



## A abordagem de funções em livros didáticos de matemática no período anterior ao Movimento da Matemática Moderna

The approach to functions in mathematics textbooks before the Modern Mathematics Movement

El enfoque de las funciones en los manuales de matemáticas antes del Movimiento de la Matemática Moderna

Eduardo Gonçalves dos Santos  
Universidade Federal da Paraíba (Brasil)  
<https://orcid.org/0000-0002-8582-6826>  
<http://lattes.cnpq.br/3187778981179297>  
[eduardo@mat.ufpb.br](mailto:eduardo@mat.ufpb.br)

Kelyane Barboza de Abreu  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (Brasil)  
<https://orcid.org/0000-0001-7485-1762>  
<http://lattes.cnpq.br/9795105644885809>  
[kelyane.abreu@ufersa.edu.br](mailto:kelyane.abreu@ufersa.edu.br)

### Resumo

O propósito desse trabalho é analisar de que modo os autores de livros didáticos no Brasil para o colégio se apropriaram da noção de função no período que antecede ao início da década de 1960 que coincide aproximadamente com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna. Argumentaremos que essa noção foi por eles apropriada de forma a sanar parcialmente um problema detectado por Felix Klein no ensino da matemática na Alemanha: o fenômeno da Dupla Descontinuidade. Faremos isso através da análise de um conjunto de sete coleções de livros didáticos que circularam no Brasil no período considerado.

**Palavras-chave:** Funções; Livro didático; Matemática Moderna.

## Abstract

The purpose of this paper is to analyze how Brazilian high school textbook authors appropriated the notion of function in the period leading up to the early 1960s, which coincides roughly with the emergence of the Modern Mathematics Movement. We will argue that this notion was appropriated by them in order to partially remedy a problem detected by Felix Klein in the teaching of mathematics in Germany: the phenomenon of Double Discontinuity. We will do this by analyzing a set of seven textbook collections that circulated in Brazil during the period in question.

**key words:** Functions; Textbook; Modern Mathematics.

## Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar cómo los autores de libros de textos escolares en Brasil se apropiaron de la noción de función en el período previo a principios de la década de 1960, que coincide aproximadamente con el surgimiento del Movimiento de Matemática Moderna. Sostendremos que esta noción fue considerada por ellos para remediar parcialmente un problema detectado por Felix Klein en la enseñanza de las matemáticas en Alemania: la especificidad de la Doble Discontinuidad. Lo haremos a través del análisis de un conjunto de siete colecciones de libros de texto que circularon en Brasil durante el período considerado.

**Palabras clave:** Funciones; Libro de texto; Matemáticas modernas.

## Introdução

O objeto função possui uma longa história, quer quando visto sob a ótica do objeto matemático em si, quer quando visto como conteúdo escolar. No que diz respeito ao objeto matemático, seu surgimento já pode ser detectado – mesmo que de maneira inconsciente – nos processos primitivos de contagem. Entretanto, as discussões mais consistentes e conscientes sobre a sua conceituação começam a surgir principalmente após o advento do Cálculo Diferencial e Integral, com os trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Do ponto de vista do conteúdo escolar, as discussões sobre a sua presença no currículo remontam ao final do século XIX e têm na figura do matemático Felix Klein, um dos seus precursores. De acordo com Ponte,

O papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências (PONTE, 1990, p.6).

Nesse sentido, uma problematização acerca do ensino de funções no Brasil acabou por nos levar a uma investigação de caráter histórico sobre esse tema. Nesse ponto, a fala de Valente nos instigou:

De outra parte, o diálogo da produção histórica com o presente, com o dia a dia das salas de aula, não pode ser relegado por uma produção sem comprometimento com a contemporaneidade. Há que ser realizado o diálogo dessa produção com o presente. Não há como escapar disso, já que é desse presente que nascem as interrogações de pesquisa. Mas esse diálogo deve ser problematizador. Um diálogo problematizador diz respeito à desnaturalização dos elementos presentes no cotidiano das práticas pedagógicas, que envolvem o ensino de matemática. Essa é sempre uma tarefa de qualquer historiador: revelar o quão cheios de historicidade estão elementos do presente que parecem sempre terem sido do modo como são (VALENTE, 2007, p.38).

Ao investigarmos o contexto histórico da disciplina de matemática no Brasil, percebemos diversos movimentos reformistas ocorridos ao longo do tempo. Eles tiveram seu início a partir da unificação das disciplinas álgebra, aritmética e geometria, antes tratadas de maneira independente. Tal processo resultou na criação da disciplina matemática e aconteceu em 1929, tendo no professor Euclides Roxo um de seus principais defensores. Além dessa junção, Roxo também defendia a inclusão do conceito de função no ensino secundário. No plano de ensino mais geral, ocorreram entre as décadas de 1920 até 1950 as Reformas Francisco Campos (1931), Capanema (1942) e Simões Filho (1951). A partir da década de 1960 eclode o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, tendo como uma das figuras centrais o professor Osvaldo Sangiorgi. Esse movimento buscava uma visão diferente para o ensino da Matemática, tanto na forma como os conteúdos eram transmitidos, como nos conteúdos em si. Nesse processo, o tema Funções passou a coexistir tanto no início do ensino secundário, quanto naquilo que se convencionou chamar de colégio.

Alguns trabalhos como o de Braga (2003) e o de Oliveira (2009), analisaram como a ideia de função apareceu em livros didáticos durante esses movimentos, no primeiro ciclo do ensino secundário. Braga (2003) analisou um conjunto de livros didáticos do período, enquanto Oliveira (2009) fez uma comparação entre duas coleções. Nossa objetivo nesse trabalho é

analisar de que modo os autores de livros didáticos no Brasil para o colégio se apropriaram da noção de função no período que antecede ao início da década de 1960, ou seja, antes do MMM, tomando um conjunto de 07 (sete) coleções que foram publicadas nessa época.

## Referencial teórico

O Livro Didático (LD) vem sendo mobilizado frequentemente em diversos trabalhos de História da Educação e de uma maneira bastante diversa, conforme a problemática abordada por seus autores. Objeto de difícil conceituação, mas dotado de especificidades que o tornam único dentro do ambiente escolar, ele desempenha um papel singular quando tomado como fonte histórica. Um dos trabalhos pioneiros no Brasil no campo da História da Educação e que mobiliza essa fonte é o de Circe Bittencourt. De acordo com essa autora,

O livro didático é assunto polêmico, pois gera posições radicais entre professores, alunos e pesquisadores dos problemas educacionais. Os principais consumidores de livros didáticos, professores e alunos, divergem na avaliação do papel exercido por ele na vida escolar. Para uma parcela de professores, o livro didático é considerado um obstáculo ao aprendizado, instrumento de trabalho a ser descartado em sala de aula. Para outros, ele é material fundamental ao qual o curso é totalmente subordinado. Na prática, o livro didático tem sido utilizado pelo professor, independentemente de seu uso em sala de aula, para preparação de ‘suas aulas’ em todos os níveis da escolarização, quer para fazer o planejamento do ano letivo, quer para sistematizar os conteúdos escolares, ou simplesmente como referencial na elaboração de exercícios ou questionários (BITTENCOURT, 2008, p.13).

Com tamanha carga de situações que o adjetivam, não é à toa que o LD receba tanta atenção dos pesquisadores nos mais diversos campos, em particular, da História da Educação. Alain Chopin em seu texto “O historiador e o livro didático” elenca diversas considerações a respeito desse objeto e que utilizaremos para reforçar a nossa aposta em utilizá-lo como fonte. Inicialmente, o autor menciona a característica simbólica que o LD possui, quando o equipara a outros símbolos da cultura nacional. De acordo com Chopin,

O manual está, efetivamente, inscrito na realidade material, participa do universo cultural e sobressai-se, da mesma forma que a bandeira ou a moeda, na esfera do simbólico. Depositário de um conteúdo educativo, o manual tem, antes de mais nada, o papel de transmitir às jovens gerações os saberes, as habilidades (mesmo o “saber-ser”) os quais, em uma dada área e a um dado momento, são julgados indispensáveis à sociedade para perpetuar-se (CHOPIN, 2002, p. 14).

Além disso, como não poderia deixar de ser, o LD é mencionado por Chopin no contexto de sua função de portador do conteúdo a ser ministrado. Indo mais além, o autor ainda identifica uma outra função que o LD possui, que é a de veiculação de sistemas de valores que terminam por incutir nos estudantes uma ideologia, um sistema de crenças, destacando-se como participante do processo de socialização do estudante (CHOPIN, 2002, p.14), bem como instrumento pedagógico, “[...] na medida em que propõe métodos e técnicas de aprendizagem, que as instruções oficiais ou os prefácios não poderiam fornecer senão os objetivos ou os princípios orientadores.” (CHOPIN, 2002, p.14). Como estamos particularmente interessados em um período, a sua utilização como fonte pareceu-nos adequada, uma vez que,

Os manuais prestam-se, portanto, muito particularmente ao estudo serial. Direcionando seu olhar aos manuais, o historiador pode, assim, observar, a longo prazo, a aparição e as transformações de uma noção científica, as inflexões de um método pedagógico ou as representações de um comportamento social (CHOPIN, 2002, p.15).

Pelo fato de que, em alguns momentos, lidamos com mais de uma edição, sentimo-nos confortáveis em podermos encontrar respaldo para essa argumentação, uma vez que,

O manual se inscreve na continuidade: salvo no caso em que uma disciplina venha a ser suprimida dos programas, a produção dos manuais não se esgota jamais: novas obras substituem as edições julgadas obsoletas - esta é a regra nos países que têm uma edição de Estado - ou estabelecem uma concorrência com produtos mais antigos, fartamente reeditados. Mas essas reedições não se justificam somente pela renovação das novas gerações e pelo desgaste material das obras: a reedição não conduz necessariamente a repetitividade. A semelhança dos títulos não encobre necessariamente um conteúdo idêntico e as modificações trazidas ao texto ou à iconografia não ocorrem somente por ocasião de mudanças do programa. (CHOPIN, 2002, p.15).

Dessa forma, esses elementos apontados por Chopin, nos deram o chão firme a partir de onde pudemos trilhar o caminho da análise dos livros didáticos.

Um conceito particularmente útil para nossas análises e que frequentemente aparecerá nesse trabalho é o de apropriação, surgido principalmente a partir dos trabalhos do historiador francês, Roger Chartier. Presente nas discussões sobre História Cultural, esse termo, ao lado de um outro, o de representação, fornece importante aporte teórico para as pesquisas em História da Educação Matemática. No caso específico de apropriação, deixamos o próprio autor falar sobre sua perspectiva:

Um conceito que nos parece útil aqui é o da apropriação, pois, compreendida em termos mais sociológicos do que fenomenológicos, a noção de apropriação torna possível avaliar as diferenças na partilha cultural, na invenção criativa que se encontra no âmago do processo de recepção (CHARTIER, 1992, p. 232-233).

Dessa forma, e aqui isso é bastante importante, o mecanismo da apropriação, em sendo posterior ao da recepção, possibilita entender como, aquilo que os autores de livros didáticos recebem de informação durante seu processo formativo ou até mesmo no momento de elaboração de um texto, se converte em um significado. Biccás (2012, p. 286) sintetiza dizendo tratar-se “[...] da construção de sentidos, das formas de interpretar.” No nosso caso específico, essa perspectiva calha bem, uma vez que os autores de livros didáticos, também são leitores e, como aponta Biccás (2012, p. 287), é necessário “[...] recuperar o leitor e seu contexto, a fim de buscar o modo com o qual se apropriava dos textos.” Além disso, a manifestação das formas como os autores produziram seus discursos pode ser revelada através da análise dos livros didáticos.

## Alguns procedimentos metodológicos

Para atingirmos os nossos objetivos, foi necessária a localização de livros publicados no Brasil no período considerado. Valemo-nos da tese de Oliveira Filho (2013) em um duplo sentido: nos serviu de baliza para os períodos a serem investigados e possibilitou a identificação da maioria dos livros que estavam sendo produzidos e circulando no período estudado. De fato, o autor apresenta uma evolução da estruturação do ensino da matemática no colégio através de uma divisão em fases. Ao identificar essas fases, lista livros de matemática encontrados e que foram publicados em cada uma delas. Necessário se faz observar que, devido à dificuldade de localização de alguns livros, a edição que conseguimos pode não ter sido publicada na fase em que o Oliveira Filho (2013) a colocou. No Quadro 1, apresentamos as fases e os livros encontrados por ele.

**Quadro 1** – Fases e Livros encontrados no período antes de 1960

Fase	Alguns livros encontrados por Oliveira Filho (2013)
Cursos Complementares (1931-1942)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lições de matemática – Thales e Mello Carvalho – 1938</li> <li>• Pontos de matemática – Gumerindo Lima – 1938</li> <li>• Lições de matemática para médicos e químicos – Alberto Serrão – 1941</li> </ul>
A criação do 2.º Ciclo do Curso Secundário e a consolidação da disciplina escolar Matemática do Colégio (1942-1951)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Matemática 2.º Ciclo – 3.ª Série – 3.ª edição – 1949 – Livraria Francisco Alves.</li> <li>• Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 3.ª Série – Thales Mello Carvalho – 2.ª edição – 1948 – Companhia Editora Nacional.</li> <li>• Curso de Matemática – 3.º Livro – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – 2.ª edição – 1949 – Edições Melhoramentos.</li> </ul>
Estabilização da matemática do colégio (1951 em diante)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• “Matemática 2.º Ciclo – 1.ª Série – 2.ª Série – 3.ª Série Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto”.</li> <li>• Coleção “Matemática para os Cursos Clássico e Científico – 1.º Ano, Colegial – 2.º Ano Colegial – 3.º Ano Colegial – Thales Mello Carvalho – Companhia Editora Nacional”.</li> <li>• Coleção “Curso de Matemática – 1.º Livro Ciclo Colegial – 2.º Livro Ciclo Colegial – 3.º Livro Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder – Edições Melhoramentos”.</li> <li>• Coleção “Matemática – Para o Primeiro Ano Colegial – Para o Segundo Ano Colegial – Para o Terceiro Ano Colegial – Ary Quintella – Companhia Editora Nacional”.</li> <li>• Coleção “Matemática” – 1.ª Série – Curso Clássico e Científico – 2.ª Série Curso Clássico e Científico – 3.ª Série – Curso Clássico e Científico – Edison Farah, Omar Catunda, João Batista Castanho e Benedito Castrucci.<sup>1</sup></li> </ul>

**Fonte:** Elaborado pelos autores

No processo de análise dos livros didáticos, estabelecemos seis categorias que constituem o suporte que nos ajudará chegar às nossas conclusões. As categorias estabelecidas são: **Variáveis, Intervalos/Campo de Variabilidade, Correspondência/Campo de Existência da função, Exemplos, Funções Elementares/Representação Gráfica e Exercícios**. Cada uma delas está presente no capítulo onde são estudadas funções, em cada livro analisado, com um grau maior ou menor de profundidade, dependendo da opção do autor. As conclusões serão obtidas mediante o confronto da análise das categorias elencadas com as ideias que permearam o movimento reformista capitaneado por Felix Klein a fim de identificarmos sob que perspectiva cada autor se apropriou do tema função, buscando assim um entendimento a respeito da afinidade entre elas.

<sup>1</sup> Essa coleção não foi mencionada por Oliveira Filho (2013) em seu trabalho.

## Felix Klein e o pensamento funcional

É possível afirmar que o início do processo de escolarização do conceito de função na escola básica surgiu a partir das inquietações do matemático alemão Felix Klein. A ideia que permeava esse processo é a do **Pensamento Funcional**. Christian Felix Klein, um dos mais importantes matemáticos do século XIX, nasceu em 25 de abril de 1849 em Dusseldorf, então pertencente ao Império Prussiano.

Uma das mais importantes referências a Klein diz respeito ao seu conhecido Programa Erlangen, de 1872, quando contempla a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um grupo particular de transformações. De acordo com Eves,

Indicado em 1872, com apenas 23 anos de idade, professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlanger, Felix Klein (1849-1925) preparou, de acordo com o costume, uma palestra de apresentação a seus novos colegas de faculdade e um trabalho escrito mostrando interesses de pesquisa em seu campo matemático. A palestra, dirigida a um extenso auditório universitário, expressou a visão pedagógica de Klein da unidade de todo o conhecimento, ideal que uma educação completa não poderia negligenciar em função de estudos particulares. O trabalho escrito, que foi distribuído durante a palestra, destinava-se a seus pares de departamento. Assim, as duas partes da apresentação inicial de Klein revelavam de um lado seu interesse profundo por questões pedagógicas e de outro seu envolvimento sério com a pesquisa matemática (EVES, 2004, p. 605).

Os seus dotes pessoais de matemático talentoso, consciente da importância do aspecto plural da matemática e, acima de tudo, o seu interesse pelo ensino, acabaram por lhe conferir um papel de relevo no processo de modernização no ensino da matemática. Apesar disso, o seu interesse pelas questões relacionadas ao ensino, não surgiram de repente: elas passaram por um processo de modificação de concepções.

Em um primeiro momento, sua crença era de que o ensino da matemática se justificava por questões meramente internas a ela própria, usando como justificativa uma visão romântica a respeito disso (MIORIM, 1998). Ainda em relação a essa fase, seu encantamento pelas virtudes da própria matemática o fazia crer que seu ensino deveria estar presente na formação universitária de todos os estudantes de ciências naturais e medicina (MIORIM, 1998). Um ponto de mudança de rumos na visão de Klein foi, de acordo com Miorim (1998, p.68), o período em que ele trabalhou no Technisch Hochschule de Munique, entre 1875 e 1880, quando participou de um grupo de matemáticos que estava interessado nas relações entre ciência e tecnologia. De acordo com Miorim,

Nos primeiros anos de nosso século, Klein propôs uma renovação do ensino de Matemática baseada em mudanças tanto na escola secundária como nos estudos universitários. Por um lado, defendia a atualização da Matemática na escola secundária, de maneira a ficar mais próxima do desenvolvimento moderno dessa área e, também, dos últimos avanços científicos e tecnológicos. De outro, acreditava que a Universidade deveria modificar a sua proposta de ensino, levando em consideração as necessidades do futuro professor. (MIORIM, 1998, p.69).

Essa perspectiva estava intimamente relacionada com aquilo que Klein denominou de “Dupla Descontinuidade” e que abordaremos posteriormente.

Dessa mudança de rumos no seu pensamento, duas consequências podem ser inferidas. Uma relaciona-se ao fato de que, para a mudança do ensino nas escolas, lançava-se mão de um argumento relacionado a “motivos psicológicos”, que, ele próprio cuidaria de explicar,

O professor deve ser, por assim dizer, algo *diplomático*; tem de conhecer a psicologia das crianças para poder captar o seu interesse, e isso só poderá conseguir se aceitar apresentar às coisas de uma forma intuitiva facilmente assimilável. Dentro da escola, apenas nas classes superiores se pode revestir a doutrina de forma abstrata [...], mas isso [...] deveria também estender-se a todo ensino, mesmo o superior; a matemática sempre deveria ser apresentada relacionada com tudo aquilo que pudesse interessar ao homem e com o que utilizará em sua vida. (KLEIN, *apud* MIORIM, 1998, p.69)

A outra refere-se à introdução de novos conteúdos. A mais importante dessas possibilidades diz respeito ao conceito de função. A partir de 1893, Klein passou a chamar a atenção para a comunidade internacional a respeito de reformulações no ensino da matemática, quando, passou a falar para professores acerca da importância do Pensamento Funcional na matemática escolar. Além de falas, destacam-se, os trabalhos publicados com Götting e Riecke (HAMLEY, 1934). De acordo com Hamley (1934), em Breslau, Klein proferiu uma conferência onde ressaltou a importância do conceito de função. De acordo com ele,

o conceito de função apresentado graficamente deveria formar a noção central do ensino da matemática e que, como consequência natural, os elementos do cálculo deveriam ser incluídos no currículo de todas as escolas de nove classes. (HAMLEY, 1934, p.52)

A partir dessa época, foi instituída a Comissão de Breslauer a fim de formular e definir propostas de reforma, principalmente no que diz respeito ao conceito de função. De acordo com Hamley (1934), as propostas dessa comissão foram apresentadas em uma conferência em Meran, em 1905, em uma forma conhecida como Meraner Lehrplan (em tradução livre, Currículo de Meran). Segundo Hamley (1934, p.53), essas propostas visavam:

alinhar o curso de ensino mais estreitamente com o processo natural de desenvolvimento mental do que anteriormente, desenvolver, na medida do possível, a faculdade de contemplar fenômenos naturais de um ponto de vista matemático e tornar o aluno cada vez mais consciente da continuidade do assunto à medida que ele passa de um estágio para outro - um princípio psicológico, utilitário e didático. (HAMLEY, 1934, p.53)

Nesse mesmo documento, ainda de acordo com Hamley (1934), esse intento seria conseguido a partir de um princípio unificador que faria com que essa mudança contínua se processasse. Esse princípio baseava-se em uma educação na perspectiva do Pensamento Funcional. A ideia de unificação era cara a Klein, desde o Programa Erlanger, quando ele intentava uma perspectiva unificadora da matemática a partir da Teoria dos Grupos.

A partir daí, Klein então movimenta seus esforços no sentido de divulgar essa perspectiva de ensino, chegando mesmo, no rastro dessas discussões, a afirmar que o conceito de função não era apenas um método matemático, mas a alma e o coração do pensamento

matemático. Enfatiza as possibilidades de se analisar a matemática de um ponto de vista dinâmico, ao contrário de um ensino baseado na geometria sintética de Euclides, bastante em voga na Alemanha de sua época (MIORIM, 1998).

As ideias de Klein tomam dimensão internacional a partir do instante em que a onda reformista chega ao Congresso Internacional de Matemática, tendo sido o primeiro deles em 1897 na cidade de Zurique. A partir desse congresso que, de certa forma, unia a comunidade matemática internacional, passam a ser debatidos também problemas relacionados ao ensino da matemática. Essas questões, que eram tratadas de forma localizada, passam, a partir de então, a ser discutidas de forma mais global. Entretanto, as discussões não frutificaram, conforme Miorim (1998). Isso gerou uma insatisfação e daí toma corpo a criação de uma comissão internacional para estudar as questões relativas ao ensino da matemática. Essa comissão foi criada a partir do IV Congresso Internacional de Matemática realizado em Roma, em 1908, chamando-se Comissão Internacional de Ensino da Matemática. Apesar de não estar presente ao congresso, Felix Klein é indicado para presidir a comissão recém-criada. Entretanto, durante a primeira reunião da comissão em setembro de 1908, na cidade de Colônia, o escopo foi ampliado para todos os níveis de instrução matemática.

Os trabalhos da comissão prosseguiram até 1914, quando eclode a Primeira Guerra Mundial. Esse acontecimento retardou os trabalhos da comissão até 1918, quando o conflito teve fim. Apesar disso, de acordo com Miorim (1998), as atividades relacionadas ao ensino da matemática não foram totalmente afetadas. A mesma percepção já sentida por Klein anos antes de que havia um fenômeno da “Dupla Descontinuidade”, referindo-se ao ensino básico e ao ensino superior, era, segundo entendimento do Comitê Internacional, uma dificuldade a ser transposta. Nesse sentido, ainda segundo Miorim (1998), a introdução do cálculo no ensino básico estava entre as sugestões do comitê, no pós-guerra. Dentro desse contexto, o Movimento Internacional para a Modernização do ensino da Matemática teve Felix Klein como um de seus maiores articuladores.

## O ensino de funções no Brasil

A inserção do conceito de função no ensino secundário brasileiro deu-se pela criação de uma nova disciplina, no ano de 1929, denominada matemática, formada pela unificação de três disciplinas, álgebra, aritmética e geometria, antes tratadas de forma independente. Essa unificação foi motivada pelo movimento internacional de modernização do ensino secundário da matemática, liderado por Felix Klein.

Em 1912, ocorre o V Congresso Internacional da Matemática e Eugênio Barros Raja Gabaglia é designado como representante do Brasil. No entanto, a sua viagem não propiciou nada de concreto em termos de mudanças. De forma paralela, o professor Euclides Roxo é convidado a dar aulas no Colégio Pedro II no ano de 1915. Roxo foi o grande mentor do movimento modernizador no Brasil, tendo encontrado muitas resistências às ideias inovadoras, o que acabou gerando dificuldades para que ocorressem discussões dentro do Colégio Pedro II sobre o que era proposto. Dentre os opositores encontravam-se os professores Raja Gabaglia e Joaquim Inácio de Almeida Lisboa. Com a morte de Gabaglia em 1919 e pela licença temporária de Lisboa durante os três últimos anos da década de 20, a situação de Roxo começa a ficar um pouco mais confortável.

Em 1923, Roxo lança seu livro, “Lições da Aritmética” e esse é considerado um passo importante diante dos seus objetivos. Nesse livro, Roxo já expressava suas ideias, ainda que em pequenos traços. Em 1925, Roxo assume a direção do Externato do Colégio Pedro II. Sua proposta de unificação curricular da matemática foi aprovada na Ata da Congregação do Colégio Pedro II em 14 de novembro de 1927, após muitas discussões. Essa unificação,[...] se fazia necessária para atender principalmente a duas concepções modernizadoras. A primeira

delas referia-se as exigências de se estabelecerem conexões entre os diversos ramos da matemática escolar. (...) A segunda concepção delegava à noção de função com suas representações algébrica, geométrica e tabular o papel de coordenadora dos diversos assuntos da matemática do secundário. (BRAGA, 2006, p.69)

Em 12 de Janeiro de 1929, é assinado o Decreto 18564 que oficializa as propostas modernizadoras defendidas por Roxo. Ainda em 1929, Euclides Roxo, lança o livro *“Curso de Matemática Elementar”*, volume 1, elaborado com as ideias do novo programa e com um novo método de ensino.

No rastro da Revolução de 1930, em 1931, é decretada uma ampla reforma no ensino brasileiro, a Reforma Francisco Campos. Delegado primeiro ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde, Francisco Campos fragmenta o ensino secundário em dois ciclos: o ensino fundamental com cinco anos e o ensino visando a preparação para o ensino superior com dois anos. Quando Vargas assume a presidência, Roxo pede exoneração do cargo de diretor do Externato do Colégio Pedro II, mas no mesmo ano é nomeado por Vargas e Campos como diretor do Internato do Colégio Pedro II e é convidado a participar da organização de uma reforma para o ensino brasileiro. No entanto, todas as suas propostas para inovação do ensino secundário logo voltam a ser criticadas. Com o retorno de Lisboa, é travado intenso debate entre ambos. Em meio às discussões, Roxo destaca o tema funções em um de seus artigos “o conceito de função como eixo axial do ensino”. A intenção de Roxo, segundo Rocha (2001, apud Valente, 2002, p.19) era de “familiarizar desde cedo o aluno com a noção de função, por meio de sua representação gráfica e analítica, e dela fazer o ponto central do ensino, de maneira a possibilitar a conexão entre as diversas partes da matemática.”

Assim, o conceito de função é inserido na matemática escolar nos programas advindos da Reforma Francisco Campos. Essa presença, desde o primeiro ciclo é assegurada por uma política educacional rígida e autoritária.

Em 1934, o Ministério da Educação e Saúde é assumido por Gustavo Capanema. Em janeiro de 1936, Capanema decide realizar um inquérito sobre a educação no Brasil, distribuindo um extenso e detalhado questionário. Além deste, muitos outros meios de pesquisa são realizados por ele, na busca de uma reorganização do sistema de ensino nacional. A Reforma Capanema é promulgada em 9 de abril de 1942, por meio do Decreto 4.244. Esta reforma visava reorganizar a divisão do ensino secundário, continuando com dois ciclos. No entanto o primeiro teria quatro ciclos, conhecido por curso ginásial, e no segundo ciclo, com três anos, que seria o curso colegial, em duas modalidades, clássico e científico. A Portaria Ministerial cria uma comissão para organização do programa de ensino, com Capanema como presidente e Roxo, como um dos integrantes. Havia ainda representantes da Igreja, Arlindo Vieira e dos militares, Ignácio Azevedo Amaral.

No dia 20 de maio de 1942, Roxo envia carta a Capanema com sua proposta para os programas do ensino no curso ginásial. Ao receber esta proposta, Capanema a envia para Vieira e Amaral. Arlindo Vieira faz várias sugestões, e a única exclusão que ele defende é a principal ideia de Roxo. Para ele, incluir a noção de função no curso ginásial seria confundir os alunos naquele momento. Por outro lado, os militares demonstraram concordância com as propostas sugeridas por Roxo. Em 11 de Junho de 1942, a decisão ministerial acata a sugestão de Arlindo Vieira e a noção de função é retirada do ensino ginásial, ou seja, do primeiro ciclo do ensino secundário.

Na década de 1950, entrou em vigor a Reforma de Simões Filho e foi conduzida pelas portarias 966, de 2 de outubro de 1951 e 1045, de 14 de dezembro de 1951. Essa reforma trouxe para o ensino secundário no Brasil, os chamados “Programas mínimos”. Esse programa tinha a intenção de estabelecer um limite mínimo de conteúdos, que todas as instituições escolares teriam a obrigação de implementar. Além de defender a reorganização do currículo da matemática no ensino secundário, a Reforma de Simões Filho propôs um programa de ensino com 3 (três) horas semanais para a disciplina de Matemática. Segundo a portaria 1045, existiam

algumas diferenças com relação aos conteúdos entre o curso clássico e científico, no entanto o conceito de função seria visto em ambos os cursos e apenas na 3<sup>a</sup> série. Diante da instituição desse novo programa para a matemática, o diretor do Externato do Colégio Pedro II, professor Gildásio Amado comenta que

Os programas de ensino secundário eram elaborados por comissões designadas pelo Ministro da Educação. Em 1951, a Congregação do Colégio Pedro II reivindicou que ela própria fizesse os programas das matérias ensinadas no Colégio. O Ministro Simões Filho, foi além: determinou que os Programas do Colégio Pedro II fossem oficiais para todos os estabelecimentos secundários do país. Os programas encaminhados ao Ministro – dizia o presidente da Congregação – “contêm a matéria mínima e permitem que os professores do ensino secundário neles encontrem um roteiro disciplinador, sem prejuízo da liberdade de apresentação dos assuntos de conformidade com as conveniências didáticas”. Eram, portanto, “programas mínimos”. (AMADO, 1973 apud VALENTE, 2008, p.20)

No entanto, os “Programas Mínimos” não obtiveram êxito e foram muito criticados por diversos autores de livros didáticos. Assim, percebemos que houve grandes movimentações no ensino da matemática durante esse período, muitas delas envolvendo a inserção do conceito de função. Um pouco depois, com o surgimento do MMM, as formas como eram aplicados os conteúdos matemáticos passaram a ser questionados e a perspectiva adotada para o ensino de funções incorporou as ideias ligadas a esse movimento, tendo sido adotada em sua abordagem uma visão predominantemente baseada na Teoria dos Conjuntos.

### **Descrição das coleções**

Apresentaremos uma descrição das sete coleções de livros didáticos analisadas, referentes a terceira série do ensino colegial. Além da descrição estrutural do livro, destacamos características externas e apresentamos uma breve biografia dos autores.

#### **Coleção 1: Euclides Roxo; Roberto Peixoto; Haroldo Cunha e Dacorso Netto.**

A coleção Matemática 2º ciclo, também conhecida como o “Livro dos Quatro Autores”, teve Euclides Roxo como um dos seus principais idealizadores. O responsável pelo conteúdo de Álgebra foi Haroldo Lisboa da Cunha que, em 1934, assumiu a Cátedra de Matemática do Colégio Pedro II. Foi Professor da Universidade do Estado da Guanabara (UEG, atual Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ) e em 1960 tornou-se reitor (Silva e Bernardino, 2019). Já o professor Cesar Dacorso Netto foi professor do Instituto de Educação, tendo sido autor de algumas publicações destinadas ao ensino superior. Por último, temos o professor Roberto Peixoto, que também lecionou no Instituto de Educação. Segundo Bernardino,

Essa colocação nos indica que as alterações da edição foram feitas apenas por dois dos quatro autores da obra. Possivelmente, ao adequarem a obra ao programa estabelecido pela portaria 90 de 1951, os autores ficaram impossibilitados de manter a divisão inicial da elaboração da edição da obra entre eles. Dentre os motivos, podemos destacar o falecimento de Euclides Roxo em 1950. Cesar Dacorso Netto

também não participou da elaboração das edições de 1955 e 1956; no entanto, não encontramos nenhuma informação que possa ter ocasionado seu desligamento da reorganização da série. (BERNARDINO, 2016, p. 89-90).

O livro não possui prefácio ou apresentação. Seu conteúdo programático é distribuído seguindo a portaria 1045, 14 de dezembro de 1951, que determina os Programas Mínimos. O fato de os conteúdos não serem dissociados levanta a hipótese de que a obra é a junção de três livros: álgebra, geometria e geometria analítica. Segundo Bernardino,

Essa conjectura de que o livro é constituído por três obras distintas faz sentido quando passamos a olhar para a época em que a obra foi elaborada. A série Matemática 2º ciclo foi publicada logo após a reforma Capanema entrar em vigor. (...) Sabendo, previamente, a maneira como a reforma afetaria o ensino, tratou de elaborar uma coleção a fim de despontar no mercado editorial. Na urgência da elaboração e publicação da coleção, Euclides Roxo estabeleceu uma parceria com outros três autores que, coincidentemente, estudavam áreas distintas da matemática. (BERNARDINO, 2016, p. 81).

Essa certamente é uma das coleções de maior destaque, uma vez que ela, por ser a mais antiga, também tem como um de seus autores o Professor Euclides Roxo que, como já mencionado, teve importante papel nas reformulações do ensino da matemática no Brasil.

## **Coleção 2: Edison Farah, Omar Catunda, João Batista Castanho e Benedito Castrucci.**

O livro "Matemática, 3ª série, curso colegial" foi escrito também por quatro autores, Edison Farah, Omar Catunda, João Batista Castanho e Benedito Castrucci. Os autores têm em comum o fato de terem sido membros do corpo docente da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da USP. Edison Farah foi aluno de doutorado do Professor Omar Catunda, tendo sido nomeado Professor Catedrático Interino de Análise Superior também na FFCL-USP. O professor Benedito Castrucci, em 1942, assumiu a Cadeira de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva, na mesma instituição, e em 1943 defendeu sua tese de doutorado, tendo Omar Catunda como um dos membros da banca (Moraes, p. 59-60, 2008). O professor Omar Catunda foi contratado pela FFCL-USP como assistente de Luigi Fantappiè na disciplina Análise Matemática. Depois de estudar durante um período na Universidade de Roma, retorna ao Brasil e é nomeado professor interino responsável pela cadeira de Análise Matemática e Superior e nomeado Chefe do Departamento de Matemática da FFCL-USP, do qual se torna catedrático após defender a sua tese. Concluiu sua vida profissional na Bahia, onde assumiu o cargo de Diretor do Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal da Bahia (IMFUFBA) (Duarte, 2008). O professor João Batista Castanho também foi professor assistente na disciplina Complementos de Matemática para os cursos de Química, Ciências Sociais e Pedagogia, também na FFCL-USP. Em 1950 defendeu sua tese de doutorado sob orientação do professor Fernando Furquim.

Trata-se de uma coleção que nos pareceu pouco conhecida, pois em Oliveira Filho (2013), ela sequer foi mencionada. Observando a sua estrutura, notamos que o livro apresenta os programas para a terceira série colegial antes de apresentar o índice geral. O conceito de funções, exposto na unidade II do volume 3, ficou a cargo do professor Omar Catunda. Ainda em seu prefácio os autores mencionam que *"Respeitamos as diretrizes do programa oficial (3ª série), acrescentando apenas os complementos indispensáveis ao bom desenvolvimento dos argumentos tratados"*.

### **Coleção 3: Thales de Faria Mello Carvalho**

O livro “Matemática para os cursos clássico e científico, terceiro ano”, foi escrito por Thales de Faria Mello Carvalho. Nascido na cidade do Rio de Janeiro no dia 22 de abril de 1915, teve ampla experiência no magistério, lecionando na escola secundária do Instituto de Educação e na Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade do Brasil. Quando se trata da elaboração de livros didáticos em matemática, essa obra é uma de suas principais. Segundo Brum e Silva,

Essa publicação surgiu após a reforma do ensino secundário promovida pelo ministro Gustavo Capanema, em 1942, procurando atender à portaria ministerial de março de 1943, que exibia os programas oficiais do 2º ciclo do ensino secundário. (BRUM e SILVA, 2022, p. 225).

Em 1969, os três volumes foram reunidos em um único livro e publicado pela Fundação Getúlio Vargas. (Brum e Silva, 2022). Podemos destacar que o volume destinado ao terceiro ano dedica seu primeiro capítulo ao conceito de conjuntos e a ideia de correspondência. Aqui, já percebemos a introdução de termos relativos à teoria de conjuntos.

### **Coleção 4: Jairo Bezerra**

O Professor Manoel Jairo Bezerra iniciou sua trajetória profissional no Colégio Metropolitano, sediado na cidade do Rio de Janeiro, e foi professor da Escola de Comando e Estado Maior da Aeronáutica, do Colégio Pedro II, do Colégio Naval e do Curso de Técnica de Ensino do Exército. Além disso foi Catedrático do Instituto de Educação e professor e proprietário de um Curso Pré-Normal que levava o seu nome. (MACIEL, 2012).

Segundo Bezerra (2010, apud MACIEL 2012), dentre suas coleções de livros didáticos, destaca-se o Curso de Matemática para o primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico. Inicialmente publicado em três volumes, provavelmente foi a primeira obra didática brasileira, ao menos no que diz respeito ao ensino da Matemática, no formato “volume único”. Segundo Bigode e Valente (2003), ao ser perguntado sobre a ideia de fundir os três volumes em um único volume, ele afirma que “A ideia principal era, segundo Jairo, fazer um enxugamento teórico e apresentar muitos exercícios resolvidos” (BIGODE e VALENTE, 2003, p.6). Jairo Bezerra considerava que o sucesso em vendas do seu livro não se dava pela didática em si, mas pela forma como os exercícios eram apresentados, com aplicações imediatas após a apresentação teórica. Ao ser perguntado sobre quais foram as suas referências para a escrita do livro, Jairo afirmava “ter medo de fugir do que dizia o professor Thales de Mello”. Ele considerou utilizar os conceitos daquele autor e as suas ideias da apresentação das lições. (BIGODE E VALENTE, 2003, p. 9-10). Em nossas análises, consideramos a obra em volume único.

### **Coleção 5: Ary Quintella.**

Ary Norton de Murat Quintella foi professor desde 1937 do Colégio Militar do Rio de Janeiro. Com longa trajetória nos meios educacionais, Quintella foi professor, também, do Instituto de Educação no período 1950-60. Seu texto é considerado um dos best-sellers educacionais da sua época e foi um dos grandes nomes da Companhia Editora Nacional (VALENTE, 2008). Sua coleção Matemática é composta de três volumes, um para cada série dos cursos clássicos e científicos.

Na contracapa do volume do terceiro ano colegial o autor afirma que a obra está de acordo com os novos Programas Mínimos, conforme a Portaria 966, de 20/10/1951 e 1045 de 14/12/1951. O conceito de função é apresentado logo no primeiro capítulo do livro e é abordado desde intervalos até representação gráfica de funções. Após o índice geral e índice de exercícios, o livro apresenta, assim como outras coleções analisadas, os Programas de Matemática para o terceiro ano colegial. (VALENTE, 2008)

### **Coleção 6: Algacyr Munhoz Maeder**

Algacyr Munhoz Maeder, nasceu em 22 de abril de 1903, na cidade de Curitiba, tendo iniciado seus estudos nessa cidade. Posteriormente, mudou-se para São Paulo e ingressou no Colégio São Bento. Voltou a Curitiba para concluir o secundário e, finalmente, matricular-se na Faculdade de Engenharia da Universidade Federal do Paraná, onde obteve o título de Engenheiro Civil. (LONGEN, 2007). Ainda segundo Longen,

Algacyr Munhoz Maeder foi autor de 28 livros de Matemática para o ensino escolar brasileiro. Iniciando em 1928, ainda na época dos compêndios, publicou quatro coleções voltadas ao ensino dessa disciplina que foram editadas até o ano de 1962. Esses livros testemunham a transição entre compêndio e livro didático, além de serem registros do nascimento da disciplina de Matemática como unificação de seus ramos. Foram escritos em meio a reformas, decretos e portarias de ensino ocorridas no Brasil. (LONGEN, 2007, p. xi).

O livro “Curso de Matemática, 3º ano colegial”, teve ao todo 8 edições. Da 1ª a 3ª edição as publicações seguiam a Portaria Ministerial no. 177, de 16 de março de 1943. A segunda edição foi lançada em 1949 e, em seu índice, é feita a referência aos conteúdos de acordo com o curso para o qual é destinado, clássico ou científico.

### **Coleção 7: Alberto Nunes Serrão.**

Alberto Serrão foi Docente-livre da Cadeira de Cálculo Infinitesimal, Geometria Analítica e Noções de Nomografia da Escola Nacional de Engenharia. Engenheiro Civil e geógrafo pela Escola Nacional de Engenharia. Ex-Professor chefe da seção de Matemática do Colégio Universitário da Universidade do Brasil. Ex-professor de Matemática do Curso Complementar do Colégio Pedro II, do Instituto de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

A primeira edição do livro “Análise Algébrica” foi lançada em 1940. A segunda edição, lançada cinco anos depois, além de uma breve biografia do autor, encontramos o público-alvo para o qual o volume foi pensado: “alunos do curso científico, das escolas militares, candidatos ao vestibular das escolas de engenharia, química e arquitetura e alunos candidatos às escolas de filosofia”. Além dessa informação, consta ainda a quantidade de exercícios resolvidos, 723.

No prefácio do livro, algumas informações são bastante pertinentes. O autor lista algumas diferenças entre a primeira e segunda edição do volume, dentre elas o aumento de cerca de 250 páginas, ocasionado pela forma como alguns conteúdos foram tratados e pela inclusão de numerosos exercícios.

O capítulo de funções de uma variável. Limites. Continuidade da primeira edição agora é dividido em três outros, tratados de forma extensa. Por fim, o autor afirma que “todas as modificações feitas tiveram sempre como finalidade a melhoria geral do compêndio, tornando-o mais claro e mais preciso sem que perdesse de modo algum o caráter de um trabalho eminentemente didático”.

## Análise das categorias

As categorias elencadas representam, em linhas gerais, a sequência em que o tema de funções é apresentado nos livros das coleções analisadas. Uma vez que elas estão intimamente ligadas ao processo que conduz a uma introdução ao cálculo, elas por si só já servem para nos indicar que o sentido de apropriação das ideias de Klein, no que se referem ao Pensamento Funcional, estavam direcionadas com esse fim.

A ideia de **variável** está associada a um símbolo que representa elementos de um determinado conjunto. Em se tratando de conjuntos numéricos, é uma letra que designa o valor numérico de uma certa grandeza. Aqui vale ressaltar que a coleção 4 não cita a definição de variáveis e que a coleção 5 faz menção aos termos variável contínua e progressiva. A coleção 3 indica uma motivação física na definição de variável, conforme trecho apresentado na figura 1. Aqui um elemento importante a se destacar nessa coleção: a partir do momento em que se lança mão de uma motivação física, entendemos, pelo menos implicitamente, que o autor já vislumbrava uma ideia de variação, crescimento, temas caros ao Cálculo Diferencial e Integral e, dentro de uma perspectiva apontada pelo movimento reformista (GÜTZMAN, 1708, apud KRÜGER, 2019, p. 37).

**Figura 1** – Exemplo sobre variável constante na coleção 3.

**1. Variável real.** Pela observação dos fenômenos físicos temos uma noção intuitiva de grandeza *variável*, isto é, aquela que pode assumir *diferentes valores*, cada um dos quais define, um *estado* dessa grandeza. Por exemplo, a temperatura de uma certa porção de água, em estado líquido, pode assumir um valor qualquer, compreendido entre 0º e 100º centígrados.

Se fizermos abstração da grandeza variável, seremos levados a considerar seu *valor* como um *símbolo*, a que podemos associar cada um dos elementos de um *conjunto numérico*, denominado *domínio* ou *campo de variabilidade*. No exemplo dado acima, o conjunto de todas as temperaturas, compreendidas entre 0º e 100º centígrados, representa o domínio da variável *temperatura da água em estado líquido*.

**Fonte:** Extraído do Volume 3 da Coleção 3, página 31.

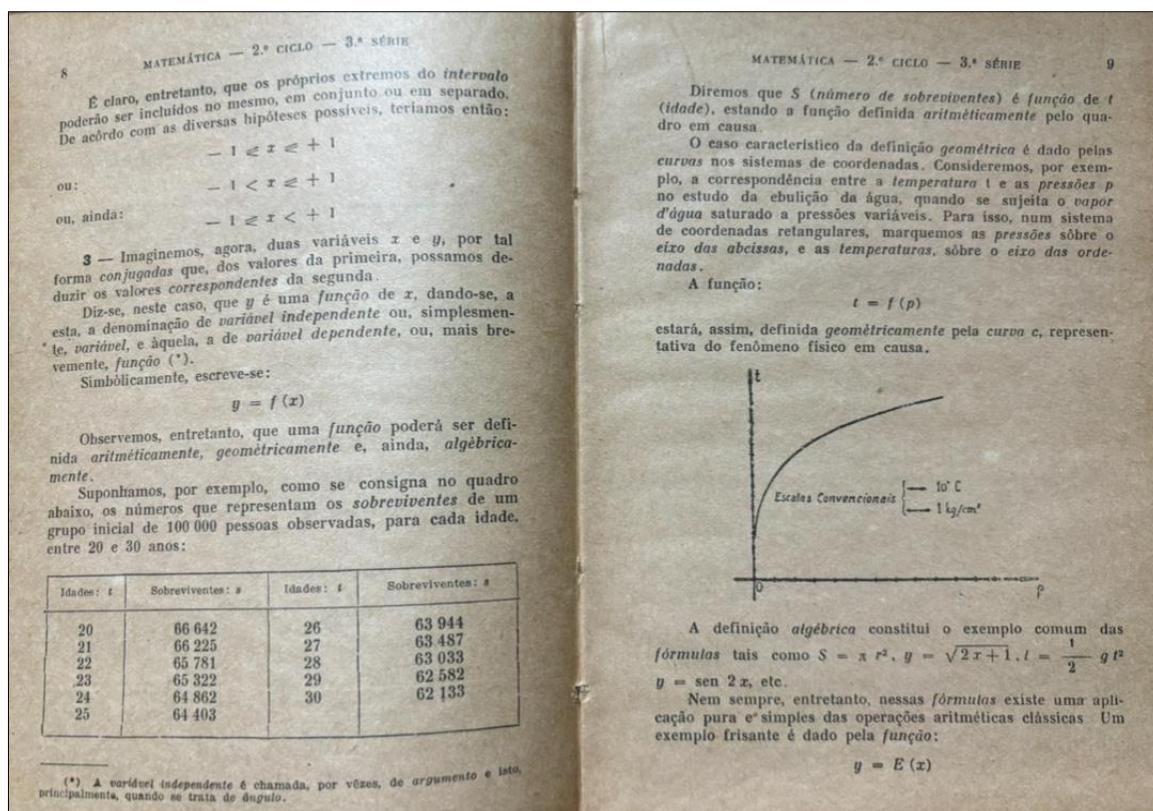
De maneira geral, a definição de **intervalo** não é considerada nas coleções analisadas, pelo menos de forma tão enfática. Algumas coleções não chegam a citá-lo, outras o fazem após a definição de função. A coleção 3, por exemplo, define intervalos em um capítulo anterior quando trabalha com conjuntos numéricos. Importante destacar que a coleção 5 utiliza a noção de épsilons<sup>2</sup> para definição de intervalos. O conceito de **campo de variabilidade** é explorado apenas nas coleções 6 e 7.

<sup>2</sup> A notação de épsilons a que nos referimos diz respeito a tratar os intervalos a partir de uma ideia de vizinhança de um ponto, tema pertencente aos estudos mais avançados de Cálculo Diferencial e Integral. Esse elemento, por si, também serve de indício para uma intenção futura no estudo das funções

De todas as categorias elencadas, talvez a que mais importante seja a de **correspondência**, uma vez que ela é o objeto central na definição de função. As coleções 1,2 e 6 não mencionam a unicidade da lei de correspondência, mas usam o termo “bem determinado” ou “número determinado”, deixando essa informação de maneira implícita. A coleção 3 é a única que não deixa nenhuma margem para questionamentos. As coleções 6 e 7 sugerem que toda função é sobrejetiva, uma vez que definem o conceito de função do domínio sobre sua imagem. Destacamos na definição dada pela coleção 4, que o autor qualifica função como sendo uma lei que faz corresponder uma variável a uma ou mais de uma variável. Disso concluímos que há uma variedade de sentidos em que os autores parecem dar à ideia de correspondência, o que corrobora com o pensamento de Chartier (1990, p.26-27). Estritamente ligado à ideia de correspondência, está a de **Campo de existência da função**. Ela é pouco citada nas coleções. A coleção 3 a define somente após os exemplos. Já a coleção 6 define domínio juntamente à definição de função e a coleção 7, o considera como conjunto numérico real que a variável pode assumir. Mais uma vez indica-se uma pluralidade de sentidos, Biccas (2012) e Choppin (2002, p.15).

Destacamos que, após a definição de função, as coleções 2,3, 4 e 5 apresentam **exemplos** envolvendo essencialmente expressões analíticas o que está de acordo com as ideias de Roxo (ROCHA, 2001, apud VALENTE, 2002, p.19), com um destaque para a coleção 3, que apresenta um exemplo onde a ideia de correspondência é enfatizada. As coleções 6 e 7 não apresentam exemplos. A coleção 1 apresenta três exemplos contextualizados, utilizando a representação algébrica, aritmética e geométrica, conforme a figura 2.

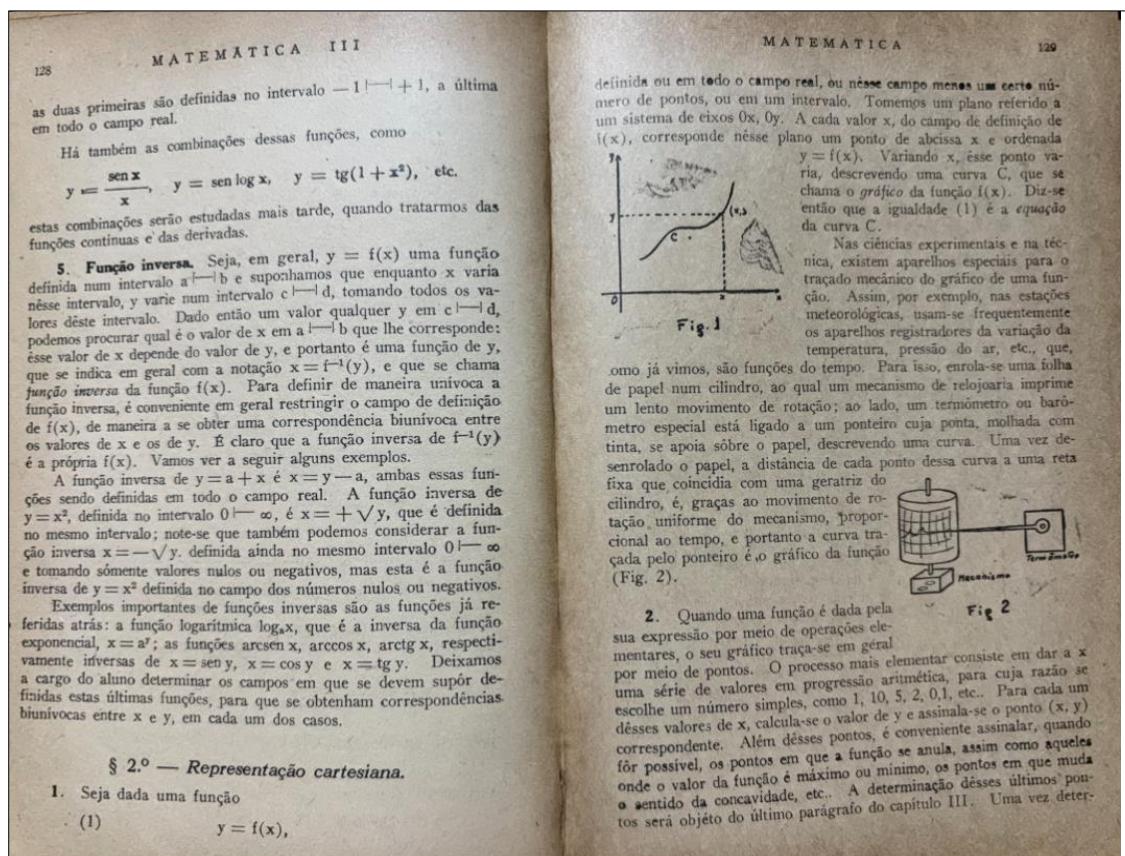
**Figura 2** – Diversas formas de representação de uma função



Fonte: Extraído do volume 3, da Coleção 1, páginas 8 e 9.

A **representação gráfica** das funções é feita de maneira bastante intuitiva, pois a ideia que norteia os autores é a de que o gráfico de uma função pode ser desenhado marcando alguns pontos no plano. Alguns exemplos que podem ser descritos através dessa ideia são explorados nas coleções 1 e 3. Um interessante destaque ocorre na coleção 2, onde os autores se valem de um modelo de aparelho de registro de temperatura a fim de tornar mais concreta a representação gráfica de uma função, onde identificamos uma perspectiva de contemplar um fenômeno da natureza, no sentido apontado por Krüger (2019, p.37).

**Figura 3** – Recurso utilizado para a visualização da ideia de gráfico de uma função.



**Fonte:** Extraído do Volume 3, da Coleção 2, páginas 128 e 129.

As **funções elementares** são as funções polinomiais, trigonométricas, transcendentais e alguns exemplos mais específicos que resultam da combinação destas. Os objetos que dão origem a essas funções, quais sejam os polinômios, seno, cosseno, tangente, bem como potências e expoentes são tratados nos volumes anteriores das coleções, como no caso das coleções 1, 2, 3, 5 e 6. No livro 4, a sua característica de volume único, as menções são feitas dentro do mesmo livro, mas a capítulos anteriores. No caso do livro 7, subentende-se que o leitor já possua essa noção de outras vivências. Isso é justificável, já que o livro se destina a um público que, presumivelmente, já passou pelo colégio. Aqui vimos pouca afinidade entre a forma de apropriação dos autores e os ideais do movimento reformista.

Os **exercícios** variam muito de coleção para coleção, tanto em número quanto à ênfase naquilo que o autor julga mais importante que seja dominado pelo leitor. Entretanto, a maioria deles coloca em elevado grau de importância a determinação do Campo de Definição de uma função, a manipulação com as expressões analíticas e o esboço do gráfico de algumas delas, o que, nesse último caso, surpreende, pois, como já apontado anteriormente, o tratamento rigoroso só pode ser feito a partir do estudo do cálculo diferencial.

## Algumas percepções a partir da análise das categorias

O Pensamento Funcional parece ter sido um ponto da maior importância e interesse para Felix Klein no que diz respeito ao ensino. O seu caráter unificador enquanto objeto matemático pode ter influenciado fortemente nessa crença (KRÜGER, 2019, p.38). Além disso, a ideia do Pensamento Funcional abarcava outros princípios: o psicológico e o utilitário (KRÜGER, 2019, p.38). A síntese desse pensamento está materializada na fala de Schotten, trazida por Krüger:

O Meraner Lehrplan escolheu o conceito de função como um aglutinante. Esse conceito havia se popularizado de álgebra ou aritmética e não era estranho às escolas.... Mas faltava a aplicação sistemática de toda a matemática escolar com base nessa ideia. (LIETZMANN, 1926, p. 231).

A partir dos dados obtidos da análise das coleções e confrontando-os com a percepção de Pensamento Funcional vigente à época, principalmente a partir do olhar de Krüger (2019), fomos levados a concluir que o modo de apropriação das propostas de Klein pelos autores de livros didáticos brasileiros no período considerado, quando olhadas na intenção de inseri-las no nível do ensino do colégio, promove uma tentativa de colocá-las como prolegômenos ao estudo do Cálculo. Há coincidência entre essa percepção e aquela que permeou o pensamento na época do movimento reformista (Krüger, 2019, p. 44). Apesar disso, a perspectiva de inserção do cálculo se daria, para os reformistas, em um ritmo menos intenso que num curso universitário. De acordo com Krüger,

A nova matéria sobre cálculo diferencial e integral não deveria atuar como um tema adicional sobre o currículo. Em vez disso, uma estrutura "orgânica" da matemática escolar seria realizada ao enfatizar o cálculo como um ponto culminante da educação matemática superior. O pensamento em variações e dependências funcionais deve ser praticado e flexibilizado a fim de preparar o aprendizado do cálculo. A educação no hábito do Pensamento Funcional pode, portanto, ser considerada como uma tentativa de estabelecer uma propedéutica de cálculo nas escolas de ensino médio. (KRÜGER, 2019, pg. 45).

No caso dos autores brasileiros, um fato que reforça a crença da posição do estudo das funções diz respeito à própria localização desse conteúdo nos livros. Em todas as coleções analisadas esse tema encontra-se no mesmo volume onde estão incluídos os princípios do Cálculo Diferencial e Integral e a Geometria Analítica, o que, para Tobies (2019, p.15), estava em concordância com as ideias de Klein e que aqui toma um caráter oficial a partir dos "Programas Mínimos". Em alguns casos, as temáticas estão entremeadas entre si, como no caso da coleção 1. A própria forma de abordagem do conteúdo de funções apresentadas nos livros – a partir das categorias que elencamos e que guardam pouca afinidade com as propostas originalmente feitas - parece indicar uma similitude à apresentação de funções em livros específicos de Cálculo Diferencial e Integral, destinados ao ensino superior. Em nosso entendimento isso pode estar relacionado ao fato de que, em ao menos 5 (cinco) coleções, seus autores estavam ligados ao ensino superior.

Um outro fato diz respeito ao tratamento de certa forma resumido que os autores imprimem no momento de tratar de exemplos específicos como as funções elementares. Com efeito, a ideia de dependência funcional, que revelaria uma oportunidade de relacioná-las com fenômenos da natureza (GUTZMER, 1908, apud KRÜGER, 2019, p.37), pouco aparece, a não

ser em alguns exemplos isolados, ficando a atenção dos autores centrada basicamente na expressão analítica. Isso acaba por dar às funções, como as logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, um tratamento essencialmente algébrico, pois frequentemente alguns autores remetem a discussão a volumes anteriores da coleção onde os objetos a elas associados foram apresentados como objetos *per se*, fazendo com que, no momento de olhá-los a partir da perspectiva do Pensamento Funcional, o tratamento seja feito de maneira bastante superficial, muitas vezes em tom de revisão, como no caso da coleção 7. Além disso, o mesmo fato ocorre com vários de seus elementos, como por exemplo, a representação gráfica. Esse fato corrobora com o que apontamos anteriormente: os autores parecem ter sido bastante influenciados pela apresentação de funções feitas em algumas obras de Cálculo.

Há ainda peculiaridades na apropriação por parte dos autores nacionais. Uma delas diz respeito à inclusão de temas como a dualidade entre funções multívocas ou plurívocas e unívocas em que a apropriação dos autores por parte daqueles que lhes serviram de referência não foi de todo completa a ponto de lhes conferir um real significado desse dualismo e a real necessidade de apresentá-lo em um livro didático para o colégio. Com efeito, esse tema cuja apresentação surge sem nenhuma justificativa e que não é sequer mencionado posteriormente, acaba por ficar isolado dentro de cada coleção.

Outra peculiaridade, indica que a forma como os autores brasileiros viam o conceito de função também estava ligada àquilo que Klein denominou de “Dupla Descontinuidade”. Havia por parte dele um desconforto com o ensino de matemática, materializado naquilo que chamou de “Dupla Descontinuidade”. Uma delas era a de que a matemática aprendida na escola secundária não estava se prestando a atender as demandas daquilo que se ensinava nas universidades ou escolas técnicas e, de acordo com o próprio Klein, em tradução de Miorim (1998, p. 60):

o jovem estudante encontrava-se ao começar seus estudos [universitários] ante problemas que não lhe recordavam nada das coisas que até então o tinham ocupado, e, portanto, esquecia imediata e completamente todas elas" (KLEIN, 1927, v. 1, p. 1. Trad. da autora).

A outra refere-se à formação do professor, que sentia falta de uma conexão maior com os saberes que ele necessitaria para dar conta de sua missão em sala de aula. O mesmo Klein, em tradução de Miorim (1998, p.60), afirma que o professor recém-formado guardaria pouca ou nenhuma lembrança frutífera de sua formação, uma vez que do ensino tradicional e dos estudos universitários “restaria apenas uma recordação mais ou menos agradável, mas que não exerceia nem a mais remota influência em seu desempenho no magistério”. De acordo com Hamley, Klein afirma que

Os elementos do cálculo infinitesimal, tratados adequadamente, fornecem um material muito mais adequado para a educação matemática na escola do que aquela matéria heterogênea e sem vida, que hoje em dia é tão repelente para os meninos que não têm nenhuma habilidade especial para a matemática. Além disso, o cálculo é indispensável para uma compreensão clara dos fenômenos físicos numéricos e, do ponto de vista do treinamento mental, é um elemento essencial da educação matemática. (HAMLEY, 1934, p.54)

De acordo com nossas análises, os autores brasileiros intentaram sanar, pelo menos em uma direção, essa problemática identificada por Klein.

## Conclusões

Pudemos a partir do estudo acima constatar que houve dois tipos de manifestação da ideia de Pensamento Funcional no ensino secundário brasileiro, a partir de alguns livros didáticos que circularam no período anterior ao MMM. Um mais ligado à busca da introdução desse tema, a partir da ideia de “Pensamento Funcional”, como pode ser constatado nas pesquisas de Braga (2003) e Oliveira (2009). Outro visando utilizá-la como pano de fundo para apresentar uma proposta para solucionar parcialmente aquilo que Klein chamou de fenômeno da “Dupla Descontinuidade”. Intentamos futuramente aprofundar as análises a respeito da apresentação de funções em outros períodos que abarquem, tanto o MMM como o período em que o movimento apresentou uma deflexão.

## Referências

- BERNARDINO, Camila, Libanori. *Números complexos: Um estudo histórico sobre sua abordagem na coleção Matemática 2º ciclo*. 2016. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, 2016.
- BICCAS, Maurilane de Souza. Roger Chartier: contribuições para a história da educação. In: LOPES, E. M. T.; FARIA FILHO, L. M. de.; (Org.). *Pensadores sociais e história da educação II*. 2ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012, v. 1, p. 269-296.
- BIGODE, Antonio José Lopes & VALENTE, Wagner Rodrigues. (2003). O Tijolão, o Bezerrão: histórias de Jairo Bezerra, histórias da Educação Matemática. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, [s.l.]. Ano X, n. 13, 4-12.
- BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. *Livro didático e saber escolar (1810-1910)*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008, p. 239.
- BRAGA, Ciro. *O processo inicial de disciplinarização de função na matemática do ensino secundário brasileiro*. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.
- CHARTIER, Roger. *A história cultural*. Entre práticas e representações. Lisboa: Difel, 1990.
- CHARTIER, Roger. Textos, impressão, leituras. HUNT, Lynn. *A nova história cultural*. São Paulo: Martins Fontes, p. 211-238, 1992.
- CHOPPIN, Alain. O historiador e o livro escolar. *Revista História da Educação*, p.5-24, 2002.
- DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva. Omar Catunda e os debates sobre o ensino secundário de matemática na década de 1940. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 13, 101-114, 2008.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, 2004.
- HAMLEY, Herbert Russell. Relational and functional thinking in mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics*. Yearbook 9, 1934.

KRÜGER, Katja. *Functional thinking: The history of a didactical principle. The legacy of Felix Klein*, p. 35-53, 2019. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_3)

LONGEN, Adilson. *Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática*. 2007. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, 2007.

MACIEL, Leandro Silvio Katzer Rezende. Manoel Jairo Bezerra: depoimentos em vida. *Zetetike*, 20(1), 2012.

MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da educação matemática*. Atual Editora, 1988.

MORAES, Carlos Roberto. Uma história da lógica no Brasil: A época dos pioneiros. *Revista Brasileira de História da Matemática*. v. 8, n. 15, 57-73, 2008.

OLIVEIRA FILHO, Francisco. *A matemática do colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar*. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, Alexandre Souza. *A abordagem do conceito de função em livros didáticos ginásiais: Uma análise em tempos modernos (décadas de 1960 e 1970)*. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirantes de São Paulo, 2009.

PONTE, João Pedro. O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*. n. 15, 3-9, 1990.

ROCHA, José Lourenço. *A Matemática do curso secundário na Reforma Francisco Campos*. 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – RJ, 2001.

SILVA, Circe Mary Silva & BRUM, Ana Paula Rodrigues. Contribuições de Thales de Faria Mello Carvalho para a educação matemática no século XX. *Vidya*, v.42, n.2, 217-231, 2022. DOI: <https://doi.org/10.37781/vidya.v42i2.4352>

SILVA, Heloísa & BERNARDINO, C. L. À elite, uma terceira natureza de números na Coleção Matemática 2º Ciclo. *Zetetike*, 27, e019017, 2019. DOI: <https://doi.org/10.20396/zet.v27i0.8654316>

TOBIES, Renate. Felix Klein—Mathematician, Academic Organizer, Educational Reformer. In: Weigand, HG., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., Schubring, G. (eds) *The Legacy of Felix Klein*. ICME-13, Monographs. Springer, Cham. p. 5-20, 2019. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_1)

VALENTE, Wagner Rodrigues. Educação Matemática e Política: a escolarização do conceito de função no Brasil. *Educação Matemática em Revista*. v. 12, n.1, p. 16-20, 2002.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. *Revemat: Revista Eletrônica de matemática*. v.2, n.1, p.28-49, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e Educação matemática: uma história inseparável. *Zetetike*, 16(2), 139–162, 2008.