

ANÁLISE ESTRUTURAL UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE CONCRETO ARMADO REFORÇADA COM PRFC

ONE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAM STRENGTHENED WITH CFRP

Luiz Antonio Farani de Souza

Professor Adjunto da Universidade Federal da Fronteira Sul. Avenida Jacob Reinaldo Haupenthal, 1580, Cerro Largo, RS.
CEP: 97900-000. Telefone: (55) 3359-3950
E-mail: lafarani@yahoo.com.br

RESUMO

Na atualidade, a necessidade de reabilitação estrutural tem se tornado cada vez mais frequente. Diversos métodos de reabilitação, desde o advento do concreto, vêm sendo desenvolvidos e aplicados. Como alternativa aos métodos tradicionais de reforço surgiram, recentemente, os polímeros reforçados com fibras, usualmente de carbono (PRFC), denominados materiais compósitos avançados. As vantagens desse material de reforço em relação aos tradicionais são a sua alta resistência e rigidez específica, além de ótima resistência à fadiga e facilidade de aplicação. O objetivo deste estudo é a modelagem unidimensional, por meio do Método dos Elementos Finitos, de vigas biapoiadas de concreto armado sem e com reforço, encontradas na literatura. Os comportamentos mecânicos do concreto e do aço são descritos por modelos constitutivos baseados na teoria da Mecânica do Dano Contínuo, e o PRFC é simulado por um modelo elástico linear. As análises não lineares são efetuadas considerando o método de Comprimento de Arco com o processo iterativo tipo Newton – Raphson. A partir da comparação dos resultados numéricos com os experimentais, a modelagem proposta apresenta potencialidade na análise de estruturas de concreto armado reforçadas com PRFC devido a sua reduzida complexidade e baixo custo computacional.

Palavras-chave: Mecânica do Dano, Concreto, Viga, PRFC.

ABSTRACT

Currently, the need for structural rehabilitation has become ever more frequent. Several rehabilitation methods have been developed and applied since the concrete genesis. As an alternative to traditional methods, a new conception of advanced composite materials for strengthening structures has emerged recently. These composite materials are usually made of carbon fiber reinforced polymer (CFRP). The advantages of such materials as compared to the traditional ones are their high specific strength and stiffness, high corrosion and fatigue resistance, besides the ease to apply. The aim of this study is the one-dimensional modeling, through the Finite Element Method, of reinforced concrete bi-supported beams with and without reinforcement, found in the literature. The mechanical behaviors of concrete and steel are described by constitutive models based on the Continuum Damage Mechanics theory, and CFRP is simulated by a linear elastic model. The nonlinear analyzes are performed using the Arc Length method with Newton – Raphson iterative procedure. From the comparison between the numerical and experimental results, the proposed modeling has potentiality in the analysis of reinforced concrete structures with CFRP, due to its reduced complexity and low computational cost.

Keywords: Damage Mechanics, Concrete, Beam, CFRP.

1 – INTRODUÇÃO

O sistema polimérico estruturado com fibra de carbono se destaca entre todas as fibras sintéticas possíveis de serem utilizadas no reforço estrutural. A grande força de ligação entre os átomos de carbono, associada a sua leveza, faz desse compósito um material altamente promissor. Denominado de Polímero Reforçado com Fibra de Carbono – PRFC, ele pode ser encontrado em forma de mantas, tecidos, barras e laminados. É indicado para qualquer elemento estrutural em que é exigido pouco peso, elevada resistência à tração e corrosão, e necessidade de resistência à fadiga.

Modelos constitutivos que acoplam mais de uma teoria para a representação dos fenômenos relacionados ao comportamento do concreto apresentam formulações quase sempre complexas. No entanto, ao buscar diminuir o grau

de complexidade, mas, ainda, levando-se em conta na sua formulação o acoplamento de efeitos e, por consequência, de teorias, grande destaque tem sido dado aos chamados modelos constitutivos simplificados (ÁLVARES, 1993).

A utilização de materiais compósitos no reforço e recuperação de estruturas de concreto armado é tema de grande interesse na atualidade. Segundo Pavan, Creus, Oliveira (2005), o reforço é necessário para adequar a estrutura a condições de uso diferentes daquelas para as quais foi projetada. A recuperação está relacionada a situações em que, devido à deterioração da estrutura, deve-se restituir sua capacidade de carga original para que a mesma continue atendendo às exigências de projeto.

Neste artigo foram feitas duas análises estruturais unidimensionais, por meio do Método dos Elementos Finitos, de vigas biapoiadas de concreto armado sem e com

reforço à flexão (PRFC). As simulações computacionais foram realizadas com o programa *Scilab*, versão 5.4.1.

As análises não lineares foram efetuadas considerando o método de Comprimento de Arco com o processo iterativo tipo Newton – Raphson. Essa técnica se caracteriza por apresentar um controle concomitante de força e deslocamento.

Os comportamentos do concreto e do aço foram descritos pelos modelos constitutivos propostos por Mazars (1984) e Manzoli (1998), respectivamente, ambos baseados na Mecânica do Dano Contínuo. O PRFC foi simulado por um modelo elástico linear.

A partir da comparação dos resultados numéricos com os experimentais, a modelagem proposta apresenta potencialidade na análise de estruturas de concreto armado reforçadas com PRFC devido a sua reduzida complexidade e baixo custo computacional.

2 – MODELOS CONSTITUTIVOS

Uma representação consistente do comportamento mecânico dos materiais envolvidos na análise estrutural é de grande importância para o bom desempenho da simulação numérica por meio do Método dos Elementos Finitos. Assim, modelos matemáticos devem ser estabelecidos para o desenvolvimento das relações constitutivas dos materiais (leis tensão-deformação). No decorrer desta seção são descritos os modelos constitutivos adotados para o concreto, aço e o reforço (PRFC).

2.1 Concreto – Modelo de Mazars (1984)

O concreto, em relação aos modos de ruptura, apresenta um comportamento distinto a tensões de tração e compressão. A ruptura do concreto por esforços de tração é ocasionada pela formação de fissuras e consequente perda de resistência normal à direção da fissura. Quanto à ruína na compressão, o concreto apresenta um comportamento que pode ser considerado como plástico, que é o esmagamento ocasionado pela superação da coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento caracterizada por grande quantidade de microfissuras.

Neste modelo é suposto que o dano se inicia quando a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ atinge um valor de deformação de referência ε_{d0} , determinado em ensaios de tração uniaxial em correspondência à tensão máxima. A relação constitutiva é dada por Pituba e Proença (2005):

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I} - d\mathbf{I})\mathbf{C}^0\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

Em que: \mathbf{I} é o tensor identidade, \mathbf{C}^0 o tensor elástico do material íntegro, d o escalar dano, $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformações e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões. No caso do modelo unidimensional, a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ é avaliada por:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_t & , \text{ se } \varepsilon_x \geq 0 \text{ (tração)} \\ -\varepsilon_x = \varepsilon_c & , \text{ se } \varepsilon_x < 0 \text{ (compressão)} \end{cases} \quad (2)$$

Em que: ν é o coeficiente de Poisson do concreto e $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ a deformação específica na direção x . Considerando-se um carregamento continuamente crescente ou radial, das curvas tensão-deformação obtidas em ensaios uniaxiais de tração e compressão, podem ser determinadas explicitamente as variáveis de dano d_T e d_C da seguinte forma (TIAGO; LEITÃO; ROSCA, 2002):

$$d_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{(B_T\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (3)$$

$$d_C(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{(B_C\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4)$$

Em que: A_T e B_T são parâmetros característicos do material em tração uniaxial; A_C e B_C parâmetros do material em compressão uniaxial e ε_{d0} a deformação específica elástica limite. Os subíndices T e C significam tração e compressão, respectivamente.

2.2 Aço – Modelo de Manzoli (1998)

Para descrever o comportamento das armaduras foi utilizado um modelo uniaxial, uma vez que em estruturas de concreto armado as barras de aço resistem fundamentalmente a esforços axiais. Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressa por Manzoli (1998):

$$\bar{\sigma} = E_{s0}\varepsilon \quad (5)$$

Em que: E_{s0} é o módulo de elasticidade inicial do aço e ε a deformação específica. O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 da seguinte forma:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_{s0}}} \quad (6)$$

Em que B_1 é um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva $\boldsymbol{\tau}(\bar{\sigma})$ por:

$$\boldsymbol{\tau}(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_{s0}}} \quad (7)$$

O critério de degradação é expresso por:

$$F(\bar{\sigma}) = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{E_{s0}}} - B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_{s0}}} \leq 0 \quad (8)$$

A partir das relações de Kuhn-Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável $\boldsymbol{\tau}$ durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r, \boldsymbol{\tau}) \quad (9)$$

A partir das Equações (5) e (7), $\boldsymbol{\tau}$ pode ser expresso em termos da deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_{s0}}\varepsilon \quad (10)$$

A tensão normal σ no aço é obtida da seguinte forma:

$$\sigma = (1 - d_s)E_{s0}\varepsilon \quad (11)$$

Em que o dano d_s é escrito em função do módulo de endurecimento H e do limite de dano r por:

$$d_s = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (12)$$

Para um módulo H constante e maior que zero tem-se encruamento linear positivo.

2.3 Polímero Reforçado com Fibra de Carbono (PRFC)

Para o PRFC adota-se a relação constitutiva linear expressa matematicamente por:

$$\sigma = E_r\varepsilon \quad (13)$$

Em que: E_r é o módulo de elasticidade do material e ε a deformação específica.

3 – RIGIDEZ EQUIVALENTE

Para a determinação da rigidez à flexão equivalente para o concreto, a seção transversal da viga é dividida em camadas, conforme é mostrada na Figura 1. O momento de inércia da camada i é calculado, por meio do Teorema do Eixo Paralelo, da seguinte maneira:

$$I_i = \frac{b(y_i - y_{i-1})^3}{12} + b(y_i - y_{i-1})\left(y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2}\right)^2 \quad (14)$$

$i = 1, \dots, nc$

Em que: nc é o número total de camadas da seção transversal retangular; b a largura da viga; e y_i a cota da i -ésima camada a partir do centróide da seção. Na Equação (14), quando o subíndice i assume o valor $nc/2$, a cota $y_{nc/2}$ vale $h - y_{cg}$ ou zero, sendo y_{cg} a distância da parte inferior da seção ao centróide da mesma. A rigidez à flexão equivalente para o concreto EI_{eqc} é calculada por:

$$EI_{eqc} = \sum_{i=1}^{nc} E_{ci}I_i, \quad i = 1, 2, \dots, nc \quad (15)$$

Em que: $E_{ci} = E_{c0}(1 - d_i)$ é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto danificado da i -ésima camada. A rigidez à flexão equivalente para o aço, EI_{eqs} é obtida por (Figura 2):

$$EI_{eqs} = \sum_{k=1}^{nb} E_{sk}I_{sk} = \sum_{k=1}^{nb} E_{sk} \left(\frac{\pi\phi_k^4}{64} + \frac{\pi\phi_k^2}{4} y_{si}^2 \right) \quad (16)$$

Em que: nb é o número de barras; ϕ_k o diâmetro da barra k ; E_{sk} o módulo de elasticidade longitudinal do aço da barra k ; e y_{si} , $i=1, 2$, a distância do centro geométrico da barra k ao centróide da seção transversal da viga. Na Figura 2, a letra c indica o cobrimento da armadura.

A rigidez equivalente à flexão do reforço EI_{eqr} é determinada dividindo-se em nl camadas de mesma espessura (Figura 3), e é calculada por meio da seguinte expressão:

$$EI_{eqr} = \sum_{k=1}^{nl} E_{rk} \left(\frac{be_k^3}{12} + be_k \left(y_{cg} - (nl - k)e_k - \frac{e_k}{2} \right)^2 \right) \quad (17)$$

Em que: E_{rk} é o módulo de elasticidade longitudinal da k -ésima camada; $e_k = e$, $k = 1, \dots, nl$, a espessura da camada k ; e b a largura da viga. A rigidez à flexão equivalente total EI_{eq} é determinada por:

$$EI_{eq} = EI_{eqc} + EI_{eqs} + EI_{eqr} \quad (18)$$

Figura 1 – Seção transversal retangular da viga dividida em nc camadas.

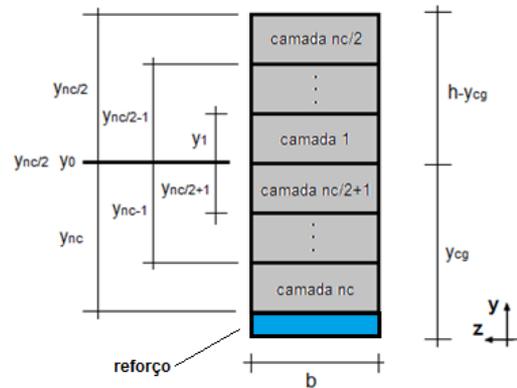


Figura 2 – Armaduras longitudinais inferiores e superiores da viga.

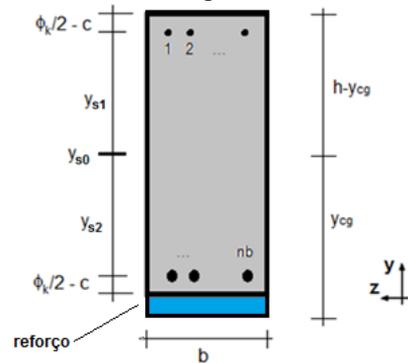
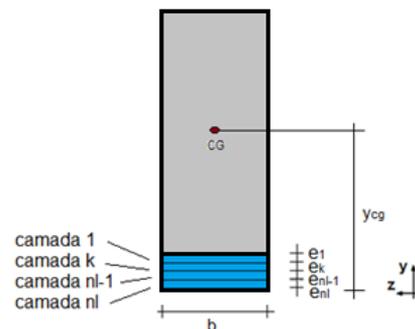


Figura 3 – Reforço da viga dividido em nl camadas.



Na obtenção do vetor de força interna elementar, a rigidez à flexão equivalente é determinada para cada ponto de Gauss na integração numérica, utilizando-se o método de Quadratura Gaussiana. No processo de cálculo da rigidez equivalente supõe-se, por simplificação, que a linha neutra ($\sigma_x = 0$) está localizada no centróide da seção transversal ao longo da simulação. No entanto, quando os materiais (concreto e/ou aço e/ou reforço) apresentam comportamento não linear, a localização da linha neutra é alterada a cada iteração numérica, não considerada neste trabalho.

4 – MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO COM O PROCESSO ITERATIVO TIPO NEWTON – RAPHSON

Para problemas de ponto limite, ao aplicar o método de Newton – Raphson com controle de força, a matriz de rigidez tende a singularizar nas proximidades desse ponto em sua trajetória ascendente. Uma alternativa para detectar e ultrapassar o ponto limite é a utilização de métodos de solução associados ao método de Newton – Raphson, como, por exemplo, o método de Comprimento de Arco.

O método de Comprimento de Arco caracteriza-se por apresentar um controle concomitante de força e deslocamento. Há duas incógnitas: o incremento do fator de força $\Delta\phi$ e o vetor de incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{u}$. Em cada passo de solução, as trajetórias de iteração são perpendiculares aos arcos, que, por sua vez, podem ser aproximados por tangentes à trajetória de equilíbrio (RAMM, 1981). Considerando o método Comprimento de Arco com o processo de iteração tipo Newton – Raphson, as equações de equilíbrio para i-ésima iteração podem ser escritas como:

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}^i = \Delta\phi^i \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{Q}^{i-1} \quad (19)$$

Em que: $\Delta\phi^i$ é o incremento do fator de força da iteração i ; $\Delta\mathbf{u}^i$ o vetor incremento de deslocamento; \mathbf{R}_0 o vetor de forças de referência; \mathbf{K}_T a matriz de rigidez tangente atualizada a cada iteração; e $\Delta\mathbf{Q}^{i-1}$ o vetor de forças não equilibradas dado por:

$$\Delta\mathbf{Q}^{i-1} = \mathbf{R}_{\text{ext}}^{i-1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^i \quad (20)$$

Em que: $\mathbf{R}_{\text{ext}}^{i-1}$ é o vetor de forças externas e $\mathbf{F}_{\text{int}}^i$ o vetor de forças internas. O vetor $\mathbf{R}_{\text{ext}}^{i-1}$ deve ser escrito em função do fator de força ϕ^{i-1} , atualizado ao final da iteração anterior, e do vetor de forças de referência \mathbf{R}_0 , constante, por meio da seguinte relação:

$$\mathbf{R}_{\text{ext}}^{i-1} = \phi^{i-1} \mathbf{R}_0 \quad (21)$$

Para um sistema de ordem $\mathbf{n}+1$, equivalendo \mathbf{n} ao número de graus de liberdade da estrutura, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{R}_0 \\ \Delta\mathbf{u}^1 & \Delta\phi^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{u}^1 \\ \Delta\phi^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{Q}^{i-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Em que: $\Delta\mathbf{u}^1$ é o primeiro vetor de incrementos de deslocamento do passo de solução e $\Delta\phi^1$ o primeiro incremento do fator de força no referido passo. Nota-se que a resolução do sistema dado na Equação 22 gera um sistema de equações com solução não trivial, mesmo que a matriz \mathbf{K}_T seja singular, o que representa grande vantagem para a solução de problemas com ponto limite.

Entretanto, há o problema da matriz de rigidez não ser simétrica. A fim de contornar esse problema, Wessels (1977) propôs uma alternativa que consistiu em dividir o vetor de incremento de deslocamentos $\Delta\mathbf{u}^i$ em duas parcelas: $\Delta\mathbf{u}^i_Q$ e $\Delta\mathbf{u}^i_R$. Essas parcelas são obtidas pela resolução dos sistemas:

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}^i_Q = \Delta\mathbf{Q}^{i-1} \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}^i_R = \mathbf{R}_0 \quad (24)$$

O incremento do fator de força é calculado por:

$$\Delta\phi^i = - \frac{\Delta\mathbf{u}^1 : \Delta\mathbf{u}^i_Q}{\Delta\mathbf{u}^1 : \Delta\mathbf{u}^i_R + \Delta\phi^1} \quad (25)$$

Com o objetivo de limitar os processos iterativos, dois critérios de convergência são estabelecidos: um para os deslocamentos e outro para as forças.

O critério de convergência para os deslocamentos deve obedecer a seguinte desigualdade:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}^i\|}{\|\mathbf{u}^i\|} \leq u_{\text{tol}} \quad (26)$$

Em que o numerador é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{u}^i$ correspondente à iteração i , e o denominador é a norma euclidiana do vetor de deslocamento total $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i$ da i-ésima iteração.

O critério de convergência para forças deve obedecer à relação:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{Q}^i\|}{\|\phi^i \mathbf{R}_0\|} \leq Q_{\text{tol}} \quad (27)$$

Em que o numerador é a norma euclidiana do incremento de força não equilibrada $\Delta\mathbf{Q}^i$ correspondente à iteração i , e o denominador é a norma euclidiana do incremento de força do passo de solução.

5 – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

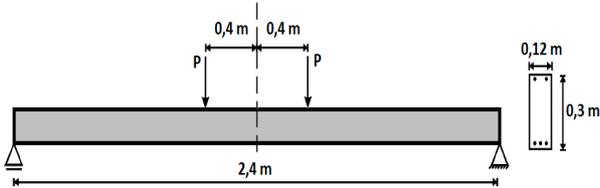
Nesta seção são feitos estudos comparativos por meio das respostas numéricas obtidas com a modelagem proposta e os valores experimentais de vigas biapoiadas de concreto armado sem e com reforço à flexão constituído de PRFC, encontradas na literatura científica.

5.1 Simulação 1: viga sem reforço

Este exemplo consiste de uma análise não linear de uma viga biapoiada de concreto armado apresentada por Álvares (1993). A viga em questão possui 2,4 m de

comprimento, seção transversal retangular cujas dimensões são (0,12 x 0,30) m² e está sujeita a duas forças concentradas **P** equidistantes, conforme é apresentada na Figura 4. As armaduras longitudinais inferiores (*A_{st}*) são constituídas de 3 φ10 mm e superiores (*A_{sc}*) por 2 φ5 mm, com recobrimento de 0,02 m. Os módulos de elasticidade não danificados do concreto e do aço são *E_{c0}* = 29,2 GPa e *E_{s0}* = 196 GPa, respectivamente.

Figura 4 – Viga biapoada sujeita a duas forças concentradas.



Na discretização por elementos finitos foram empregados 48 elementos de viga com dois nós e dois graus de liberdade/nó. Devido às simetrias de carregamento e geometria foi analisada apenas metade da viga. Para a determinação da rigidez à flexão equivalente para o concreto, a seção transversal da viga foi dividida em 60 camadas. Perfeita aderência entre o aço e o concreto foi assumida. O incremento de força utilizado foi tomado igual a 1,0 kN e os erros máximos admitidos no final de cada incremento foram de *u_{tol}* = 10⁻² e *Q_{tol}* = 10⁻².

Adotou-se, como critério de falha, o proposto por Tsai e Wu (1971). Considerando o caso uniaxial de tensão, tem-se:

$$F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{44} \sigma_4^2 = 1 \quad (28)$$

Em que: σ_1 é a tensão principal na direção um e σ_4 a tensão de cisalhamento. Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros dos modelos constitutivos e os coeficientes de resistência para o critério de falha.

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos constitutivos e do critério de falha.

Concreto	Aço	Critério de Tsai – Wu
<i>A_t</i> = 0,20		
<i>B_t</i> = 1100	<i>H</i> = 0,85	<i>F₁</i> = 0,22
<i>A_c</i> = 0,25	<i>f₀</i> = 500 MPa	<i>F₁₁</i> = -0,023
<i>B_c</i> = 1000	<i>B₁</i> = 1	<i>F₄₄</i> = 0,032
<i>ε_{d0}</i> = 5 10 ⁻⁵		

Simulações com o modelo de dano de Mazars (1984) podem conduzir a deformações excessivas na estrutura a partir de um determinado incremento de força (GUELLO; BITTENCOURT, 2002). Para limitar essas deformações foi considerado, durante a análise, que o valor máximo da variável dano fosse igual a 0,89, isto é, *d_i* ≤ 0,89, *i* = C, T.

Os resultados numéricos, em termos de deslocamento vertical máximo **u_y** versus força aplicada **P**, são confrontados na Figura 5 com os resultados experimentais apresentados por Álvares (1993). Nas simulações efetuadas, as tensões normais σ nas armaduras inferiores e superiores não ultrapassaram a tensão limite de

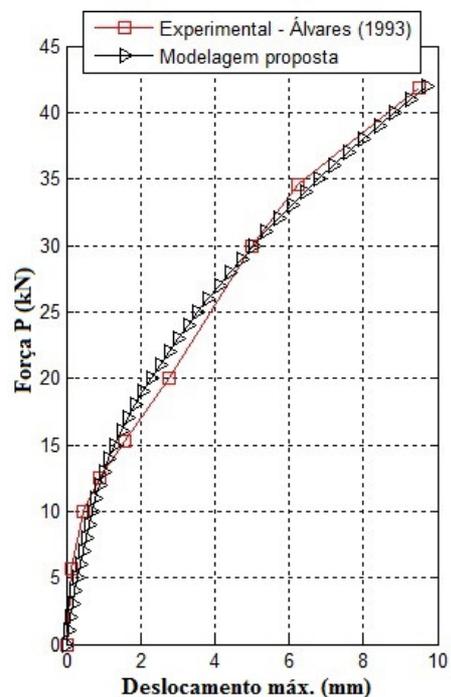
proporcionalidade **f₀**; dessa maneira, somente o concreto apresentou comportamento não linear.

Considerando o critério de falha de Tsai e Wu (1971), a viga entrou em colapso para a força aplicada *P* ≈ 42 kN segundo o modelo numérico, ficando próxima à força de ruptura experimental. No modelo computacional, considera-se que a peça falha no momento em que um dos elementos finitos da malha, em um dos pontos de Gauss, falha, ou seja, no momento em que *F₁σ₁ + F₁₁σ₁² + F₄₄σ₄² ≥ 1* (resultado avaliado a partir da determinação das tensões máximas na seção transversal correspondente: $\sigma_1 = \sigma_x$ e $\sigma_4 = \sigma_x/2$).

Vê-se que, conforme a Figura 5, que a resposta numérica se aproximou do resultado experimental, verificando-se a importância de análises não lineares no contexto da modelagem de estruturas em concreto armado, porque permitem estimar de forma mais precisa e realística os deslocamentos e a capacidade última das estruturas.

No entanto, diferenças podem ser observadas, como para os primeiros incrementos de força – região elástica – em que os deslocamentos máximos preditos (no meio do vão) pelo modelo numérico são maiores se comparados aos experimentais, resultando em curva menos rígida nesse trecho. Essas diferenças podem ser explicadas por alguns fatores, por exemplo, no modelo de elementos finitos implantado não foi considerada a influência da armadura transversal na análise.

Figura 5 – Curva deslocamento máximo versus força P.



Um aspecto importante a ser evidenciado no modelo de Mazars é que os resultados são sensíveis quando se varia o valor ϵ_{d0} , uma vez que altera o ponto de surgimento do dano e, conseqüentemente, o mapa da distribuição do mesmo na peça (SOUZA; MACHADO, 2013).

5.2 Simulação 2

Neste exemplo foram comparados os resultados obtidos pela modelagem proposta com os resultados experimentais apresentados por Beber (1999), para viga de concreto armado reforçada à flexão com uma lâmina de PRFC, a qual é fixada na parte inferior da viga por meio da técnica de aderência externa. A análise estrutural da viga também foi realizada pelos autores Pavan, Creus, Oliveira (2005) e Aurich (2001). A estrutura consiste de uma viga biapoiada com 2,50 m de comprimento, seção transversal retangular de (0,12 x 0,25) m² e sujeita a duas forças concentradas P/2 (Figura 6). A armadura longitudinal inferior (A_{st}) da mesma é constituída por 2 φ10 mm e a superior (A_{sc}) por 2 φ6,3 mm, com recobrimento de 0,015 m. Considerou-se aderência perfeita entre a armadura/reforço e o concreto. Quanto aos parâmetros dos materiais, eles podem ser encontrados na Tabela 2.

Figura 6 – Viga biapoiada reforçada com PRFC sujeita a duas forças concentradas.

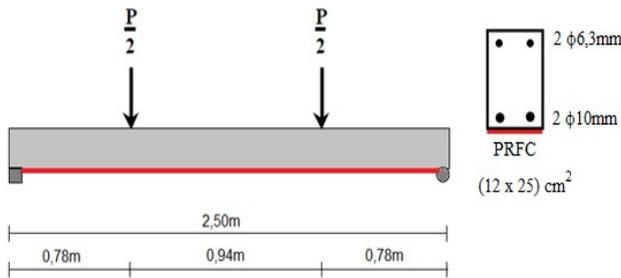


Tabela 2 – Parâmetros materiais.

Concreto	Aço		PRFC
	φ 10 mm	φ 6,3 mm	
E _{c0} = 38,3 GPa	E _{a0} = 210 GPa	E _{a0} = 210 GPa	E _r = 230 GPa
A _T = 0,995	f ₀ = 565 MPa	f ₀ = 738 MPa	ε _{ru} = 0,0148
B _T = 90.000	H = 0,9	H = 0,9	e = 0,011 cm
A _C = 0,2	B ₁ = 0,65	B ₁ = 0,65	B ₂ = 1
B _C = 380	B ₂ = 0,65	B ₂ = 0,65	
ε _{a0} = 0,00025			

Na discretização por elementos finitos foram empregados 125 elementos de viga com dois nós e dois graus de liberdade/nó, fazendo-se o uso das simetrias de carregamento e geometria, analisando-se, portanto, apenas metade da viga.

Para a determinação da rigidez à flexão equivalente para o concreto, a seção transversal da viga foi dividida em 60 camadas de mesma espessura. O incremento de força utilizado foi tomado igual a 1,474 kN. Os erros máximos admitidos no final de cada incremento foram de u_{tol} = 10⁻² e Q_{tol} = 10⁻². Durante a análise foi considerado que o valor máximo da variável dano fosse igual a 0,91, isto é, d_i ≤ 0,91, i = C, T.

Os resultados obtidos pelo programa computacional desenvolvido, em termos de deslocamento vertical máximo versus força aplicada, são confrontados na Figura 7 com os resultados experimentais apresentados no trabalho de Beber (1999).

Adotou-se nesta simulação o Critério da Máxima Deformação. Segundo esse critério, a falha ocorre quando a condição abaixo for satisfeita:

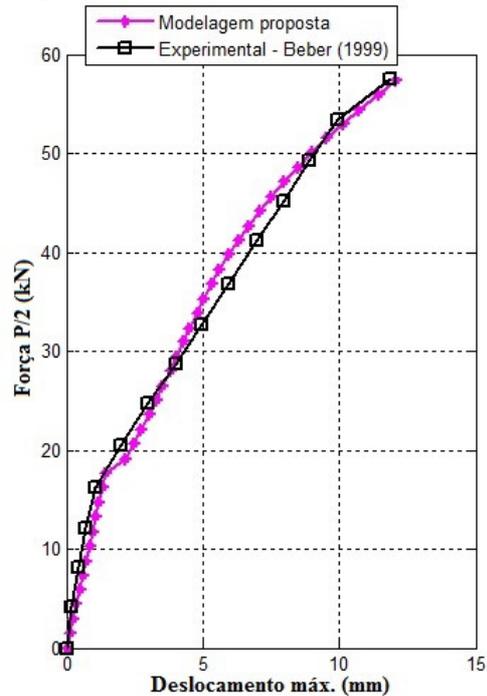
$$\left(\frac{\epsilon_1}{B_2 X_1} \right)^2 \geq 1 \quad (29)$$

Em que: ε₁ é a deformação principal na direção um; X₁ a deformação limite à tração ou à compressão na direção um; e B₂ o parâmetro do modelo.

O ponto de início do escoamento da armadura longitudinal inferior ocorreu para o incremento de força igual a 51,55 kN, aproximadamente. A simulação é conduzida até o global colapso da estrutura – ocorrência da perda de rigidez normal à direção das fissuras na região tracionada da viga (d_t ≅ 0,91), esmagamento do concreto na região comprimida (d_c ≅ 0,91) e falha da armadura inferior (escoamento).

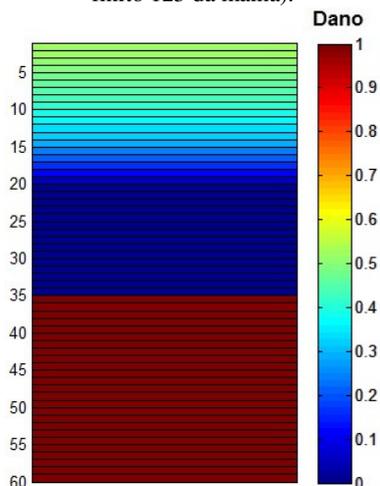
De acordo com o Critério da Máxima Deformação a armadura inferior falha no momento em que se inicia o escoamento. Segundo o ensaio realizado por Beber; Campos Filho; Campagnolo (2001), não houve falha da camada de PRFC bem como o destacamento da mesma.

Figura 7 – Deslocamento máximo versus força.



A distribuição do dano **d** no concreto nas camadas da seção transversal (em um dos pontos de Gauss na integração numérica) localizada na metade do comprimento da viga aproximadamente (elemento finito 125 da malha) é apresentada na Figura 8, em que pode ser vista a falha de camadas tracionadas (camadas inferiores) e comprimidas (camadas superiores).

Figura 8 – Distribuição do dano no concreto em seção transversal localizada próxima à metade do comprimento da viga (elemento finito 125 da malha).



CONCLUSÃO

O emprego de modelos constitutivos simplificados que acoplam diferentes teorias na sua formulação apresenta grande potencialidade na simulação numérica do comportamento de estruturas de concreto armado devido a sua reduzida complexidade.

A modelagem proposta, utilizando o Método dos Elementos Finitos e os modelos constitutivos implementados, apresentou razoável performance em confronto com os resultados experimentais disponíveis. Resultados mais satisfatórios podem ser obtidos através de um estudo da influência dos parâmetros dos modelos quanto à resposta mecânica dos materiais – sensibilidade paramétrica.

No que se refere ao estudo de estruturas de concreto armado, verifica-se que a análise com modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo constitui uma válida alternativa para o estudo do comportamento estrutural. No entanto, a aplicação conjunta de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos nas leis de evolução das variáveis de dano.

Foi considerado que todos os materiais tivessem perfeita aderência no modelo estrutural; contudo, melhores resultados podem ser obtidos através da implementação de um modelo de aderência entre as barras de armadura/reforço e o concreto (como, por exemplo, o indicado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993)), possibilitando assim prever os deslizamentos relativos e as tensões de aderência nas interfaces.

Uma barreira considerável no uso corrente de modelos não lineares está relacionada aos problemas numéricos e instabilidades na convergência que podem surgir em virtude de diversos refinamentos de modelo. Isso ocorre por conta da calibração dos parâmetros necessários nos modelos não lineares, sendo oneroso o processo, visto que diversas análises preliminares devem ser feitas antes de realizar o estudo final da estrutura.

Além de análises estruturais de vigas reforçadas com mais camadas de PRFC, a modelagem proposta pode ser ampliada para a análise de estruturas tipo pórtico plano e espacial, levando-se em conta o efeito da não linearidade geométrica.

REFERÊNCIAS

- ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. Dissertação (Mestrado), Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos, 1993.
- AURICH, M. **Modelo da ligação entre concreto e armadura na análise de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos**. 2001. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- BEBER, A. J. **Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono**. 1999. Dissertação (Mestrado), CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.
- BEBER, A. J.; CAMPOS FILHO, A.; CAMPAGNOLO, J. L. Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com mantas flexíveis de fibra de carbono. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, n. 2, p. 75-84, 2001.
- CEB – COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. (Bulletin d'Information, 213/214), Lausanne, 1993.
- GUELLO, G. A.; BITTENCOURT, T. N. Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por meio da Mecânica do Dano. **Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**, v. 0202, n. 1, p. 1-12, 2002.
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.
- MANZOLI, O. L. **Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecánica de sólidos**. 1998. Tese (Doutorado), Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.
- PAVAN, R. C.; CREUS, G. J.; OLIVEIRA, B. F. Modelo computacional para análise de vigas de concreto armado reforçadas por placas de material compósito. In: 4º Congresso Internacional Sobre o Comportamento de Estruturas Danificadas, 2005, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa, 2005.
- PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.

RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: Euro-US-Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, 1981, Berlin. **Proceedings...** Ruhr Universitat Bochum, p. 68-89, Springer, Berlin, 1981. https://doi.org/10.1007/978-3-642-81589-8_5.

SOUZA, L. A. F.; MACHADO, R. D. Análise numérico-computacional de estruturas de concreto armado considerando o dano, a fratura e critério de falha. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 6, p. 101-120, 2013. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952013000100006>.

TIAGO, C. M.; LEITÃO, V. M. A.; ROSCA, V. Análise de problemas unidimensionais de mecânica do dano com funções de base radial. J. M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor e G. Bugeda, Editor, **Métodos Numéricos en Ingeniería V**, Artes Gráficas Torres S.A., 2002.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, v. 5, n. 1, p. 58-80, 1971.
[HTTPS://DOI.ORG/10.1177/002199837100500106](https://doi.org/10.1177/002199837100500106).

WESSELS, M. **Das Statische und Dynamische Durchschlagsproblem der Imperfektem Flächen Kugelchale bei Elastischer Rotationsymmetrischer Verformung**. Dissertation, T.U. Hannover, Mitteil, n. 23 des Instituts für Statik, 1977.