) = 0, \quad \{(X, Y) \in \Gamma\} \quad (8)$$

Com:

$$X = \frac{x}{D_h} \quad (9)$$

$$Y = \frac{y}{D_h} \quad (10)$$

$$Z = \frac{z}{D_h} \quad (11)$$

$$D_h = \frac{4A_s}{Per} \quad (12)$$

$$W(X, Y) = \frac{w(X, Y)}{\left[\frac{D_h}{\mu} \left(-\frac{dp(Z)}{dZ} \right) \right]} \quad (13)$$

Em que: D_h é o diâmetro hidráulico, A_s é a área da seção transversal, Per é o perímetro do contorno, w é a velocidade do fluido e W é a velocidade adimensional. Desta maneira, a equação do *momentum*, Equação (7), se apresenta na forma da equação de *Poisson* para o potencial $W(X, Y)$.

2.2 Transformação de Coordenadas

Para facilitar o tratamento analítico do problema proposto considere a seguinte Transformação Conforme,

$$\zeta = R_e e^{i\omega} \quad (14)$$

Em que: $R_e = r_e / D_h$, $R_i = r_i / D_h$, $\zeta = X + iY$ e $\omega = u + iv$. Esta relação permite transformar o domínio do setor circular no plano (X, Y) em um domínio retangular no

plano (u, v) conforme ilustrado na Figura 2. As relações de transformação de coordenadas são dadas por:

$$X = R_e e^{-v} \cos(u) \quad (15)$$

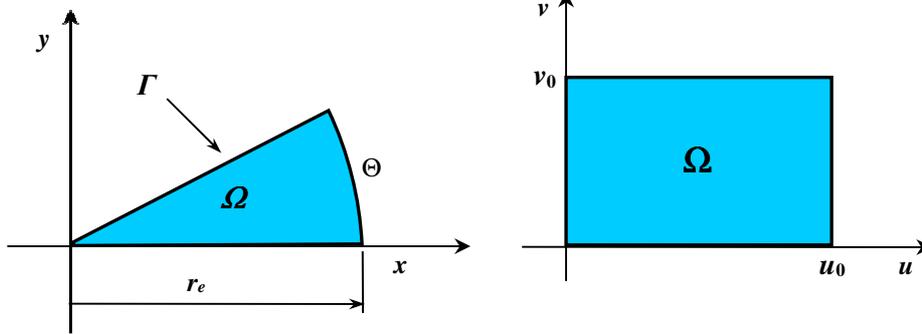
$$Y = R_e e^{-v} \sin(u) \quad (16)$$

$$Z = z \quad (17)$$

A transformação dada pela Equação (14) satisfaz as condições de *Cauchy-Riemann*. Portanto, os coeficientes métricos h_u, h_v e o *Jacobiano* $J(u, v)$ da transformação são expressos por:

$$h_u(u, v) = h_v(u, v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2} = R_e e^{-v} \quad (18)$$

Figura 2 – Transformação do domínio de setor circular no plano (X, Y) para o plano (u, v)



2.3 Aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

Para a obtenção da solução da equação do *momentum* no novo sistema de coordenadas aplica-se a GITT sobre a Equação (20). Para este fim escreve-se o potencial $W(u, v)$ em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, considere, *a priori*, o seguinte problema auxiliar de autovalor,

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0\} \quad (22)$$

Com:

$$\psi(0) = 0 \quad (23)$$

$$\psi(u_0) = 0 \quad (24)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas associados a este problema são dados, respectivamente, por:

$$\mu_i = \frac{i\pi}{u_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

$$\psi_i(u) = \sin(\mu_i u) \quad (26)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = R_e^2 e^{-2v} \quad (19)$$

Com essas novas variáveis definidas, a equação do *momentum*, transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 W(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W(u, v)}{\partial v^2} = H(u, v), \quad \{(u, v) \in \Omega\} \quad (20)$$

$$W(u, v) = 0, \quad \{(u, v) \in \Gamma\} \quad (21)$$

Com: $H(u, v) = -J(u, v)$.

As autofunções acima permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa

$$\bar{W}_i(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) W(u, v) du \quad (27)$$

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{W}_i(v) \quad (28)$$

Em que: $\bar{W}_i(v)$ é o potencial transformado em u e $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{\sqrt{N_i}} \quad (29)$$

Com:

$$N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \frac{u_0}{2} \quad (30)$$

Em que: N_i são as integrais de normalização das autofunções $\psi_i(u)$.

Efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação do *momentum* e fazendo uso das condições de contorno e das equações que definem

o problema auxiliar de autovalor obtém-se a primeira transformação da equação diferencial:

$$A_i(v) + \mu_i^2 \bar{W}_i(v) = \frac{\partial^2 \bar{W}_i(v)}{\partial v^2}, \quad i = 1, 2, 3... \quad (31)$$

$$A_i(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) H(u, v) du \quad (32)$$

Para proceder a transformação integral relativo à coordenada v , considera-se agora o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\} \quad (33)$$

Com

$$\phi(0) = 0 \quad (34)$$

$$\phi(v_0) = 0 \quad (35)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas para este novo problema são dadas por:

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{v_0}, \quad j = 1, 2, 3... \quad (36)$$

$$\phi_j(v) = \text{sen}(\lambda_j v) \quad (37)$$

As autofunções acima permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada inversa:

$$\bar{W}_{ij} = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_j(v) W(u, v) du dv \quad (38)$$

$$W(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \bar{W}_{ij} \quad (39)$$

Em que: $Z_j(v)$ são as autofunções normalizadas e são expressas por

$$Z_j(v) = \frac{\phi_j(v)}{\sqrt{M_j}} \quad (40)$$

$$M_j = \int_0^{v_0} \phi_j^2(v) dv = \frac{v_0}{2} \quad (41)$$

Em que: M_j são as integrais de normalização das autofunções.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_j(v)$ com a equação diferencial transformada em u e fazendo uso das condições de contorno e das relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor, obtém-se a transformação integral da equação do *momentum*:

$$B_{i,j} + (\mu_i^2 + \lambda_j^2) \bar{W}_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3... \quad (42)$$

$$B_{ij} = \int_0^{v_0} Z_j(v) A_i(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_j(v) H(u, v) du dv \quad (43)$$

Observa-se que os parâmetros B_{ij} são integráveis e que o sistema dado pela Equação (42) é algébrico, linear e desacoplado. Portanto, o potencial transformado pode ser obtido de forma direta,

$$\bar{W}_{ij} = -\frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} \quad (44)$$

O que permite, assim, a obtenção da solução analítica do potencial velocidade adimensional:

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \bar{W}_{ij} = -\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u) Z_j(v) \quad (45)$$

Para fins computacionais, o potencial transformado pode ser determinado numericamente quando a expansão é truncada em uma dada ordem $i = M$ e $j = N$. Portanto, utilizando-se da fórmula de inversão, determina-se o potencial velocidade adimensional é expresso por

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N K_i(u) Z_j(v) \bar{W}_{ij} = -\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u) Z_j(v) \quad (46)$$

Obviamente, quanto maior M e N maior será a precisão dos resultados.

Da definição da velocidade $W(u, v)$, determina-se, então, o campo de velocidade para o escoamento laminar completamente desenvolvido em dutos de setor circular.

2.4 Parâmetros Fluidodinâmicos de Interesse

Os parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de *Fanning*, número de *Poiseuille*, fator de *Hagenbach* e comprimento de entrada fluidodinâmico são definidos a seguir.

2.4.1 Velocidade Adimensional

A velocidade adimensional média é expressa por

$$W_{méd} = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} W(X, Y) dA_S = \frac{4}{A_S} \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} W(u, v) J(u, v) du dv \quad (47)$$

Em que: $A_s^* = A_s / D_h^2$ é a área da seção do duto de setor circular adimensionalizada.

Dessa forma, a velocidade adimensional $W^*(u,v)$ definida em termos da velocidade média, pode ser determinada por:

$$W^*(u,v) = \frac{w(u,v)}{w_{méd}} = \frac{W(u,v)}{W_{méd}} \quad (48)$$

Conseqüentemente, a velocidade adimensional máxima $W_{máx}^*$, definida em termos da velocidade média, é dada por:

$$W_{máx}^* = \frac{w_{máx}}{w_{méd}(X,Y)} = \frac{W_{máx}}{W_{méd}(X,Y)} \quad (49)$$

Em que: $w_{máx}$ e $W_{máx}$ são os valores máximos da velocidade e da velocidade adimensional, respectivamente.

2.4.2 Fator de Atrito de Fanning

O fator de atrito de Fanning, f , também conhecido como coeficiente de atrito, é definido por:

$$f = \frac{2 \tau_{p,méd}}{\rho w_{méd}^2} \quad (50)$$

$$\tau_{p,méd} = -\frac{dp}{dz} \left(\frac{A_s}{Per} \right) \quad (51)$$

Em que: $\tau_{p,méd}$ é a tensão de cisalhamento média na parede.

2.4.3 Número de Poiseuille

Para escoamento laminar completamente desenvolvido no interior de dutos o fator $f Re$ é igual a uma constante. Das relações de adimensionalização, obtém-se que

$$f Re = \frac{1}{2W_{méd}} \quad (52)$$

Em que: Re é o número de Reynolds definido em termos do diâmetro hidráulico. O fator $f Re$ é também conhecido como número de Poiseuille.

2.4.4 Fator de Hagenbach

O número do incremento na queda de pressão, ou fator de Hagenbach, $K(\infty)$, de acordo com Lundgren, Sparrow, Starr (1964) é definido como:

$$K(\infty) = \frac{2}{A_s} \int_{A_s} \left\{ \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^3 - \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^2 \right\} dA_s \quad (53)$$

ou,

$$K(\infty) = 2 \left[K_e(\infty) - K_d(\infty) \right] \quad (54)$$

Em que: $K_e(\infty)$ e $K_d(\infty)$, são respectivamente, o fator de correção de energia cinética e o fator de correção no fluxo do momentum, expressos por:

$$K_e(\infty) = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^3 dA_s \quad (55)$$

$$K_d(\infty) = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^2 dA_s \quad (56)$$

2.4.5 Comprimento de Entrada Fluidodinâmico

O comprimento de entrada hidrodinâmico, L_{hy} , é definido, com sendo a posição em que a velocidade máxima atinge 99% da velocidade correspondente à região fluidodinamicamente desenvolvida quando o escoamento de entrada é uniforme (SHAH; LONDON, 1978). O comprimento de entrada fluidodinâmico adimensional, de acordo com McComas (1967) pode ser expresso por:

$$L_{hy}^+ = \frac{L_{hy}}{D_h Re} = \frac{\left(W_{máx}^* \right)^2 - 1 - K(\infty)}{4 f Re} \quad (57)$$

3 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a obtenção dos resultados numéricos, o Método de Quadratura de Gauss foi utilizado para o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes B_{ij} e demais parâmetros físicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do Jacobiano nos pontos de quadratura. Feito isso, o sistema de equações algébrico, linear e desacoplado foi resolvido para a determinação dos coeficientes do potencial transformado fazendo uso da rotina DIVPAG da biblioteca IMSL Fortran (1994) e do truncamento da expansão dada pela Equação (46) para diversas ordens M e N .

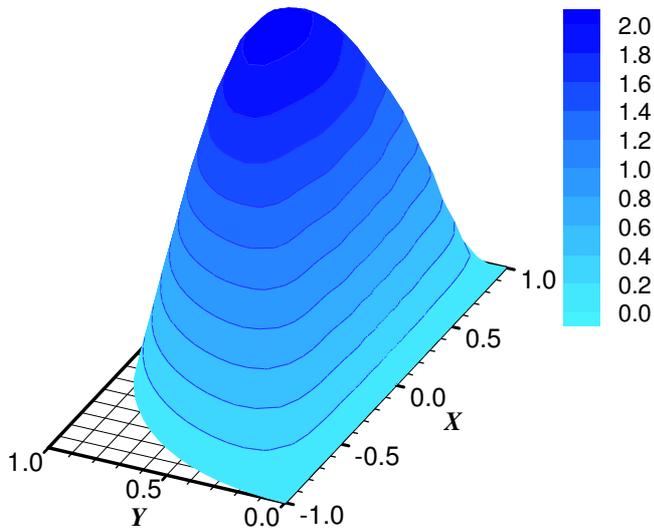
Foi verificado por meio de uma análise de convergência que com a utilização de até 150 termos na expansão da série em cada coordenada foi possível à obtenção de três casas decimais de precisão na região de convergência mais lenta ($5^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$), enquanto que nas demais regiões obtém-se a mesma precisão com uma ordem $N = M = 125$ de truncamento na série, ou menos.

O tempo de processamento gasto no cômputo dos parâmetros fluidodinâmicos de interesse foi pequeno, cerca de 5 a 10 segundos em um computador pessoal comum (processador de 3,6 GHz com 16 GB de memória RAM).

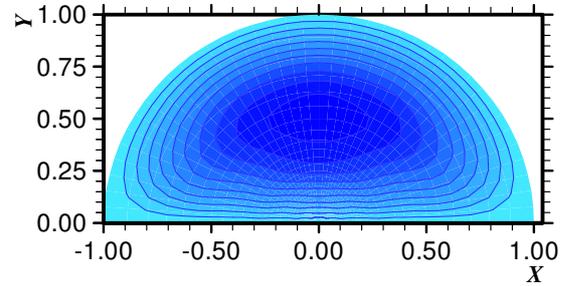
Na Figura 3 são ilustrados os perfis de velocidade e os mapas de isovelocidades do escoamento laminar de fluidos Newtonianos considerando configurações geométricas dos dutos de setor circular com ângulos Θ iguais a 180° , 270° e 360° . Como esperado, a velocidade do fluido é zero na parede do duto devido à condição de não-deslizamento e alcança seu valor máximo próximo ao centro.

Figura 3 – Perfis de velocidades para o escoamento em dutos de setores circulares

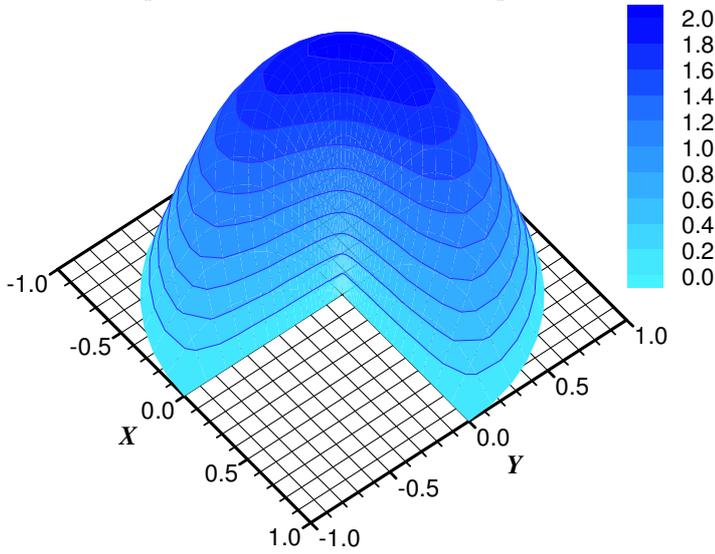
(a) perfil de velocidades tridimensional para $\Theta = 180^\circ$



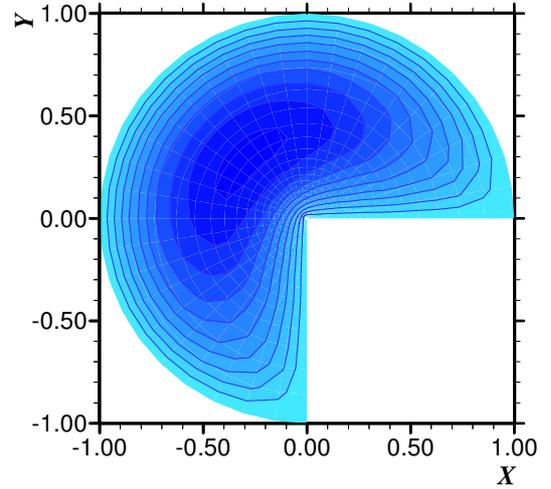
(b) mapa de isovelocidades para $\Theta = 180^\circ$



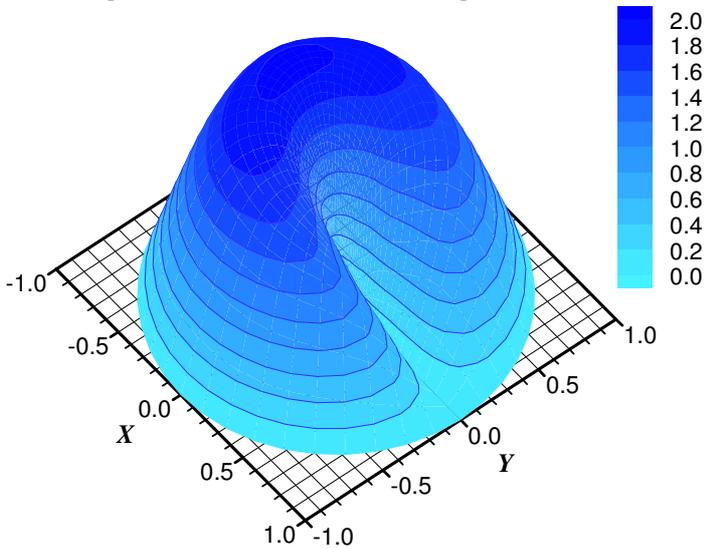
(c) perfil de velocidades tridimensional para $\Theta = 270^\circ$



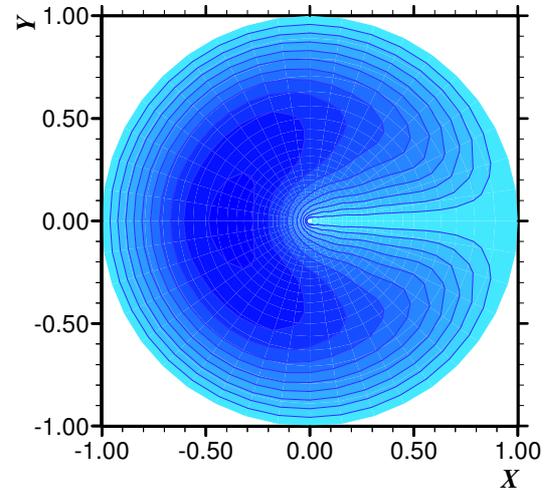
(d) mapa de isovelocidades para $\Theta = 270^\circ$



(e) perfil de velocidades tridimensional para $\Theta = 360^\circ$



(f) mapa de isovelocidades para $\Theta = 360^\circ$



Nas Figuras 4, 5, 6 e 7 são mostrados os comportamentos da velocidade máxima adimensional, do número de *Poiseuille*, do fator de *Hagenbach* e do comprimento de entrada fluidodinâmico adimensional, respectivamente, para as diversas configurações de setor circular analisadas.

Nota-se que os parâmetros fluidodinâmicos de interesse, com exceção do número de *Poiseuille*, diminuem com o aumento do ângulo Θ e que convergem para $W_{m\acute{a}x} = 2,05$; $fRe = 16,5$; $K(\infty) = 1,44$ e $L_{hy}^+ = 0,027$; quando o ângulo $\Theta \rightarrow 360^\circ$.

Os resultados numéricos encontrados para estes importantes parâmetros fluidodinâmicos são apresentados na Tabela 1.

Figura 4 – Velocidade adimensional máxima

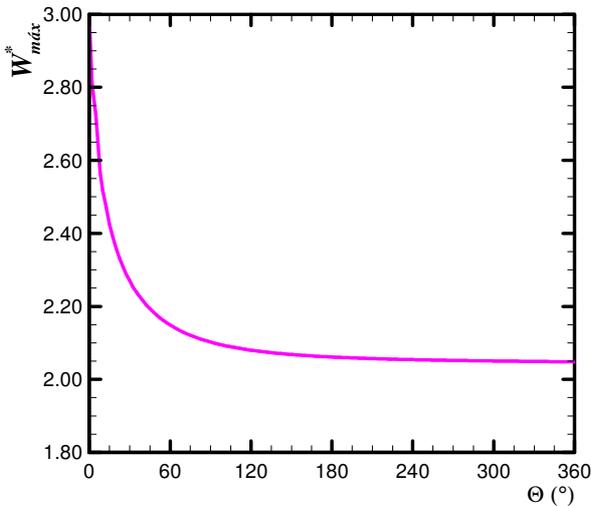


Figura 5 – Número de *Poiseuille*

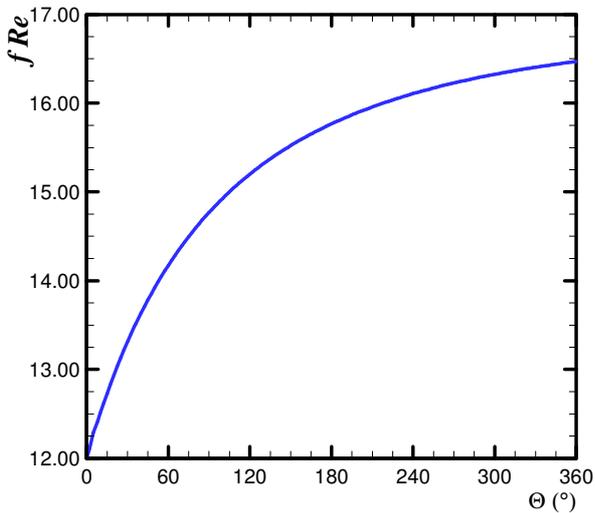


Figura 6 – Fator de *Hagenbach*

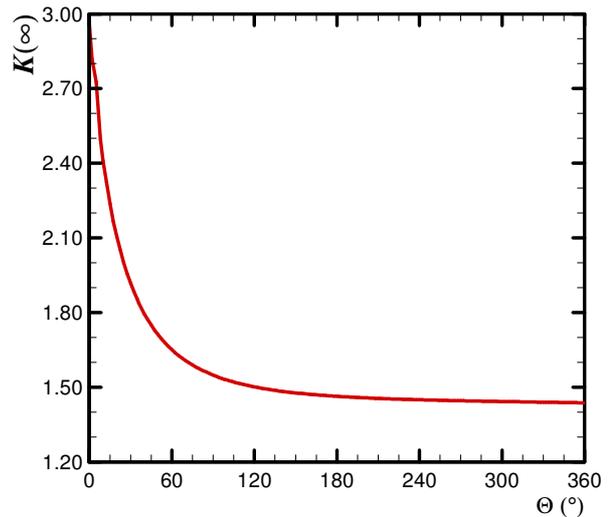


Figura 7 – Comprimento de entrada fluidodinâmico

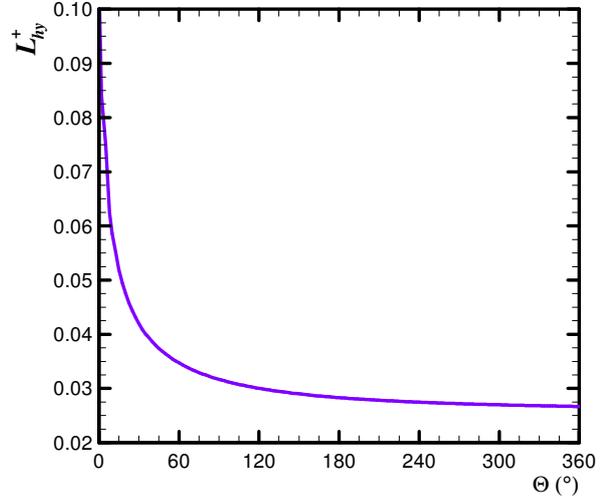


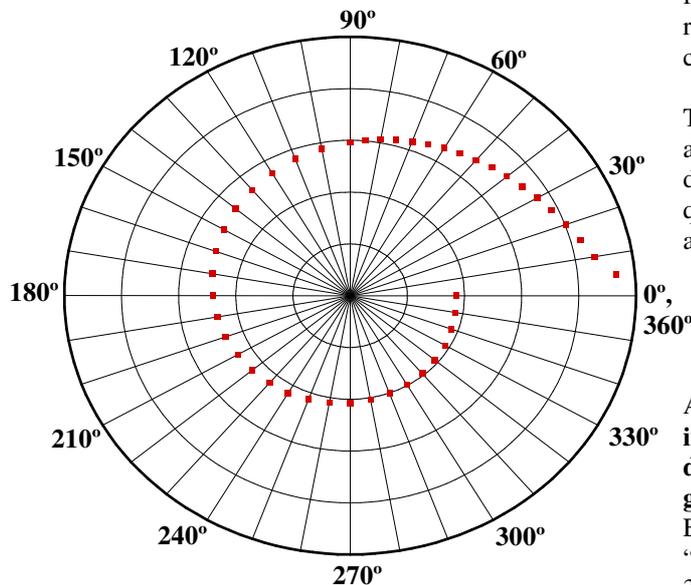
Tabela 1 – Parâmetros fluidodinâmicos de interesse

Θ	fRe	$W_{méd}$	$W_{m\acute{a}x}^*$	$r_{m\acute{a}x}$	$K(\infty)$	L_{hy}^+
0°	12,000	0,0417	3,000	-	2,971	0,1048
2°	12,107	0,0413	2,809	0,957	2,819	0,0841
5°	12,291	0,0407	2,723	0,934	2,726	0,0751
8°	12,410	0,0403	2,568	0,887	2,496	0,0624
10°	12,504	0,0400	2,518	0,870	2,411	0,0586
15°	12,728	0,0393	2,425	0,833	2,238	0,0519
20°	12,936	0,0387	2,359	0,803	2,105	0,0475
25°	13,130	0,0381	2,309	0,778	2,001	0,0444
30°	13,310	0,0376	2,270	0,755	1,918	0,0420
35°	13,482	0,0371	2,239	0,735	1,852	0,0400
40°	13,635	0,0367	2,214	0,717	1,795	0,0386
45°	13,782	0,0363	2,193	0,700	1,749	0,0374
50°	13,920	0,0359	2,176	0,685	1,711	0,0364
55°	14,050	0,0356	2,162	0,671	1,678	0,0355
60°	14,171	0,0353	2,149	0,658	1,651	0,0347
65°	14,286	0,0350	2,138	0,646	1,627	0,0340
70°	14,394	0,0347	2,129	0,634	1,607	0,0335
75°	14,496	0,0345	2,121	0,623	1,589	0,0329
80°	14,592	0,0343	2,114	0,613	1,574	0,0325
85°	14,684	0,0341	2,108	0,604	1,561	0,0320
90°	14,769	0,0339	2,102	0,594	1,548	0,0317
100°	14,928	0,0335	2,093	0,577	1,529	0,0310

110°	15,071	0,0332	2,086	0,562	1,513	0,0305
120°	15,200	0,0329	2,080	0,547	1,501	0,0300
130°	15,318	0,0326	2,075	0,534	1,491	0,0296
140°	15,425	0,0324	2,072	0,522	1,483	0,0293
150°	15,522	0,0322	2,068	0,510	1,477	0,0290
160°	15,611	0,0320	2,066	0,500	1,472	0,0287
170°	15,692	0,0319	2,063	0,490	1,467	0,0285
180°	15,767	0,0317	2,061	0,480	1,463	0,0283
190°	15,836	0,0316	2,060	0,471	1,460	0,0281
200°	15,899	0,0315	2,058	0,463	1,457	0,0280
210°	15,957	0,0313	2,057	0,455	1,455	0,0278
220°	16,011	0,0312	2,056	0,447	1,453	0,0277
230°	16,061	0,0311	2,055	0,440	1,451	0,0276
240°	16,108	0,0310	2,054	0,433	1,449	0,0275
250°	16,150	0,0310	2,053	0,426	1,448	0,0274
260°	16,191	0,0309	2,053	0,420	1,447	0,0273
270°	16,228	0,0308	2,052	0,414	1,445	0,0272
280°	16,262	0,0308	2,052	0,409	1,445	0,0271
290°	16,295	0,0307	2,051	0,403	1,443	0,0271
300°	16,325	0,0306	2,051	0,398	1,442	0,0270
310°	16,353	0,0306	2,050	0,392	1,442	0,0269
320°	16,380	0,0305	2,050	0,388	1,440	0,0269
330°	16,405	0,0305	2,049	0,383	1,440	0,0268
340°	16,428	0,0304	2,049	0,378	1,439	0,0268
350°	16,450	0,0304	2,049	0,374	1,438	0,0267
360°	16,470	0,0304	2,048	0,370	1,437	0,0267

Na Figura 8 é ilustrada a localização da velocidade máxima adimensional ($r_{máx}$) para escoamento laminar de fluidos *Newtonianos* em dutos de seção transversal de setor circular. Quando maior o ângulo Θ mais próximo do centro estará localizada a velocidade máxima.

Figura 8 – Localização da velocidade máxima adimensional



Os resultados numéricos encontrados para os parâmetros fluidodinâmicos foram comparados, quando possível, com resultados os apresentados em Eckert, Irvine (1956), Eckert, Irvine, Yen (1958), Sparrow, Haji-Sheikh (1965), Chiranjivi, Vidyandhi (1973), Shah, London (1978), Lei, Trupp (1989), Ben-Ali, Soliman, Zariffah

(1989), Etemad, Bakhtiari (1999) e Lin, Wang, Tao (2000) e apresentaram uma ótima concordância, apresentando uma diferença entre eles inferior a 1,5%.

Constata-se, ainda, que para $\Theta \leq 20^\circ$ os resultados encontrados para os parâmetros fluidodinâmicos do escoamento laminar em dutos de setores circulares se aproximam dos resultados apresentados por Shah (1975) para o escoamento em dutos de formato de triângulo isósceles com os mesmos ângulos.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi demonstrada a solução híbrida analítico-numérica do problema fluidodinâmico de escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos *Newtonianos* em dutos de setor circular utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT. Para o desenvolvimento analítico foi utilizado um sistema de coordenadas obtido por meio de uma Transformação Conforme apropriado, capaz de representar a geometria do duto em um domínio com contorno de formato retangular. Com este procedimento o novo sistema de coordenadas, além de facilitar a aplicação das condições de contorno, permitiu escrever a equação do *momentum* na forma de uma equação de *Poisson*, a qual foi resolvida por meio da GITT. Como consequência, um sistema de equações algébricas infinito e desacoplado foi obtido para os potenciais transformados que foi resolvido numericamente truncando-se a expansão do potencial velocidade em um número finito de termos. Os parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de *Fanning*, número de *Poiseuille*, fator de *Hagenbach* e comprimento de entrada fluidodinâmico foram calculados e comparados, quando possível com os resultados disponíveis na literatura, para dutos de configurações geométricas no formato de setor circular.

Finalmente, observa-se que a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) está sendo aplicada com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos multidimensionais, os quais, muitas vezes, não admitem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

REFERÊNCIAS

- ANTONINI ALVES, T. **Aplicação da transformada integral na solução de uma classe de problemas difusivos e difusivo-convectivos em domínios de geometria não convencionais**. Dissertação (Mestrado) em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, SP, Brasil, 2006, 360 p.
- ANTONINI ALVES, T.; PELEGRINI, M. F.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Limiting power of nuclear fuel cells with variable sources, **International Journal of Science and Advanced Technology**, v. 4, p. 7-15, 2014.
- ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Laminar flow of Newtonian fluids in concentric annular

- ducts, **Revista Ciências Exatas e Naturais (Impresso)**, v. 16, p. 285-305, 2014.
- ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Escoamento Laminar em Dutos de Setor de Anel Circular, **Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica**, v. 19, p. 3-15, 2015a.
- ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Uma solução híbrida analítico numérica para o escoamento laminar em dutos bicônicos, **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas (Online)**, v. 36, p. 119-132, 2015b. <http://dx.doi.org/10.5433/1679-0375.2015v36n2p119>.
- ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Aplicação da transformada integral generalizada e da transformação conforme na solução de um problema de convecção forçada laminar em dutos de setor de anel circular, **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 32, 2016.
- BEJAN, A.; KRAUS, A. D. **Heat Transfer Handbook**, Hoboken: John Wiley & Sons, 2003, 1496 p.
- BEN-ALI, T. M.; SOLIMAN, H. M.; ZARIFFEH, E. K. Further results for laminar heat transfer in annular sector and circular sector ducts, **Journal of Heat Transfer**, v. 111, p. 1090-1093, 1989. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3250774>.
- CHALHUB, D. J. M. N.; SPHAIER, L. A.; ALVES, L. S. B. Integral transform solution of convective heat transfer problems using upwind approximations, **Numerical Heat Transfer, Part B, Fundamentals**, v. 63, p. 167-187, 2013.
- CHALHUB, D. J. M. N.; SPHAIER, L. A.; ALVES, L. S. B. Integral transform analysis of Poisson problems that occur in discrete solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, **Journal of Physics, Conference Series (Online)**, v. 547, p. 12-40, 2014. <http://dx.doi.org/10.1080/10407790.2013.740398>.
- CHIRANJIVI, C.; VIDYANIDHI, V. Heat transfer in wedge-shaped ducts. **Indian Chemical Engineer**, v. 15, p. 49-51, 1973.
- COTTA, R. M. **The integral transform method in thermal and fluids science and engineering**. New York: Begell House Inc., 1998, 430 p.
- COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; SPHAIER, L. A.; QUARESMA, J. N. N. Unified integral transforms algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems, **Numerical Heat Transfer, Part A, Applications**, v. 63, p. 840-866, 2013. <http://dx.doi.org/10.1080/10407782.2013.756763>.
- COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; SPHAIER, L. A.; QUARESMA, J. N. N. The unified integral transforms (UNIT) algorithm with total and partial transformation, **Computational Thermal Sciences: An International Journal**, v. 6, p. 507-524, 2014.
- ECKERT, E. R. G.; IRVINE, T. F. Flow in corners of passages with noncircular cross sections. **Journal of Heat Transfer**, v. 78, p. 709-718, 1956.
- ECKERT, E. R. G.; IRVINE JR.; T. F.; YEN, J. T. Local laminar heat transfer on wedge-shaped passages. **Journal of Heat Transfer**, v. 80, p. 1433-1438, 1958.
- ETEMAD, S. G.; BAKHTIARI, F. General equations for fully developed fluid flow and heat transfer characteristics in complex geometries, **International Communication of Heat and Mass Transfer**, v. 26, n. 2, p. 229-238, 1999. [http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933\(99\)00009-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0735-1933(99)00009-3).
- IMSL Math/Library, **Visual Numerics**, Edition 10, Version 2.0, Houston, TX-77042, 1994.
- KAKAÇ, S.; SHAH, R. K.; AUNG, W. **Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer**, New York: John Wiley, 1998, 1.238 p.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Conjugated convection-conduction analysis in microchannels with axial diffusion effects and a single domain formulation, **Journal of Heat Transfer**, v. 135, p. 91-108, 2013a. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4024425>.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Heat transfer in microchannels with upstream-downstream regions coupling and wall conjugation effects, **Numerical Heat Transfer, Part B, Fundamentals**, v. 64, p. 365-387, 2013b. <http://dx.doi.org/10.1080/10407790.2013.810535>.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Fluid flow and conjugated heat transfer in arbitrarily shaped channels via single domain formulation and integral transforms, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 82, p. 479-489, 2015. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.11.007>.
- KNUPP, D. C.; COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; KAKAÇ, S. Transient conjugated heat transfer in microchannels: integral transforms with single domain formulation, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 88, p. 248-257, 2015a. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.04.017>.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; REFER, A.; TIWARI, M.; COTTA, R. M.; POULIKAKOS, D. Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques, **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 25, p. 1444-1462, 2015b. <http://dx.doi.org/10.1108/HFF-08-2014-0259>.
- LEI, Q. M.; TRUPP, A. C. Maximum velocity location and pressure drop of fully developed laminar flow in circular sector ducts, **Journal of Heat Transfer**, v. 111, p. 1085-1087, 1989. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3250772>.
- LIN, M. J.; WANG, Q. W.; TAO, W. Q. Developing laminar flow and heat transfer in annular-sector ducts, **Heat Transfer Engineering**, v. 21, p. 53-61, 2000. <http://dx.doi.org/10.1080/014576300271022>.
- LUNDGREN, T. S., SPARROW, E. M.; STARR, J. B. Pressure drop due to the entrance region in ducts of arbitrary cross section. **Journal of Basic Engineering**, v. 86, p. 620-626, 1964. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3653186>.
- MAIA, C. R. M. **Solução de Problemas Difusivos e Difusivos-Convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada**. Tese (Doutorado) em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, SP, 2003, 251 p.
- MAIA, C. R. M.; APARECIDO, J. B.; MILANEZ, L. F. Heat transfer in laminar flow of non-newtonian fluids in ducts of elliptical cross section, **International Journal of**

- Thermal Sciences**, v. 45, p. 1066-1072, 2006.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.02.001>.
- MAIA, C. R. M.; RAMOS, R. A. V.; PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T. Heat transfer study in slug flow on elliptical ducts cross section by generalized integral transform technique, **Thermal Engineering**, v. 4, p. 154-163, 2005.
- McCOMAS, S. T. Hydrodynamic entrance lengths for ducts of arbitrary cross section. **Journal of Basic Engineering**, v. 89, p. 847-850, 1967.
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3609717>
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3609713>.
- NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M.; ORLANDE, H. R. B. Inverse analysis of forced convection in micro-channels with slip flow via integral transforms and bayesian inference, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 49, p. 879-888, 2010.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.12.009>.
- PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T.; NISHIDA, F. B.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Hybrid analytical-numerical analysis of SAE 4150 alloy steel rods cooling, **Advanced Materials Research**, v. 1082, p. 187-190, 2014a.
<http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1082.187>.
- PELEGRINI, M. F.; ANTONINI ALVES, T.; RAMOS, R. A. V.; MAIA, C. R. M. Transient heat diffusion problems with variable thermal properties solved by generalized integral transform technique, **International Review of Mechanical Engineering (Testo Stampato)**, v. 8, p. 931-940, 2014b.
- SHAH, R. K. Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 18, p. 849-862, 1975. [http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(75\)90176-3](http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(75)90176-3).
- SHAH, R. K.; LONDON, A. L. **Laminar flow forced convection in ducts**. Advances in Heat Transfer, Supplement 1. New York: Academic Press Inc., 1978, 477 p.
- SILVA, R. L. E.; SANTOS, C. A. C.; QUARESMA, J. N. N.; COTTA, R. M. Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts, **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 21, p. 219-243, 2011.
<http://dx.doi.org/10.1108/09615531111105416>.
- SPARROW, E. M.; HAJI-SHEIKH, A. Laminar heat transfer and pressure drop in isosceles triangular, right triangular and circular sector ducts. **Journal of Heat Transfer**, v. 87, p. 426-427, 1965.
<http://dx.doi.org/10.1115/1.3689131>.
- SPHAIER, L. A. Integral transform solution for heat transfer in parallel-plates micro-channels: combined electroosmotic and pressure driven flows with isothermal walls, **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 39, p. 769-775, 2012.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.05.010>.
- SPHAIER, L. A.; BARLETTA, A. Unstable mixed convection in a heated horizontal porous channel, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 78, p. 77-89, 2014.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2013.12.002>.
- WHITE, F. **Viscous Fluid Flow**, New York: McGraw-Hill, 2011, 652 p.