

## INFLUÊNCIA DO MODELO DE FISSURAÇÃO NA MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

*INFLUENCE OF CRACKING MODELS ON NUMERICAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAM*

**Thiago Mendonça Pacheco<sup>1</sup>, José Mário Feitosa Lima<sup>2</sup>, Paulo Roberto Lopes Lima<sup>3</sup>**

Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Feira de Santana, BA, Brasil

<sup>1</sup>E-mail: thiago.ecivil@hotmail.com

<sup>2</sup>E-mail: lima.jmf@gmail.com

<sup>3</sup>E-mail: lima.prl.uefs@gmail.com

### RESUMO

O concreto é um material muito versátil e de larga utilização na construção civil. A avaliação do seu comportamento não linear físico, porém, ainda é um dos grandes desafios da engenharia estrutural. Neste trabalho foram investigados três métodos de fissuração distribuída do concreto utilizados para modelagem numérica de vigas de concreto armado: fixo, rotacional e multidirecional. Para validação dos métodos foram modeladas numericamente vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963) e Álvares (1993) utilizando o programa computacional DIANA. Foi verificado, que para vigas com falhas por flexão, todos os três modelos apresentaram bons resultados com capacidade para prever o caminho de equilíbrio. Para vigas que rompem por cisalhamento, no entanto, não foi possível encontrar soluções aceitáveis com o modelo fixo de fissuração, enquanto que, com o modelo rotacional de fissuração foi obtida grande instabilidade numérica para determinar o caminho de equilíbrio logo após o surgimento da fissura diagonal.

**Palavras-Chave:** viga de concreto armado; modelos de fissuração; método dos elementos finitos.

### ABSTRACT

The concrete is an outstanding material with vast utilization in the civil construction area. The determination of nonlinear behavior of concrete is still a major challenge in structural engineering. In this study there were investigated three smeared cracking models used for numerical modeling of reinforced concrete beam: fixed, rotational and multidirectional. In order to validate the models, three experimental samples studied by Bresler & Scordelis (1963) and Álvares (1993) were selected and modeled using the software DIANA. The results indicated that the three adopted smeared crack models performed well and were capable of predicting the equilibrium path. However, to beams with shear rupture it was impossible to find acceptable solutions for the fixed model, whereas with the rotational model it was obtained major numerical instability in order to determine the equilibrium path after materializing the diagonal cracking.

**Keywords:** reinforced concrete beams; smeared cracking models; finite element method.

### 1 – INTRODUÇÃO

A fissuração é um processo inerente às estruturas de concreto armado, devido à menor resistência do concreto a tensões de tração. Verifica-se a formação de microfissuras na interface pasta – agregado mesmo antes da aplicação de cargas, devido ao efeito da retração. Com a colocação da estrutura em serviço, acontece a propagação dessas fissuras que induzem a uma fissuração generalizada nas regiões onde as tensões superam a resistência à tração do material.

Apesar das normas de dimensionamento estrutural desprezarem a contribuição do concreto fissurado na determinação da carga de ruptura de elementos de concreto armado sob flexão, tem-se verificado que o concreto entre fissuras afeta a rigidez e a forma de ruptura, e contribui para a ductilidade das vigas de concreto armado (LIMA *et al.*, 2003). Devido a isso, os métodos numéricos de análise de estruturas de concreto armado incorporam em sua formulação diversos modelos para consideração da fissuração do concreto (ZHANG *et*

*al.*, 2007; SANCHES; VENTURINI, 2007; RADI NETO, 2007).

As duas abordagens mais importantes para avaliação da formação e propagação de fissuras no concreto, utilizando o método dos elementos finitos, consideram ou a abertura de uma fissura única (forma discreta) ou o surgimento de uma fissuração generalizada (ACI 446.3R-97, 1997). A propagação de uma fissura discreta em um material frágil caracteriza-se pelo deslizamento das faces da fissura introduzindo uma descontinuidade física que limita a aplicação da Mecânica do Contínuo para análise estrutural desse material. O modelo numérico de fissuração discreta foi inicialmente proposto por Ngo e Scordelis (1967) e representava a fissura como uma descontinuidade geométrica, que era modelada por meio da separação entre os bordos do elemento finito por meio da introdução de duas molas. De acordo com Rots e Blaauwendraad (1989) esse modelo apresenta dois inconvenientes: i) implica em uma contínua mudança na conectividade nodal; ii) induz a fissura a seguir um caminho predefinido acompanhando os bordos do elemento finito.

A contrapartida ao modelo de fissuração discreta é o modelo de fissuração distribuída, em que um sólido fissurado é imaginado como um contínuo. Introduzido por Rashid (1968), esse modelo parte do princípio de que a fissuração pode ser representada pela alteração do comportamento tensão-deformação do elemento fissurado, o que traz as vantagens de não necessitar de mudança na topologia da malha de elemento finito original e não impor restrições quanto à orientação dos planos de fissuração. Dessa forma, a essência da modelagem da fissuração distribuída é a criação de áreas fissuradas pela modificação das propriedades de rigidez nos pontos de Gauss relevantes, ou seja, nos pontos usados na integração numérica na geração das matrizes de rigidez e para o cálculo das forças residuais (KOTSOVOS; PAVLOVIC, 1995). No entanto, este modelo clássico de fissuração distribuída apresentava algumas desvantagens, como a sua sensibilidade ao tamanho do elemento finito utilizado na modelagem do elemento estrutural que o tornou inapropriado para modelagem de alguns tipos de estruturas (ACI, 1997) e motivou avanços no desenvolvimento do modelo, com a incorporação do conceito de banda de fissuração (BAZANT; OH, 1983) e a possibilidade de variação da direção da fissura.

Atualmente, os modelos de fissuração distribuída podem ser classificados em fissuração fixa, em que a direção da fissuração é fixada na entrada de dados e mantida constante, e fissuração rotacional, que permite que a orientação da fissura modifique com o eixo de deformação principal. Uma opção intermediária entre as duas classes é o modelo de fissuração distribuída multidirecional fixa. Apesar da utilização dos modelos de fissuração distribuídas na análise de diversas estruturas de concreto armado (MENIN *et al.*, 2009) poucos estudos (SAGASETA; VOLLUM, 2009) tem comparado numericamente os resultados obtidos por cada uma dessas classes de modelo.

Neste trabalho, os modelos de fissuração distribuída foram comparados entre si ao se analisar vigas de concreto armado submetidas ao ensaio de flexão e que apresentaram ruptura por flexão ou por cisalhamento. A análise numérica foi implementada no programa computacional comercial DIANA, já utilizado por outros autores para avaliação da fissuração do concreto (TABATABAI; MOSALAM, 2000; LIMA, 2009; MENIN *et al.*, 2009). Os resultados numéricos foram comparados com os resultados experimentais obtidos por Bresler e Scordelis (1963) e por Álvares (1993).

## 2 – MODELOS DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

No primeiro modelo de fissuração distribuída a rigidez do concreto fissurado na direção da fissura (ortogonal à face da fissura) e a rigidez transversal eram desprezadas, o que não corresponde às investigações experimentais que demonstraram que o concreto armado desenvolve mecanismos que permitem ao concreto fissurado apresentar certa resistência ao cisalhamento, que diminui durante o processo de fissuração (BARROS, 1995).

A consideração destes mecanismos fez com que o modelo de fissuração distribuída passasse a considerar o concreto fissurado pela seguinte lei constitutiva.

$$\begin{bmatrix} d\sigma_m \\ d\sigma_n \\ d\sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu E_c & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_m \\ d\varepsilon_n \\ d\varepsilon_t \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro negativo associado a perda de resistência à tração (amolecimento), após a fissuração, na direção normal à fissura.  $\beta$  é o fator de retenção de cisalhamento do concreto fissurado, e que varia de 0 a 1.

$E_c$  e  $G_c$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente, do concreto integro. Na equação (1) "n" é a direção principal normal à fissura e "t" a direção tangencial a mesma.

Com a incorporação do conceito de banda de fissuração, a formulação associada ao fenômeno de amolecimento passa a ser caracterizada por três elementos: energia de fratura correspondente ao modo I, resistência à tração uniaxial e largura da banda de fissuração.

Outro fator primordial na caracterização dos modelos de fissuração distribuída é a orientação da fissura, que permite classificá-los em três tipos básicos, descritos a seguir.

### 2.1 Modelo Fixo

Nesse modelo é assumido que, assim que a tensão principal exceder um valor limite, uma fissura deve surgir com uma direção fixa o que ocasionará um desalinhamento da direção das tensões principais com as deformações principais. Só será criada uma nova fissura se a tensão principal tiver um ângulo de 90° com a fissura inicial.

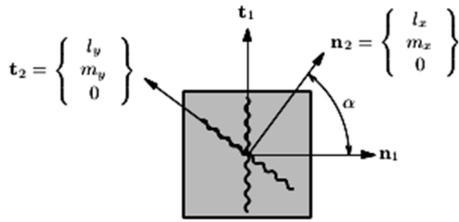
### 2.2 Modelo Rotacional

Para o modelo rotacional assume-se que deverá iniciar uma fissura assim que a tensão limite de resistência à tração do material for atingida. Entretanto, diferente do modelo fixo, a fissura iniciada mudará sua direção, acompanhando a direção da tensão principal, eliminando as deformações por cisalhamento. Por isso, para o modelo rotacional o DIANA (2002) assume que o valor da retenção ao cisalhamento  $\beta$  é igual a 1.

### 2.3 Modelo Multidirecional

As premissas deste modelo para o DIANA (2002) são: poderá haver ângulo de inclinação entre as tensões principais e as deformações principais e, várias fissuras podem existir em um ponto de estudo respeitando um determinado ângulo limite  $\alpha$ , como mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Modelo multidirecional de fissuração distribuída



(fonte: DIANA, 2012)

Para o surgimento da fissura seguem-se dois critérios: o primeiro é a tensão principal exceder a tensão limite estabelecida; e o segundo é o ângulo limite ser vencido. Deve-se notar que após o surgimento da primeira fissura, Rots (1988) constatou que, enquanto o ângulo limite não é vencido, a tensão pode atingir valores até três vezes maior que o valor limite.

### 3 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

O comportamento do concreto armado sob tração pode ser modelado utilizando o modelo de amolecimento não-linear proposto por Hordijk (1991), conforme Equação 2.

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\epsilon_{nn}^{cr})}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}}\right)^3\right) \exp\left(c_2 \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) \dots \\ - \frac{\epsilon_{nn}^{cr}}{\epsilon_{nn,ult}^{cr}} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \text{ se } 0 < \epsilon_{nn}^{cr} < \epsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 \text{ se } \epsilon_{nn,ult}^{cr} < \epsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (2)$$

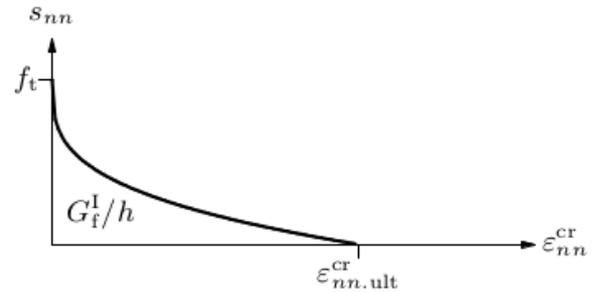
Em que:  $\sigma_{nn}^{cr}$  é a tensão de fissuração;  $\epsilon_{nn}^{cr}$  é a deformação correspondente a tensão de fissuração;  $f_t$  é a resistência a tração e  $\epsilon_{nn,ult}^{cr}$  é a deformação última do material correspondente a uma tensão igual a zero (ver Figura 2). Os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  são constantes experimentais.

O modelo é relacionado com o modo I de energia de fratura  $G_f$  por meio do comprimento da banda de fissuração, denotada como  $h$ , como mostrado na Figura 2.

Adotando os parâmetros  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 6,93$ , definidos experimentalmente por Reinhardt *et al.* (1986), a deformação última do concreto fissurado é calculada pela Equação (3), com  $\alpha = 0,195$ .

$$\epsilon_{nn,ult}^{cr} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{G_f^I}{h f_t} \quad (3)$$

Figura 2 – Modelo de Hordijk utilizado (DIANA, 2002)



Para o concreto sob compressão, o modelo elastoplástico perfeito com critério de von Mises foi utilizado.

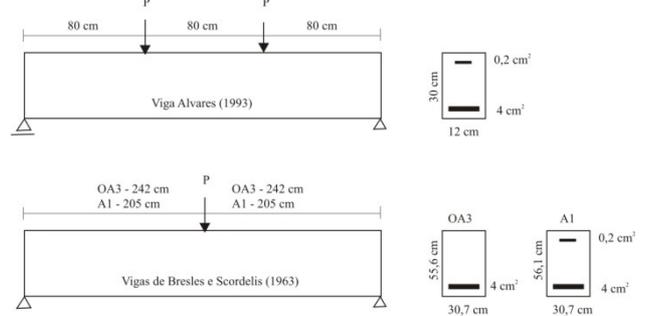
Para a consideração do cisalhamento foi aplicado o valor de 0,2 para a retenção ao cisalhamento  $\beta$ , como indicam Bazant e Oh (1983).

### 4 – DADOS EXPERIMENTAIS

As características geométricas, seção transversal e comprimento das vigas, bem como a disposição das armaduras para cada viga analisada estão apresentadas na Figura 3.

Os dados das características do concreto utilizados para o modelo constitutivo estão descritos na Tabela 1 que utilizou dados experimentais fornecidos pelos autores e dados estimados por meio de equações de correlação da NBR:6118 (ABNT NBR:6118, 2007), para  $E_c$  e  $f_{ct}$ , e do MC 90 (CEB-FIP MC90, 1991) para  $G_f$ .

Figura 3 – Dados geométricos das vigas analisadas



Para a viga proposta por Álvares (1993) o aço utilizado nas armaduras tinha módulo de elasticidade ( $E_s$ ) de 196 GPa e foi estimada uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) de 500 MPa. Para as vigas propostas por Bresler e Scordelis (1963) o aço da região inferior das vigas possuía  $E_s = 218 \text{ GPa}$  e  $f_y = 555 \text{ MPa}$  e para a região superior  $E_s = 190 \text{ GPa}$  e  $f_y = 325 \text{ MPa}$ .

Tabela 1 – Dados característicos do concreto para modelo numérico no DIANA®

Propriedade	Viga		
	normalmente armada*	Viga OA 3**	Viga A 1**
$f_{ck}$ (MPa)	26,77	37,60	24,10
Dmax (mm)	12	20	20
$E_{ci}$ (MPa)	28974,25	34338,55	27491,38
$f_{ctm}$ (MPa)	2,68	3,37	2,50
$f_{ctk,min}$ (MPa)	1,88	2,36	1,75
$f_{ctk,max}$ (MPa)	3,49	4,38	3,25
$\nu$	0,2	0,2	0,2
$G_f$ (N.mm/mm <sup>2</sup> )	41,66	61,36	54,58
h (mm)	10,6	19,6	19,6

\*Álvares (1993)

\*\*Bresler e Scordelis, 1963

## 5 – MODELO NUMÉRICO

Foi utilizado o elemento CU8 CQ16M, de 8 nós, quadrilátero isoparamétrico em estado plano de tensão. É baseado em uma interpolação quadrática e integração de Gauss. Segundo DIANA (2012), é indicado o uso deste tipo de elemento para análise não linear física de vigas com discretização em relação à altura. O elemento finito foi dimensionado com lado de 30 mm ao longo do comprimento e lado 15 mm ao longo da altura da viga. A armadura de aço da viga foi modelada com a utilização de elementos de barras embebidas na malha de elementos finitos de concreto.

A obtenção da solução foi por meio de incremento de carga, e processo iterativo de Newton-Raphson regular (controle de carga) com *arc-length*. Para o critério de convergência utilizou-se a norma dos deslocamentos com tolerância de  $10^{-2}$ . O valor de P (carga aplicada em cada terço médio) foi de 10000 N, utilizando um incremento de carga de 0,1 N e um ângulo limite (*threshold angle*) para abertura de nova fissura, no modelo multidirecional, de 45 graus.

Como forma de comparação, em todos os modelos o fator de retenção de cisalhamento  $\beta$  foi mantido constante ao longo da análise, apesar do DIANA permitir o comportamento não linear.

## 6 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

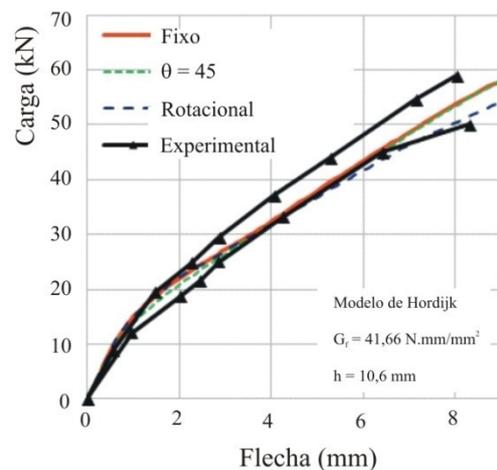
Para avaliação da potencialidade dos modelos foram investigadas vigas que apresentaram, experimentalmente, ruptura por flexão e vigas que apresentaram ruptura por cisalhamento. A fissuração destes dois tipos de vigas, antes da ruptura, acontecem de maneira diferenciada e dessa forma é importante observar como a modelagem numérica da orientação e abertura da fissura pode influenciar no comportamento carga-deslocamento.

### 6.1 Resultados para viga com falha a flexão

Para avaliação deste tipo de viga foi utilizado o resultado experimental apresentado por Álvares (1993), cuja viga possuía taxa de armadura normalmente armada, ou seja, cuja ruptura em termos de dimensionamento acontece simultaneamente por escoamento da armadura e esmagamento do concreto sob compressão. Nos experimentos de Álvares (1993), todas as vigas falharam por flexão com muito pouca interferência do cisalhamento.

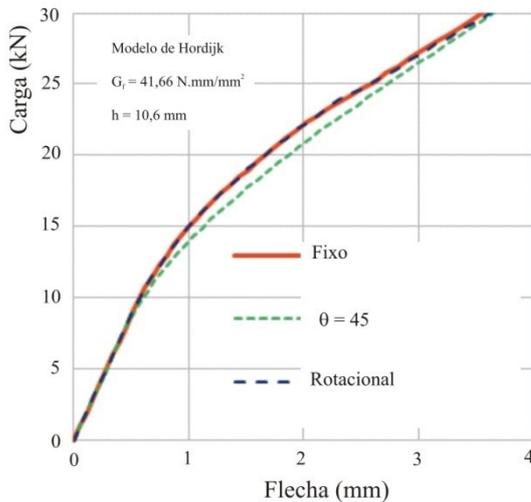
Na Figura 4 são apresentados os resultados numéricos obtidos e a comparação com o resultado experimental. Todos os modelos apresentaram boa aproximação com os resultados experimentais.

Figura 4 – Modelagem de viga normalmente armada (Álvares, 1993) utilizado modelos fixo, multidirecional ( $\theta = 45$ ) e rotacional



Na comparação entre os modelos numéricos pode-se notar, na Figura 5, que os modelos fixo e rotacional apresentam o mesmo resultado numérico para o trecho inicial da curva carga-deslocamento. Isso se justifica pelas características da estrutura, que apresenta pouca variação entre a direção das deformações e tensões principais.

Figura 5 – Comparação entre modelos numéricos



No modelo multidirecional, apesar da similaridade com os demais modelos na fase linear elástica, é verificado, no entanto, que a não linearidade da curva devida à primeira fissura do concreto acontece para uma carga menor que a dos demais modelos. Este modelo prevê a introdução da fissura quando a tensão limite for alcançada e a fissura é perpendicular à tensão principal. Entretanto, após a criação da fissura esta terá uma direção fixa. A menos que a tensão principal varie a 90 graus da direção da fissura pré-existente, a fissura continuará a abrir na direção inicial. Dessa forma, o modelo de fissuração fixa é o limite superior para os modelos de fissuração distribuída presentes no DIANA.

Na parte final da curva carga-deslocamento os modelos fixo e multidirecional apresentam similaridade. Para o modelo de fissuração rotacional verifica-se uma redução de rigidez, com relação aos demais modelos. Por superestimar a propagação da fissura, o modelo rotacional subestima a rigidez não linear física dos elementos estruturais, assim apresentando uma menor rigidez na parte final, próximo ao estado limite último da viga de concreto armado. No modelo de fissuração rotacional após a inserção da fissura, esta acompanha sempre a direção da tensão principal, reposicionando a direção da fissura, o que não acontece no experimental. Esse modelo é o limite inferior nos modelos de fissuração distribuída.

Observa-se que todos os modelos se mantiveram dentro do espectro do experimental apresentado por Álvares (1993), pois captaram bem o início de fissuração, o limite de plastificação das armaduras, e os limites de deformação. Com isso pode-se afirmar que todos os modelos de fissuração, para o modelo estrutural testado, comportaram-se bem, produzindo resultados satisfatórios para análise de uma estrutura com falha por flexão.

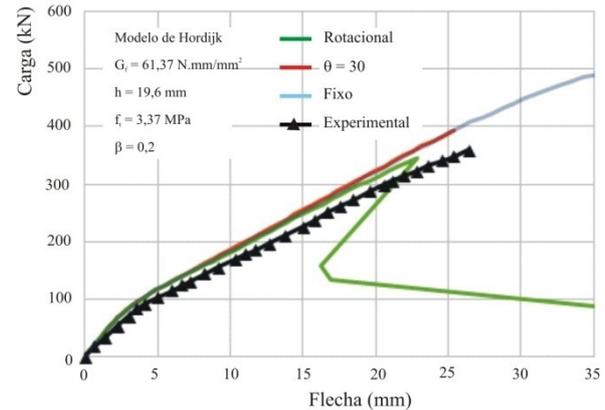
## 6.2 Resultados para vigas com falha ao cisalhamento

Para avaliação da ruptura por cisalhamento de vigas sob flexão foram modeladas numericamente as vigas OA-3 e

A-1 ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

A comparação entre os modelos numéricos e o resultado experimental para a viga OA-3, mostrada na Figura 6, demonstra que o comportamento carga-deslocamento de todos os modelos numéricos apresentou uma rigidez para a viga um pouco maior que o verificado experimentalmente, conforme se observa para níveis de carregamento elevados. Resultado similar foi observado por Matzenbacher *et al.* (2010).

Figura 6 – Comparativo entre viga experimental OA-3 (Bresler e Scordelis, 1963) e modelos numéricos



Os modelos numéricos apresentaram similaridade entre si até deslocamentos da ordem de 15,0 mm, após os quais verifica-se que o modelo de fissuração rotacional apresenta uma redução de rigidez da curva carga-deslocamento e uma queda brusca de resistência a um deslocamento igual a 22,9 mm, que corresponde à falha por cisalhamento.

O modelo rotacional apresenta equações mais simples, portanto mais estável numericamente. Além disso, nesse modelo a energia de fratura não apresenta queda brusca, como o modelo multidirecional, o que deve ter contribuído para detecção de forma mais clara da perda de rigidez após a falha. Comparando com o resultado experimental, verifica-se um erro de 4,1% na previsão da carga de ruptura e de 13,2% na previsão do deslocamento correspondente.

O modelo de fissuração multidirecional tem como principal diferença variar a direção das fissuras com a direção principal, entretanto, sob um ângulo limite, que por padrão o DIANA estabelece igual a 60°. Outra vantagem do modelo é que a nova fissura não sobrepõe à fissura anterior, podendo ser criada no mesmo ponto de integração várias fissuras com direções diferentes. Isso faz o modelo se aproximar mais do fenômeno real de fissuração. O modelo, bem calibrado, tem vantagem quando se analisa a previsão da carga última, a deformação de pico e última, bem como o padrão de fissuração.

O modelo de fissuração multidirecional captou com precisão satisfatória a deformação onde ocorreu a falha e obteve ótima concordância com o padrão de fissuração, identificando o surgimento da fissura diagonal e sua propagação e abertura, que levou ao colapso. Comparando com o resultado experimental esse modelo

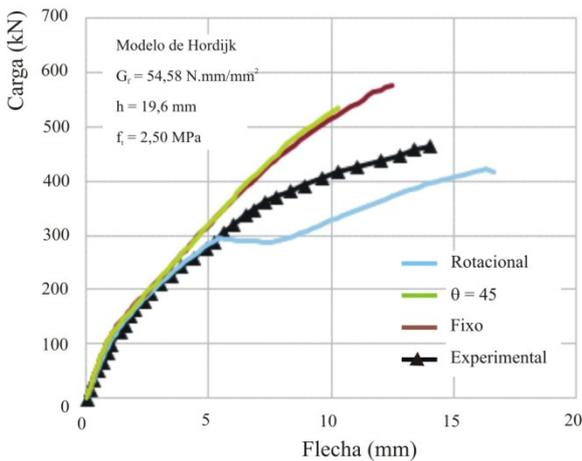
apresentou erro de 15,3% na previsão da carga de ruptura e de 2,2% na previsão do deslocamento correspondente.

Uma deficiência no modelo apresentado no DIANA é o fato de que os mecanismos de suporte ao cisalhamento, para concreto fissurado, apenas podem ser representados no modelo multidirecional pela retenção ao cisalhamento, total e por um valor constante sem que seja possível o uso de funções não lineares, como há no modelo fixo de fissuração distribuída. Dessa forma, o modelo não consegue captar a queda brusca de rigidez provocada por uma falha ao cisalhamento, diferente do modelo rotacional que, desconsidera completamente a interação do modo II na redução da energia devido à fratura.

O modelo de fissuração fixa mostrou-se bom até o surgimento da fissuração diagonal que, para estruturas sem estribos se propagará sem controle levando ao colapso. Todavia, o modelo de fissuração fixa não captou para esse estágio de carregamento a propagação e abertura da fissura diagonal, ignorando que a falha por cisalhamento em OA-3 ocorreu, e portanto prevendo apenas a falha por flexão.

A modelagem numérica da viga A-1 é apresentada na Figura 7, em comparação com o experimental. Os modelos fixo e multidirecional apresentam comportamento similar, diferenciando nos valores de carga e deslocamento de ruptura. Foram identificados erros da ordem de até 22% na carga e até 27% no deslocamento. Entretanto, a ruptura ocorreu pela falha à flexão, pois, no último ponto de equilíbrio as armaduras já estavam plastificadas e o concreto tinha atingido a deformação de 3,6‰ caracterizando o esmagamento. Portanto, mesmo identificando a fissura diagonal o modelo prevê falha por flexão no domínio 3.

Figura 7 – Comparação entre viga experimental A-1 (Bresler e Scordelis, 1963) e modelos numéricos



Para o modelo multidirecional foi verificada uma similaridade no padrão de fissuração experimental (Figura 8). A fissura diagonal é identificada e, como há armaduras, ela se propaga até reduzir a dimensão da biela comprimida, que entra em plastificação, conforme Figura 9. A deformação máxima para o último passo de carga de 2,2 ‰ ainda é distante da deformação característica de

esmagamento, 3,5 ‰, demonstrando que a ruptura não acontece por esmagamento do concreto comprimido.

Figura 8 – Padrão de fissuração para modelo multidirecional (1) fissuras primárias (2) fissuras secundárias

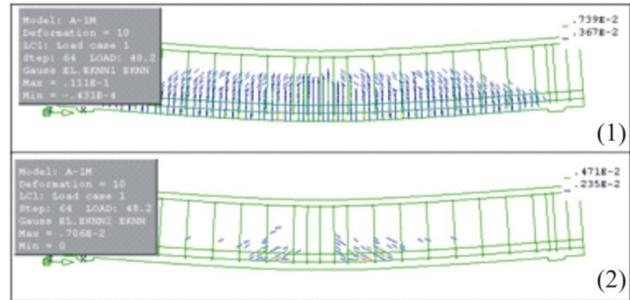
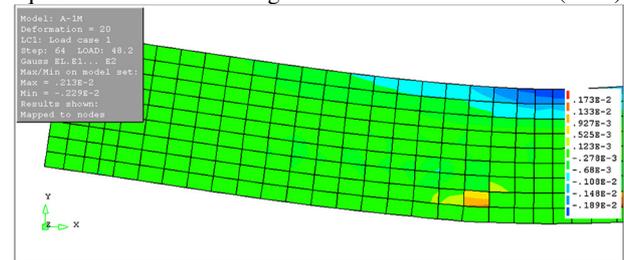


Figura 9 – Deformação principal 2 para o último ponto de equilíbrio do modelo da viga A-1 de Bresler e Scordelis (1963)



Por sua vez, o modelo rotacional também capta a fissura diagonal. Entretanto, as rotações dos eixos principais desestabilizam logo após o surgimento da mesma e começam a girar de forma incontrolável, degradando assim a resposta numérica.

## CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos verificou-se que os modelos numéricos de fissuração distribuídas, fixo, rotacional e multidirecional, conseguem reproduzir de forma aceitável o comportamento carga-deslocamento de vigas de concreto armado normalmente armadas, ou seja, que apresentam, na flexão, ruptura por escoamento da armadura e esmagamento. Todos os modelos se mantiveram dentro do espectro do resultado experimental, pois captaram bem o início de fissuração, o limite de plastificação das armaduras, e os limites de deformação.

Para a previsão do comportamento de vigas de concreto armado que apresentam ruptura por cisalhamento, no entanto, verificou-se que os modelos apresentam dificuldade em determinar a carga e/ou deslocamento de ruptura, apesar do modelo multidirecional conseguir simular de forma satisfatória o padrão de fissuração da viga quando da sua ruptura.

## AGRADECIMENTOS

À SECTI/FAPESB e ao CNPq (PPP 010/2010) pelo apoio financeiro à pesquisa, e à CAPES pela bolsa de estudos (Mestrado) destinada ao primeiro autor deste

trabalho.

## REFERÊNCIAS

ACI COMMITTEE 446. **ACI 446.3R-97**: Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures: State-of-the-Art. 1997

ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos**. São Paulo. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1993.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 2007.

BARROS, J. A. O. **Comportamento do betão reforçado com fibras: Análise experimental e simulação numérica**. Porto. Tese (Doutorado), Universidade do Porto, 1995.

BAZANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures**, v. 16, p. 155-177, 1983.

BRESLER, B.; SCORDELIS, A. C. Shear strength of reinforced concrete beams. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 60, n. 1, p. 51-72, 1963.

COMMITTEE EURO-INTERNATIONAL DU BETON (CEB); FEDERATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎTE (FIP). **Model Code 1990**: Design code, Lausanne: Thomas Telford Services Ltd. 1991.

DIANA. **User's Manual**, 2012.

HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**, Dissertation (Doctoral), Delft University of Technology, 1991.

KOTSOVOS, M. D.; PAVLOVIC, M. **Structural concrete: Finite-element analysis for limit-state design**. Thomas Telford, 1995.  
<https://doi.org/10.1680/scfafld.20276>.

LIMA, J. C. A. **Modelagem computacional de placas de matriz cimentícia reforçadas com fibras de sisal**. Feira de Santana. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Feira de Santana, 2009.

LIMA, P. R. L.; FONTES, C. M. A.; LIMA, J. M. F. Análise não-linear da deflexão de vigas de concreto armado. **Sitientibus**, n. 28, p. 91-108, 2003.

MATZENBACHER, C. W.; CAMPOS FILHO, A.; PACHECO, A. R. Análise da ruptura por flexão e corte de vigas de concreto armado através do método dos elementos finitos. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 9973-9996, 2010.

MENIN, R. C. G.; TRAUTWEIN, L. M.; BITTENCOURT, T. N. Smearred crack models for reinforced concrete beams by finite element method. **IBRACON Structures and Materials Journal**, v. 2, n. 2, p. 166-200, 2009. <https://doi.org/10.1590/s1983-41952009000200004>.

MOSTOFINEJAD, D.; TALAEITABA, S. B. Nonlinear Modeling of RC Beams Subjected to Torsion using the

Smearred Crack Model. **Procedia Engineering**, v. 14, p. 1447–1454, 2011.

<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.182>.

NGO, D.; SCORDELIS, A. C., Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. **ACI JOURNAL**, v. 64, n. 3, p. 152-163, 1967.

NILSON, A. H., **Finite Element Analysis of Reinforced Concrete**. Berkeley. Dissertation (PhD), Dept. of Civil Engineering of University of California, 1967.

RADI NETO, J. **Simulação numérica do comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. Uberlândia. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

RADIN E.; LOTFI, V. Comparison of non-orthogonal smearred crack and plasticity models for dynamic analysis of concrete arch dams. **Computers and Structures**, v. 81, p. 1461-1474, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00083-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00083-X).

RASHID, Y. R. Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels, **Nuclear Engineering and Design**, v. 7, p. 334-344, 1968.  
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(68\)90066-6](https://doi.org/10.1016/0029-5493(68)90066-6).

REINHARDT, H. W.; CORNELISSEN, H. A. W.; HORDIJK, D. A. Tensile Tests and Failure Analysis of Concrete, **Journal of Structural Engineering (ASCE)**, v. 112, n. 11, p. 2462–2477, 1986.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1986\)112:11\(2462\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:11(2462)).

ROTS, J. **Computational modelling of concrete fracture**. Delft. Dissertation (PhD), Delft University of Technology, 1988.

ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. Crack models for concrete: Discrete or smearred, fixed, multi-directional or rotating, **Heron**, v. 34, n. 1, p. 1-59, 1989.

SANCHES, F. J.; VENTURINI, W. S. Damage modeling of reinforced concrete beams. **Advances in Engineering Software**, v. 38, p. 538-546, 2007.  
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2006.08.025>.

SAGASETA, J.; VOLLUM, R. L. Non-linear finite element analysis of shear critical high strength concrete beams, **ACEE**, v. 2, p. 95-106, 2009.

TABATABAI, S. M.; MOSALAM, K. M. Computational platform for non-linear analysis/optimal design of reinforced structures. **Engineering Computations**, v. 18, n. 5/6, p. 726-743, 2001.  
<https://doi.org/10.1108/EUM0000000005785>.

VECCHIO, F. J.; SHIM, W. Experimental and Analytical Reexamination of Classical beam Tests. **Journal of Structural Engineering**, v. 130, n. 3, p. 460-469, 2004.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2004\)130:3\(460\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:3(460)).

ZHANG, Y. X.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A layered shear-flexural plate/shell element using Timoshenko beam functions for nonlinear analysis of reinforced concrete plates. **Finite elements in analyses and design**, v. 43, p. 888-900, 2007.  
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.05.002>.