

## APLICAÇÃO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EVOLUCIONÁRIA DESENVOLVIDO EM SCRIPT PYTHON

*APPLICATION OF A TOPOLOGICAL EVOLUTIONARY OPTIMIZATION METHOD DEVELOPED THROUGH  
PYTHON SCRIPT*

**Ricardo Morais Lanes<sup>1</sup>, Marcelo Greco<sup>2</sup>**

Universidade Federal de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas  
Av. Antônio Carlos, 6627, Campus da Pampulha, Escola de Engenharia, Sala 4127, CEP: 31270-901, Belo  
Horizonte, MG

<sup>1</sup>Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG, E-mail:  
rmlanes@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Professor Doutor, E-mail: mgreco@dees.ufmg.br

### RESUMO

O emprego de algoritmos computacionais que forneçam soluções otimizadas pode se tornar uma excelente alternativa para atenuar a necessidade de verificações exaustivas na identificação da melhor concepção estrutural de um determinado problema. Com a evolução da capacidade dos computadores e do Método dos Elementos Finitos, diversos métodos de otimização topológica têm sido desenvolvidos. Entre eles, o método denominado Otimização Estrutural Evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization* – ESO) tem-se consolidado na resolução de problemas estruturais, por meio da aplicação de procedimentos heurísticos nas análises. Neste artigo, aborda-se o problema de otimização topológica mediante o uso do algoritmo ESO desenvolvido em uma plataforma de programação disponível no *software* de análise de problemas multifísicos Abaqus®. O método ESO é aplicado em alguns casos de estudo da literatura, tanto para problemas estáticos quanto para problemas dinâmicos, os quais comprovam a eficiência da metodologia implantada. Apresenta-se ainda a otimização de uma chapa metálica destinada ao suporte de um motor gerador para turbina eólica, realizando-se um estudo comparativo entre duas concepções de projeto diferentes.

**Palavras-chave:** Otimização topológica, otimização evolucionária, método dos elementos finitos.

### ABSTRACT

The use of computational algorithms for optimized solutions has been becoming an excellent alternative to necessary and exhaustive verifications regarding the best structural conception. With the evolution of the computational capability and the Finite Elements Method, several topological optimization methods have been developed. Among these methods, the method called Evolutionary Structural Optimization (ESO) has been used on the structural problems solutions, through the application of Heuristic procedures on the analyses. The present paper deals with the topological optimization using the ESO method developed in a programming platform available on the software for multiphysics analyses Abaqus®. The ESO method is applied for some problems found in literature, both for static problems and for dynamic problems. The obtained results prove the efficiency of the implemented method. The last numerical application presents the optimization of a metallic flange used to support the motor of an aeolian turbine, comparing the results among two different design conceptions.

**Keywords:** Topological optimization, evolutionary optimization, finite elements method.

### 1 – INTRODUÇÃO

Tratar do problema de otimização estrutural é importante porque a preocupação com soluções econômicas sempre fez parte da rotina dos profissionais envolvidos em projetos de engenharia desde os tempos mais remotos. As exigências por projetos cada vez mais sustentáveis é outra justificativa que vem incentivando diversas pesquisas que objetivam a redução do consumo dos recursos naturais para sua execução, sem a perda de eficiência estrutural.

Conceitualmente, a otimização de estruturas pode ser classificada em três grandes grupos, a saber: otimizações paramétrica, de configuração e topológica. A otimização paramétrica correspondente a uma análise de parâmetros sem alterações no formato estrutural. Esses parâmetros podem estar relacionados às propriedades constitutivas ou

geométricas, tais quais módulos de elasticidade ou espessura de uma placa (Lima, 2011). A otimização de configuração possibilita a alteração dos contornos internos e externos de uma primeira geometria, atuando sempre com modificações nas fronteiras de um domínio. Já a otimização topológica procura encontrar o melhor arranjo entre todos os elementos constituintes, modificando e definindo cavidades em seu interior. Esse conceito de otimização topológica é explicado com base no próprio significado da palavra topologia que vêm do grego: “topos” (lugar) e “logos” (estudo).

De maneira resumida, pode-se dizer que a otimização paramétrica e de configuração são subgrupos da otimização topológica. Toda esta preocupação com a determinação da melhor solução data da Antiguidade. No entanto, pode-se dizer que somente após a evolução da

matemática no campo do cálculo variacional e com o advento do computador os conceitos da otimização puderam ser aplicados para os problemas da engenharia estrutural. Diversos métodos baseados em cálculos variacionais e em aproximações numéricas surgiram ou se desenvolveram para atender a necessidade dos engenheiros. Os métodos baseados em aproximações tornaram-se mais práticos porque permitiam o emprego de suas formulações em casos tratados como não-convexos (Huang e Arora, 1997).

Dentre as formulações que surgiram com maior relevância, cita-se o método heurístico e determinístico Otimização Estrutural Evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization* – ESO), proposto por Xie e Steven (1993), que se baseia em uma aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF). Esta formulação foi originalmente desenvolvida a partir de um algoritmo evolucionário baseado em um conceito muito simples que se baseia na inserção de vazios, ou seja, apresenta fundamentos na eliminação gradual de elementos pouco solicitados (com baixo nível de tensões) do domínio durante o processo, procedimento denominado *hard-kill*.

A representação matemática do ESO para a solução de problemas de otimização topológica pode ser apresentada com base em dois conceitos: tensão ou deslocamentos (LIANG *et al.*, 1999). As hipóteses algébricas utilizadas nos dois conceitos são demonstradas na próxima seção.

Desde sua origem, o ESO tem-se destacado por ser um algoritmo simples e de fácil inserção em um código computacional clássico do MEF, sem intrincadas manipulações matemáticas (Simonetti, 2009). *Softwares* comerciais de alto desempenho permitem o emprego do ESO em plataformas de programação, viabilizando os estudos para pesquisas atuais e futuras, além de favorecer a aplicação prática para uso em projetos estruturais.

Nesse contexto, este artigo apresenta alguns resultados alcançados por meio de uma análise topológica estrutural, via o método de otimização topológica ESO, implementada via *script* de programação *Python* no *software* de análise de problemas multifísicos *Abaqus*®. São apresentados exemplos clássicos da literatura que comprovam a eficiência da metodologia. Uma abordagem do desempenho de uma chapa metálica também é analisada por meio de uma concepção otimizada e por meio de outro conceito baseado na inserção de um furo de alívio.

## 2 – ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA

O método de otimização utilizado neste artigo é o ESO; razão pela qual, nesta seção dedica-se especial atenção a este método aplicado a problemas em nível de tensão e de deslocamentos. Outros aspectos importantes, relacionados com as instabilidades numéricas decorrentes da aplicação do método, também são descritos nesta seção.

### 2.1 – ESO em nível de tensão

Nesse conceito, a tensão equivalente de von Mises é utilizada como critério de remoção durante o processo

evolutivo até que seja obtida a saturação no campo de tensões atuantes da estrutura ou alguma restrição de projeto. Desta maneira, a expressão é definida conforme a seguinte inequação:

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{MAX}^{vm}} < RR_i \quad (1)$$

Em que:

$\sigma_e^{vm}$ : tensão de von Mises do elemento finito “e”;

$\sigma_{MAX}^{vm}$ : máxima tensão de von Mises na estrutura;

$RR_i$ : razão de rejeição na iteração  $i$ .

A razão de rejeição  $RR_i$  é utilizada para retardar o processo de remoção do elemento e está condicionada a valores prescritos no intervalo  $0 < RR_i < 1$ . O valor inicial de  $RR_i$  corresponde ao  $RR_0$  e este é definido de maneira empírica conforme experiência do usuário para cada tipo de problema. O ciclo de remoção dos elementos ocorre até que não possam ser removidos mais elementos para um dado valor de  $RR_i$ . Alcançado esse nível de equilíbrio, mas não alcançado algum critério de parada do processo iterativo (configuração ótima pelo método ESO), o processo evolutivo é redefinido, adicionando a  $RR_i$  uma razão de evolução  $ER$ . Dessa maneira, um novo ciclo de evolução se inicia, até que não existam mais elementos a serem eliminados com essa nova razão de rejeição. Novamente atingido o equilíbrio,  $RR_i$  é atualizada. Algebricamente:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad (2)$$

Dependendo do tipo de problema em análise, o processo iterativo de ser reavaliado para diferentes valores de  $RR_0$ . Querin (1997) sugere que para os valores  $RR_0$  e  $ER$ , sejam adotados valores pequenos, aproximadamente 1%, para que se garanta uma melhor convergência. Adicionalmente, um controle sobre a razão de remoção pode ser realizado, para impedir que o valor de  $RR_i$  atinja valores muito elevados, conduzindo a remoção de uma região muito grande do domínio. Dessa maneira a razão de remoção da iteração deve sempre ser menor que uma razão de remoção máxima preestabelecida  $RR_f$ .

O processo evolucionário pode ser resumido de acordo com os seguintes passos:

- Passo 1: discretização do domínio inicial da estrutura, utilizando uma malha fina de elementos finitos, e aplicação das condições de contorno e ações prescritas;
- Passo 2: analisar a estrutura por elementos finitos;
- Passo 3: remover os elementos que satisfaçam a Inequação (1);
- Passo 4: repetir os passos 2 a 4 até que o projeto ótimo seja alcançado.

### 2.2 – ESO em nível de deslocamentos

O ESO em nível de deslocamentos, proposto por Chu *et al.* (1996), foi definido originalmente para problemas

estáticos, baseados em análise pelo Método dos Elementos Finitos. Essa aproximação também é conhecida como ESO em nível de rigidez, uma vez que, a aproximação foi originalmente elaborada com o objetivo do aumento da rigidez global da estrutura.

Por meio desse procedimento é possível constatar que os elementos removidos são os que apresentam menor energia de deformação, ou seja, contribuem menos para a rigidez da estrutura. Em termos algébricos, considere:

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (3)$$

Em que:

$[K]$ : matriz de rigidez da estrutura;

$\{u\}$ : vetor de deslocamentos nodais;

$\{f\}$ : vetor de forças nodais.

A base do algoritmo é a igualdade da energia de deformação da estrutura e o trabalho das forças externas. Em termos matemáticos, o trabalho das forças externas  $C$  pode ser escrito conforme a Equação (4).

$$C = \{f\}^T \{u\} \quad (4)$$

Supondo-se que as forças sejam conservativas, cujo trabalho não dependa da trajetória entre uma configuração inicial e outra deformada, e que uma mudança na estrutura resulte em uma mudança na energia de deformação, então se  $\{f\}$  permanece constante, tem-se  $\{\Delta f\} = 0$ . Logo:

$$\Delta C = \{f\}^T \{\Delta u\} + \{\Delta f\}^T \{u\} \rightarrow \Delta C = \{f\}^T \{\Delta u\} \quad (5)$$

Da mesma forma:

$$[\Delta K]\{u\} + [K]\{\Delta u\} = 0 \quad (6)$$

Premultiplicando-se a equação anterior por  $\{f\}^T [K]^{-1}$ , ou seja,  $\{u\}^T$ , obtém-se:

$$\Delta C = -\{u\}^T [\Delta K]\{u\} \quad (7)$$

Assumindo-se que a modificação é devida à remoção de um dado elemento “ $e$ ”, a equação anterior torna-se:

$$\Delta C = \{u\}_e^T [K]_e \{u\}_e = 2C_e \quad (8)$$

Em que:

$\{u\}_e$ : vetor de deslocamentos nodais do elemento “ $e$ ”;

$[K]_e$ : matriz de rigidez do elemento “ $e$ ”;

$C_e$ : energia de deformação do elemento “ $e$ ”.

Assim, o número de sensibilidade para a energia de deformação média do elemento “ $e$ ” ( $\alpha_e$ ) pode ser definido como:

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [K]_e \{u\}_e = C_e \quad (9)$$

A Equação 9 indica que a maneira mais eficiente de maximizar a rigidez da estrutura, para problemas com

redução de volume, é a eliminação de elementos com menores valores  $\alpha_e$ .

O número de elementos a serem removidos é determinado pela razão de rejeição  $RR_i$ , constante no processo de evolução, que é definida pelo quociente do número de elementos retirados por iteração pelo número total inicial do modelo de elementos finitos. Os elementos serão retirados até que se atinja uma fração preestabelecida para o volume da estrutura. A seguir os passos para a otimização evolucionária sob o conceito em nível de deslocamentos e restrição de volume:

- Passo 1: discretização do domínio inicial da estrutura, utilizando uma malha fina de elementos finitos, e aplicação das condições de contorno e ações prescritas;
- Passo 2: analisar a estrutura via MEF;
- Passo 3: calcular o número de sensibilidade para cada elemento utilizando a Equação (9);
- Passo 4: remover uma quantia de elementos com os menores números de sensibilidade de acordo com a razão de rejeição preestabelecida;
- Passo 5: repetir os passos 2 a 4 até que o projeto ótimo seja alcançado.

A grande dificuldade da implementação do ESO em nível de deslocamentos em *softwares* comerciais está relacionada à necessidade do acesso direto às matrizes e aos vetores envolvidos nos cálculos de elementos finitos durante o processo evolutivo. Desta maneira, o critério mais atraente para este tipo de objetivo é o ESO em nível de tensões.

### 2.3 – Instabilidades numéricas

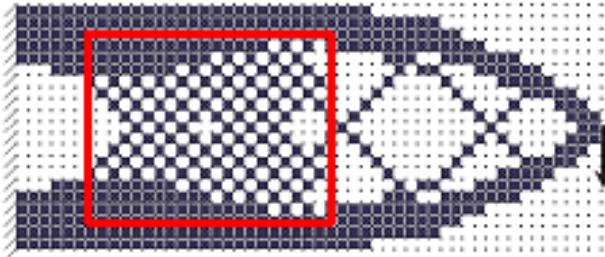
A necessidade de se alcançar uma configuração ótima para uma determinada propriedade mecânica da estrutura, muitas vezes, agrega a investigação da análise estrutural quase sempre muito complexa. Essa dificuldade é atenuada com o emprego do MEF, entretanto, com a discretização do domínio surge como desvantagem a possibilidade de instabilidades numéricas ao modelo. Bendsøe e Sigmund (2003) as classificam, basicamente, em três categorias: irregularidades do tabuleiro de xadrez, dependência de malha e problemas dos ótimos locais.

#### 2.3.1 – Irregularidades do tabuleiro de xadrez

A irregularidade do tabuleiro de xadrez, conhecido na literatura como *checkerboard*, caracteriza-se pela configuração estrutural alternada em vazios e materiais, similar a um tabuleiro de xadrez. Para Díaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996) a origem do problema da configuração em xadrez está associada a erros numéricos característicos dos processos de aproximação do elemento finito, não representando, portanto, uma característica ótima de projeto. Bendsøe e Sigmund (2003) sugerem como técnica para eliminação dessa instabilidade, a utilização de elementos com função interpoladora de ordem superior, como por exemplo, elementos bilineares ou quadrilaterais de oito nós, uma vez que esses elementos poderiam simular de maneira mais precisa o campo de

deslocamentos, reduzindo a ocorrência de regiões em xadrez. A Figura 1 apresenta um exemplo de uma região do domínio de projeto com instabilidade numérica do tabuleiro de xadrez.

Figura 1 – Representação qualitativa de uma região com instabilidade numérica do tabuleiro de xadrez (Li *et al.*, 2001 adaptado)



Outra atenuante da irregularidade do tabuleiro de xadrez é a utilização do método chamado *Nibbling* ESO, que é uma adaptação do método ESO para otimizações de configuração. Em outras palavras, trata-se do algoritmo ESO submetido a uma restrição do domínio de projeto. Esta técnica de otimização atua na remoção apenas de elementos presentes nos contornos do modelo. O objetivo da técnica é evitar a abertura de espaços vazios excessivos e desnecessários no processo de otimização de domínio.

A utilização associada do *Nibbling* ESO, ESO convencional e elementos com funções interpoladoras de ordem superior tem proporcionado resultados finais mais racionais para as aplicações práticas. A associação *Nibbling* ESO e ESO convencional é caracterizada na necessidade de abertura de uma nova cavidade, a cada iteração. O algoritmo a seguir explica a rotina utilizada neste trabalho para este tipo de avaliação.

- a) Passo 1: Verificar se há elementos pouco solicitados nos contornos e aplicar o *Nibbling* ESO;
- b) Passo 2: se houver elementos pouco solicitados no contorno, então vá para o Passo 4, senão vá para o Passo 3;
- c) Passo 3: se há necessidade de se criar uma nova cavidade, então aplique o ESO convencional;
- d) Passo 4: se o projeto ótimo foi alcançado, então vá ao Passo 5, senão volte ao Passo 1;
- e) Passo 5: projeto ótimo foi alcançado.

### 2.3.2 – Dependência de malha

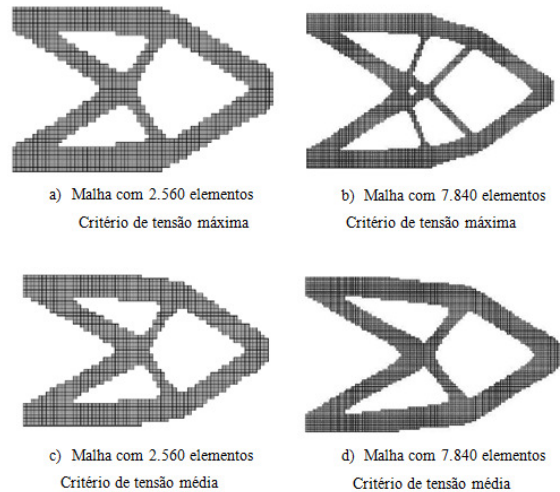
A dependência de malha é uma anomalia inerente à divisão do domínio. Intuitivamente espera-se que quanto maior o refino da malha de elementos finitos, a topologia ótima resulte em uma estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas mais refinadas resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo para outro decorrente de uma malha mais grosseira. Observa-se que com o aumento de elementos, há uma

tendência de aumento dos espaços vazios. Para reduzir essa dependência nos processos de otimização, alguns trabalhos foram realizados com utilização de alguns métodos atenuantes, como em Jog e Haber (1996), Zhou *et al.* (2001), Sigmund e Petersson (1998), Sigmund (1997). Sigmund e Petersson (1998) identificaram que as aproximações feitas para redução da dependência de malha, reduzem também os efeitos do tabuleiro de xadrez.

Kim *et al.* (2002) apresentaram um estudo comprovando a redução da dependência da malha, quando o critério utilizado na análise em nível de tensão for a tensão média do elemento finito. Quando são utilizados critérios de remoção baseados na tensão máxima do elemento, os resultados tornam-se muito dependentes da malha devido às singularidades que ocorrem próximas as condições de contorno. Tais singularidades são fortemente dependentes da malha. No entanto, com a utilização de critérios baseados na tensão média do elemento, esse efeito torna-se reduzido.

A Figura 2 mostra alguns resultados obtidos no trabalho de Kim *et al.* (2002). Observa-se que com a utilização de tensões máximas, em vez de tensões média, o resultado final torna-se mais dependente da malha de elementos finitos para um mesmo problema de análise estrutural.

Figura 2 – Representação qualitativa da independência de malha para critério sob tensão média (Kim *et al.*, 2002 adaptado)

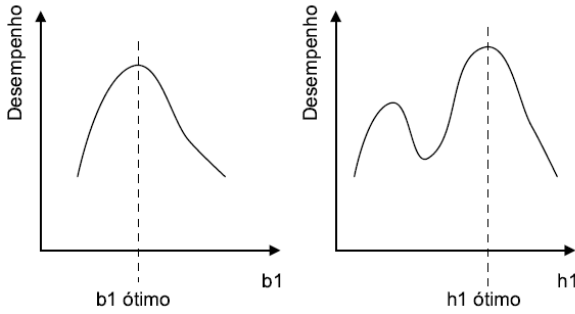


### 2.3.3 – Problema do ótimo local

O problema de ótimos locais está relacionado à natureza não convexa dos projetos de otimização topológica, propícios a inúmeros resultados com soluções localizadas (Sant'anna, 2002; Coutinho, 2006). Para Simonetti (2009), esse é o grande problema deste tipo de otimização, que é extremamente sensível às modificações em seus parâmetros. No entanto, o controle das demais instabilidades numéricas, tendem a tornar o problema, originalmente não convexo, em convexo, fazendo com que a topologia final possa ser reproduzida (Sigmund e Petersson, 1998). Sanches (2011) comenta que o problema de otimização estrutural pode ser seguido de duas abordagens. A primeira está relacionada à própria análise

que consiste na avaliação das possíveis configurações da estrutura. Mediante aos resultados, são construídos gráficos ou tabelas do desempenho em função de certos parâmetros variáveis, como representado na Figura 3. Com esses gráficos, analisa-se e define-se a configuração ótima para o domínio estudado.

Figura 3 – Desempenho em função dos valores dos parâmetros (Silva, 2001 adaptado)



### 3 – METODOLOGIA

Utilizou-se o *software* de análise de problemas multifísicos Abaqus® para a modelagem numérica dos elementos finitos e implementação da rotina computacional ESO. Todas as análises topológicas foram realizadas sob o ESO em nível de Tensões de von Mises.

#### 3.1 – Critério de von Mises

As análises apresentadas neste artigo consideram os materiais com tensão limite de escoamento e tensão de ruptura superiores às tensões obtidas causadas pela ação aplicada. Considera-se, portanto, materiais elásticos no regime elástico-linear.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (10)$$

Em que o tensor constitutivo de quarta ordem está relacionado com as constantes elásticas do sólido e é chamado de tensor constitutivo, de acordo com a lei de Hooke generalizada.

De acordo Valliappan (1981), em 1913 von Mises desenvolveu a formulação do critério de escoamento com base na teoria da energia de distorção. De acordo com este critério, o escoamento ocorre quando a segundo invariante do tensor desvio das tensões atinge o seu valor crítico. Em termos de tensão principal, este invariante pode ser escrito da seguinte maneira:

$$j_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (11)$$

Para o caso uniaxial, com  $\sigma_1 = \sigma_{esc}$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , determina-se o valor da constante  $j_2$ :

$$j_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{ESC} - 0)^2 + (0 - \sigma_{ESC})^2] = \frac{\sigma_{ESC}^2}{3} \quad (12)$$

Assim, o critério de escoamento pode ser determinado conforme a seguir:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ESC}^2 \quad (13)$$

Supondo que este escoamento ocorra para uma dada tensão de von Mises, ou seja  $\sigma_{esc}$  e  $\sigma_{esc}^{vm}$ . Então, usando-se as componentes de tensão principais:

$$\sigma_{máx}^{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (14)$$

As tensões de von Mises calculadas na posição centroidal de cada elemento finito são dadas pela Eq. (15).

$$\sigma_{máx}^{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + (\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + (\sigma_Z - \sigma_X)^2 + 6(\tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{XZ}^2)} \quad (15)$$

No caso plano, as tensões de von Mises calculadas na posição centroidal de cada elemento finito se reduz à Eq. (16).

$$\sigma_{máx}^{VM} = \sqrt{\sigma_X^2 - \sigma_X \sigma_Y + \sigma_Y^2 + 3\tau_{XY}^2} \quad (16)$$

#### 3.2 – Otimização da Frequência Natural

Os critérios utilizados para a otimização dos modos de uma estrutura são os mesmos utilizados para a otimização estática. Para validação da aplicação desse critério, seja a equação do movimento de um sistema não amortecido discreto:

$$[M]\{\ddot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = \{f\} \cos \Omega t \quad (17)$$

Em que:

- [M]: matriz de massa;
- [K]: matriz de rigidez;
- {η}: vetor dos deslocamentos;
- {f}: vetor de forças nodais;
- Ω : frequência de excitação.

Utilizando-se superposição modal, a solução para o sistema pode ser expressa por:

$$\{\eta\} = \{u\}\{y\} \cos \Omega t \quad (18)$$

Em que:

- {u}: matriz modal;
- {y}: vetor amplitude de resposta modal em coordenadas principais.

Considerando-se uma matriz com funções ponderadoras igual à matriz transposta dos modos de vibração na equação do movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( \bar{u}^T [K] \bar{u} - \Omega^2 \bar{u}^T [M] \bar{u} \right) \{y\} \cos \Omega t = \\ & = \bar{u}^T \{f\} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (19)$$

A solução desse novo sistema será:

$$\begin{aligned} \{y\} \cos \Omega t = & \left( \bar{u}^T [K] \bar{u} - \Omega^2 \bar{u}^T [M] \bar{u} \right)^{-1} \\ & \bar{u}^T \{f\} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (20)$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \bar{u} \left( \bar{u}^T [K] \bar{u} - \Omega^2 \bar{u}^T [M] \bar{u} \right)^{-1} \\ & \bar{u}^T \{f\} \cos \Omega t = \bar{u} \{y\} \cos \Omega t = \{\eta\} \end{aligned} \quad (21)$$

Alternativamente:

$$\{\eta\} = [\bar{K}]^{-1} \{\bar{f}\} \rightarrow [\bar{K}] \{\eta\} = \{\bar{f}\} \quad (22)$$

Em que:  $[\bar{K}]^{-1} = \bar{u} \left( \bar{u}^T [K] \bar{u} - \Omega^2 \bar{u}^T [M] \bar{u} \right)^{-1} \bar{u}^T$  é a inversa da nova matriz de rigidez equivalente e  $\{\bar{f}\} = \{f\} \cos \Omega t$ , é o vetor de forças no domínio do tempo ou um vetor de forças normalizado segundo um modo de vibração.

Essas equações correlacionam deslocamentos e tensões, validando a adoção dos critérios de remoção em nível de tensões para casos de otimização de modos de vibração, sem a necessidade do acesso direto a matrizes de rigidez e massa.

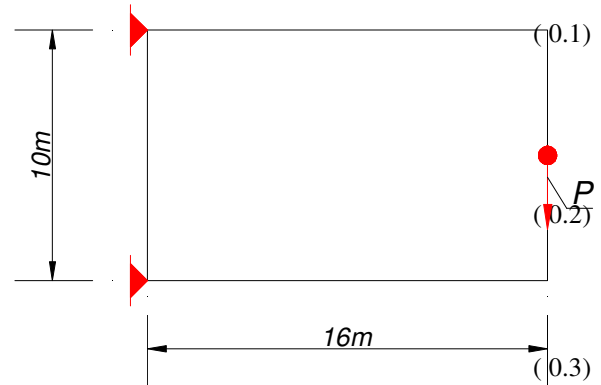
#### 4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES DA ANÁLISE NUMÉRICA

São apresentados nesta seção dois exemplos numéricos clássicos encontrados da literatura e que comprovam a eficiência da metodologia empregada. Apresenta-se ainda um terceiro exemplo numérico que trata da análise comparativa de desempenho mecânico entre uma chapa metálica triangular concebida com um furo de alívio predefinido e outra chapa, com mesmo volume de material, concebida à luz do método de otimização empregado.

##### 4.1 – Exemplo 1

Para a resolução desse exemplo, retirado de Kim *et al.* (2002), foi considerado um domínio inicial de projeto constituído por uma chapa de dimensões 16 m × 10 m e espessura de 1 m, solicitada por uma ação  $P = 0,10$  kN e vinculada conforme a Figura 4. As propriedades do material são módulo de elasticidade igual a 210 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,30.

Figura 4 – Geometria inicial e condições de contorno para a chapa do Exemplo 1



A malha foi definida com um total de 7840 elementos e 8023 nós, composta por elementos de membrana de 4 nós do *software* Abaqus (M3D4). A estrutura será otimizada para um volume de aproximadamente 50% do volume original. Os parâmetros utilizados para a otimização foram:  $RR_0 = 1,0\%$  e  $ER = 0,5\%$ , com uma restrição de no máximo três furos para o domínio de projeto durante todo o processo.

A Figura 5 apresenta a topologia ótima obtida na análise do problema para um volume final aproximadamente 50% do volume inicial. A Figura 6 apresenta o processo evolutivo para o parâmetro razão de remoção  $RR_i$ .

Figura 5 – Topologia ótima obtida para um volume final igual a 50% do volume inicial para a chapa do Exemplo 1

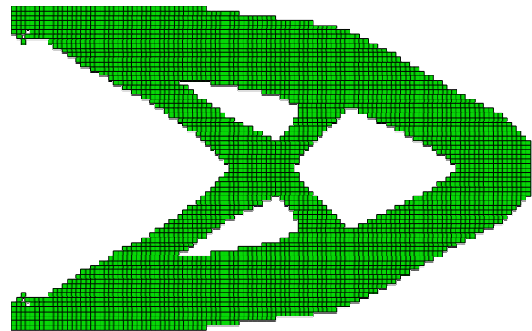
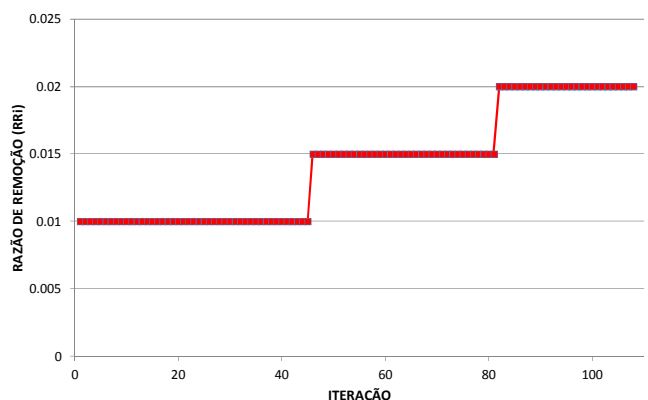


Figura 6 – Razão de remoção no processo evolutivo do Exemplo 1





Com base nos resultados encontrados, observa-se que o algoritmo implementado é capaz de solucionar problemas relacionados à dependência de malha, além de obter topologias semelhantes às indicadas na literatura, como em Kim *et al.* (2002), conforme verifica-se na Figura 2-d.

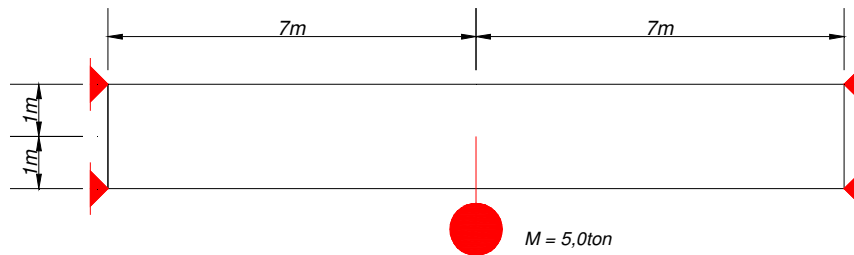
#### 4.2 – Exemplo 2

Este exemplo foi retirado de Porto (2006) que investigou a topologia ótima para a frequência fundamental de uma viga hiperestática com massa não estrutural concentrada, por meio do Método da Homogeneização (Bendsøe e

Kikuchi, 1988). As dimensões da estrutura são: vão de 14 m, altura de 2 m e espessura de 1 m, conforme ilustração na Figura 7. As propriedades do material são: módulo de elasticidade igual a 100 MPa, coeficiente de Poisson igual a 0,30 e densidade igual a 1000 kg/m<sup>3</sup>. A restrição para o volume é aproximadamente 50% do volume original.

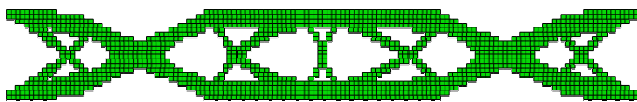
Em se tratando do ESO em nível de tensões, os critérios utilizados para análises de frequências naturais são os mesmos utilizados nas análises estáticas, desde que as tensões a serem avaliadas durante o processo evolucionário, sejam provenientes do modo de vibração correspondente à frequência natural a ser otimizada.

Figura 7 – Geometria inicial e condições de contorno para a viga do Exemplo 2



A malha foi definida com um total de 2800 elementos e 2981 nós, composta por elementos de membrana de 4 nós do *software* Abaqus (M3D4). Os critérios para remoção dos elementos foram:  $RR_0 = 1,0\%$  e  $ER = 0,5\%$  com um limite de remoção de até 10 elementos por iteração. A Figura 8 apresenta a topologia ótima obtida na análise do problema e um comparativo para um volume final aproximadamente 50% do volume inicial. Observa-se que a topologia encontrada pelo método ESO é muito similar à apresentada na literatura. A Figura 9 apresenta o processo evolutivo para o parâmetro razão de remoção  $RR_i$ .

Figura 8 – Topologias ótimas para a estrutura do Exemplo 2

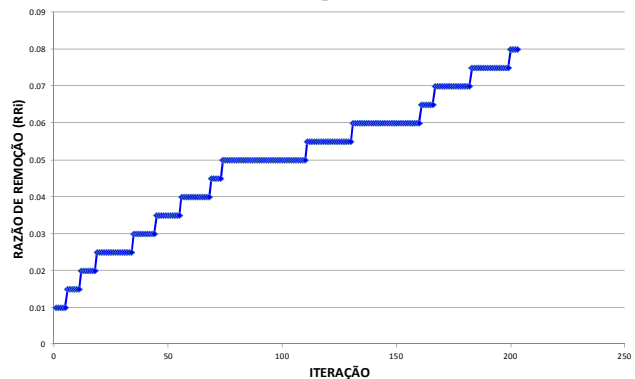


(a) Topologia final alcançada com a execução do ESO



(b) Topologia obtida em Porto (2006) utilizando o Método da Homogeneização

Figura 9 – Evolução da razão de remoção para o problema do Exemplo 2



A evolução das três primeiras frequências naturais da estrutura durante o processo evolucionário é ilustrada na Figura 10. Ressalta-se que mesmo com uma redução de aproximadamente 50% do volume de material, a frequência fundamental permaneceu sem grandes alterações, iniciando com 2,10 Hz e finalizando com 2,12 Hz. Vale destacar que, apesar da diferença sutil entre a geometria encontrada e a geometria indicada na literatura, observa-se que os valores para a frequência fundamental final foram os mesmos indicados em Porto (2006).

Figura 10 – Evolução das primeiras frequências para Exemplo 2

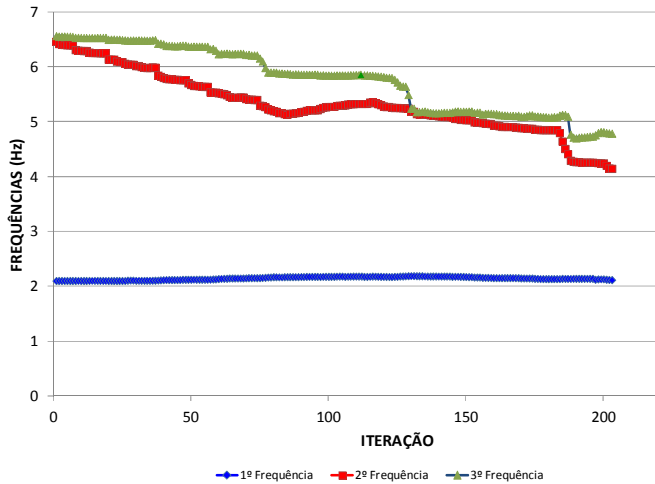
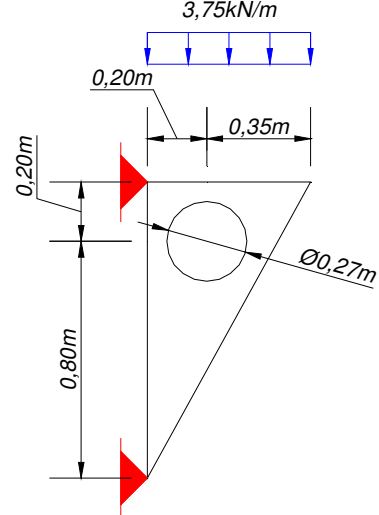


Figura 11 – Concepção geométrica inicial

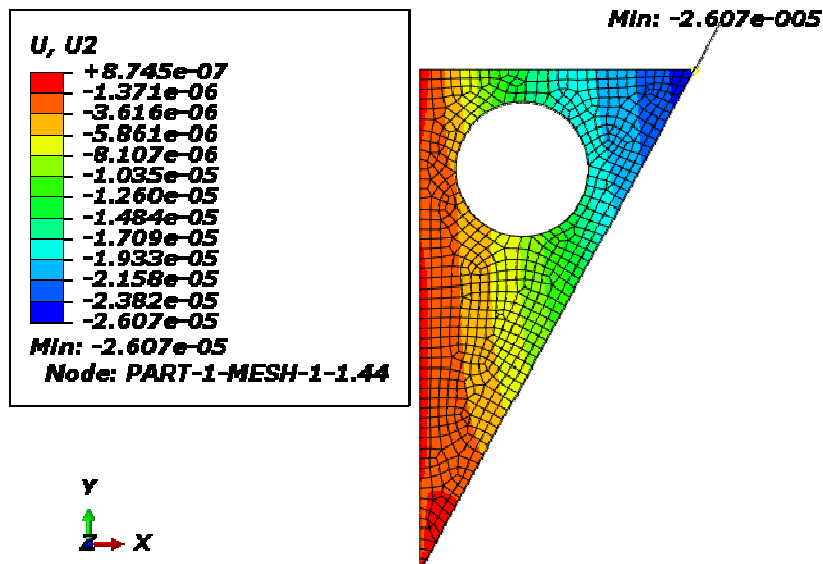


### 4.3 – Exemplo 3

Este exemplo aborda a concepção de uma chapa de aço em balanço sujeita a uma ação distribuída de igual a 3,75 kN/m. As propriedades da estrutura são: espessura igual a 10 mm, módulo de elasticidade de 205 GPa e coeficiente de Poisson de 0,29. Esta chapa servirá de apoio para o gerador elétrico de uma turbina eólica. O objetivo é a otimização topológica para redução no peso do suporte metálico. Uma primeira concepção foi idealizada com a inserção de um furo de alívio, conforme ilustrado na Figura 11, considerando-se uma redução de volume de aproximadamente 20% do volume da chapa triangular inicialmente proposta.

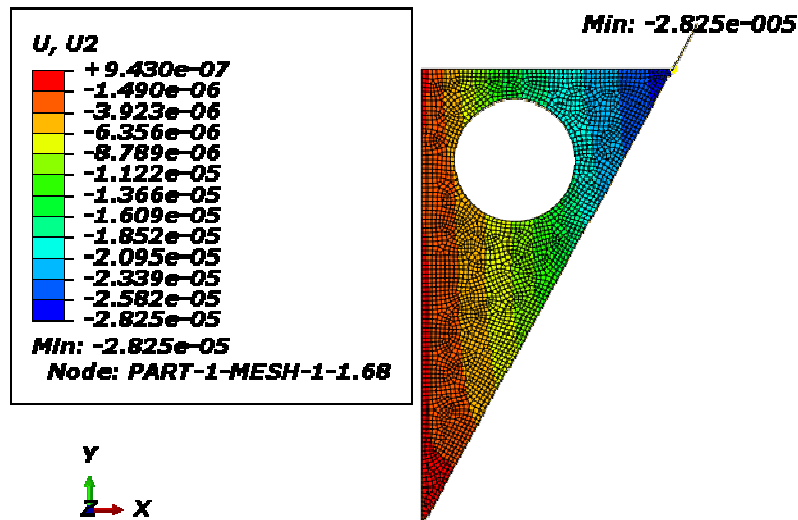
Para a determinação dos deslocamentos verticais resultantes consideram-se valores médios dos nós dos elementos finitos, sendo que a estrutura com furo foi modelada com elementos de membrana de 8 (oito) nós (M3D8) em duas geometrias de MEF no *software* Abaqus. A primeira geometria conta com um total de 630 elementos e 2052 nós, enquanto que a segunda geometria contabiliza 2487 elementos e 7761 nós. A Figura 12 indica os deslocamentos obtidos para este tipo de concepção nas duas modelagens via MEF.

Figura 12 – Deslocamentos verticais obtidos para a primeira topologia proposta



(a) Malha de MEF para 630 elementos M3D8



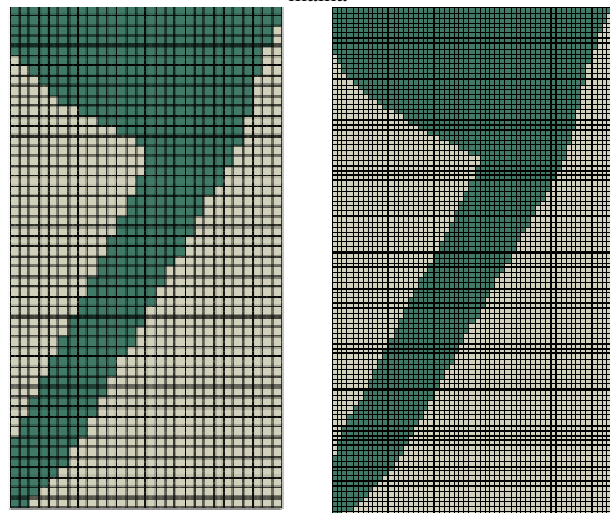


(b) Malha de MEF para 2487 elementos M3D8

Para a obtenção de uma segunda concepção estrutural otimizada por meio do ESO, definiu-se um domínio de projeto em formato retangular com dimensões 1 m por 0,55 m e aplicou-se o algoritmo evolucionário com as seguintes parametrizações:  $RR_0 = 1,0\%$  e  $ER = 0,5\%$ . Duas densidades de malhas de MEF foram analisadas no *software* Abaqus com elementos de membrana de 8 (oito) nós (M3D8). O primeiro modelo foi composto por um total de 1400 elementos e 4357 nós e o segundo modelo composto por um total de 5500 elementos e 16811 nós. Ambas as análises estão representadas na Figura 13 para um volume final cerca de 40% do volume inicial, equivalente ao volume de material da chapa com furo. Para ambos os casos, os elementos na tonalidade escura indicam a região mais solicitada e elementos na tonalidade clara indicam a região menos solicitada do domínio de projeto predefinido.

Da mesma forma como na primeira concepção, foi possível executar uma estrutura discretizada em elementos finitos submetida à ação distribuída vertical de 3,75 kN/m para determinação dos deslocamentos correspondentes para ambos os modelos de MEF. A Figura 14 mostra os valores alcançados para os deslocamentos verticais.

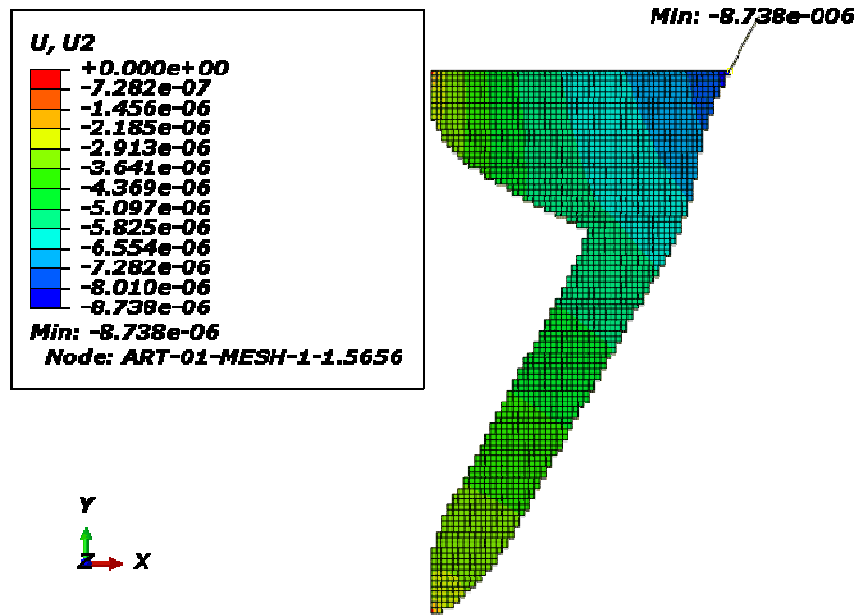
Figura 13 – Domínio de projeto para atuação do algoritmo ESO e concepção otimizada obtida para duas densidades de malha



Diante dos resultados, nota-se que a concepção obtida pelo método ESO tende para o resultado tradicional do tipo mão-francesa. Desta forma, verifica-se que, apesar dos deslocamentos serem muito pequenos, a estrutura que apresentou menor deslocamento, em valor absoluto, foi a estrutura obtida pelo método ESO. A diferença entre os dois resultados, em termos de deslocamentos verticais máximos absolutos, é cerca de três vezes.

Figura 14 – Deslocamentos verticais obtidos para a topologia otimizada.

(a) Malha inicial com 1400 elementos M3D8



(b) Malha inicial com 5500 elementos M3D8

## CONCLUSÕES

Observa-se que a metodologia de otimização proposta apresenta um conceito muito simples e de fácil implementação em *softwares* comerciais de alto desempenho. Na análise dos exemplos, verificou-se coerência com os estudos disponíveis na literatura e que as principais instabilidades numéricas podem ser controladas na modelagem computacional do problema. Além disso, nota-se que para o último exemplo, a topologia ótima se aproxima para uma disposição em mão-francesa e que, para a mesma quantidade de material proposta com o conceito de inserção de um furo de alívio, foi possível obter deslocamentos menores para a estrutura oriunda do algoritmo ESO.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelos apoios financeiros.

## REFERÊNCIAS

- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: Theory, Methods and Application**. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA A.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 21, p. 239-251, 1996. [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(95\)00043-S](https://doi.org/10.1016/0168-874X(95)00043-S).

COUTINHO, K. D. **Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, Rio Grande do Norte, 2006.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard Patterns in Layout Optimization. **Structural Optimization**, v. 10, p. 40-45, 1995. <https://doi.org/10.1007/BF01743693>.

HUANG, M. W.; ARORA, J. S. Optimal design with discrete variables: Some numerical experiments.

**International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 165-188, 1997.

[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970115\)40:1<165::AID-NME60>3.0.CO;2-I](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970115)40:1<165::AID-NME60>3.0.CO;2-I).

JOG, C. S.; HABER, R. B. Stability of finite element model for distributed parameter optimization and topology design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 130, p. 203-226, 1996.

[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00928-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00928-0).

KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities. **AIAA Journal**, v. 40, n. 4, p. 739-744, 2002. <https://doi.org/10.2514/2.1706>.

<https://doi.org/10.2514/3.15120>.

LI, Q.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, p. 230-239, 2001.

<https://doi.org/10.1007/s001580100140>.

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Optimal topology selection of continuum structures with stress and displacement constraints. **Proceedings The Seventh East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction**, Kochi, Japan, p. 27-29, 1999.

LIMA, M. L. R. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. Dissertação (Mestrado), Escola politécnica da Universidade de São Paulo – USP, 2011.

PORTO, E. C. B. **Método da homogeneização aplicado à otimização estrutural topológica**. Dissertação (Mestrado), Unicamp, Campinas, SP, 2006.

QUERIN, O. M. **Evolutionay structural optimization stress based formulation and implementation**. Ph.D. Dissertation. Sydney, Australia: University of Sydney, 1997.

SANCHES, R. P. **Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais**. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, 2011.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2002.

SIGMUND, O. On the design compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, v. 25, p. 493-524, 1997.  
<https://doi.org/10.1080/08905459708945415>.

SIGMUND, O.; PETERSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, p. 68-75, 1998.  
<https://doi.org/10.1007/BF01214002>.

SILVA, E. C. N. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas**. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP, São Paulo, SP, 2001.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais**. Dissertação (Mestrado). Ouro Preto - MG: Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas, 2009.

VALLIAPPAN, S. **Continuum mechanics fundamentals**. A.A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1981.

XIE, M. Y.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computer & Structures**, v. 49, p. 885-896, 1993.  
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90035-C](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90035-C).

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, p. 80-83, 2001.  
<https://doi.org/10.1007/s001580050170>.