Obutchénie
Revista de Didática e Psicologia Pedagógica

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

Questões psicológicas em problemas de Matemática[1]

On psychological issues in math problems

Yakov I. Abramson[2]

RESUMO
Alguns dados psicológicos baseados em resultados obtidos na resolução de problemas matemáticos que incluem componentes psicológicos, como a autorrestrição, às vezes são irrelevantes devido a diferentes razões. Ocasionalmente, o possível erro em grande parte é causado por questões mal formuladas e às vezes, principalmente em pré-escolares e alunos do ensino fundamental, se confunde com sua insuficiente proficiência em operar com conceitos matemáticos pertinentes ao problema. No artigo, são oferecidos exemplos de solução desses problemas, introduzindo um conjunto de perguntas que precedem a formulação da questão.

Palavras-chave: Problemas matemáticos. Conceitos geométricos.

ABSTRACT
Some psychological data based on results returning back from solving math problems which include psychological component such as self-restriction is sometimes irrelevant due to different reasons. Sometimes the possible error in great deal is caused by ill posed question and sometimes, especially regarding preschoolers and elementary school students it is mixed with their insufficient proficiency in operating with math concepts pertaining to the problem. In the article are also offered samples of fixing these issues by introducing set of questions preceding statement of the question.

Keywords: Math problems. Geometrical concepts.

Foi por volta de 1960, quando eu tinha 6 anos de idade e ainda não frequentava a escola, que P. Ya. Galperin, em cooperação com seu estudante de doutorado L. S. Georgiev, da Bulgária, estava publicando trabalhos sobre o ensino de matemática básica para pré-escolares. Eu era uma pessoa adequada para experimentos nessa área. Eu mal sabia contar e ler (na época, isso era normal para meninos da minha idade), mas era considerado "apto" pelos meus avós, talvez por

[1] Versão em português por Alison Luan Ferreira da Silva. E-mail: professoralisonluan@gmail.com.

[2] Yakov Abramson se formou em 1976 pela Universidade Estatal de Moscou, Faculdade de Matemática e Mecânica, com especialização em matemática. De 1976 a 1989, trabalhou como programador e engenheiro de TI em centros de informática. Em 1989, iniciou a carreira docente, inicialmente em círculos de matemática no contraturno escolar, e depois em escolas privadas e públicas. Desenvolveu seu próprio currículo básico e abordagem pedagógica. Publicou três manuais e mais de 20 artigos sobre educação, todos, exceto um, em russo. Atualmente, está desenvolvendo um curso online de matemática correspondente ao publicado nos manuais, também em russo. Tem ensinado jovens educadores a utilizar o método de formação por etapas das ações mentais de P. Ya. Galperin. Existem dois sites relacionados a essas informações, ambos em russo: https://yabramson.ru/ e matematika-abramson.com. Orcid: https://orcid.org/0009-0007-1204-2960. E-mail: yakovabramson@mail.ru.

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

causa do meu gosto por diferentes tipos de brincadeiras. Então, às vezes, Piotr Yakovlevich e seus colegas me chamavam e me ofereciam uma questão. Eles estavam testando o papel do fator psicológico na tomada de decisões durante a resolução de problemas lógicos. Como exemplo, lembro-me do seguinte episódio.

Deram-me duas caixas idênticas e disseram que uma era feita de algum tipo de pedra e a outra de algodão prensado. Em seguida, veio a pergunta: "Qual delas é mais pesada?"

Eu hesitei um pouco e, de maneira irresoluta, apontei para a caixa de pedra. Meu avô ficou encantado, assim como seu convidado. Ele me explicou que ambas tinham o mesmo peso, que a pedra era pedra-pomes e o algodão tinha sido prensado a ponto de se tornar tão rígido que podia competir até com alguns tipos de pedra. A ideia por trás do experimento era que o conhecimento prévio sobre os materiais, fornecido antes da pergunta, predeterminava a resposta seguinte.

Eu me lembro da sensação que tive na época. Não foi a surpresa de descobrir que, em alguns casos, o algodão pode ser tão pesado quanto algum tipo de pedra (ou até mais pesado). Foi a sensação de que havia algo errado na própria pergunta. Para mim, parecia uma espécie de trapaça. Claro que eu era muito jovem para entender por que tive essa sensação e, sendo um garoto muito brincalhão, não a mantive na memória por muito tempo.

Havia muitas outras coisas engraçadas para fazer. Mas, muitos anos depois, quando me formei em uma escola de ensino médio de matemática e física e me graduei na Universidade Estatal de Moscou com especialização em matemática, essa sensação voltou à tona e eu percebi o motivo. A razão era simples: a própria questão, como foi formulada, não admitia aquela resposta! A pergunta foi apresentada como uma dicotomia, com a escolha entre duas opções, e a resposta correta estava fora dessas duas opções!

Outro exemplo do mesmo tipo era a pergunta: o que é mais pesado, 1 kg de ferro ou 1 kg de madeira? Nesse caso, a questão, tal como foi formulada, é duvidosa por si só: estamos nos referindo à massa ou ao peso deles? Se for ao peso, então onde (isso depende!) – no ar, no solo da Terra, na água ou no vácuo? Nos dois primeiros casos, a resposta correta para dois objetos de mesma massa seria

Obutchénie
Revista de Didática e Psicologia Pedagógica
DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

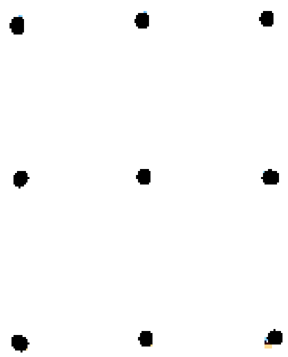
diferente do esperado, como a física nos ensina: o que tiver maior volume pesará menos. Mas suponha que negligenciemos todos esses efeitos, como o peso do ar, etc., e admitamos que ambos pesam o mesmo.

Mas, novamente, essa resposta está fora das opções oferecidas! E essa é exatamente a principal razão para as respostas erradas. A formulação correta do problema seria:

1. O 1 kg de ferro é mais pesado que 1 kg de madeira?
2. O 1 kg de ferro é mais leve que 1 kg de madeira?
3. Ambos têm o mesmo peso?

Imagine um teste em que a resposta correta não estaria entre as opções oferecidas! Problemas matemáticos são menos óbvios quando as reais dificuldades enfrentadas por crianças pequenas não são apenas as mesmas que os adultos têm (e que eles presumem que as crianças também terão), mas, em grande parte, estão relacionadas ao fato de que as crianças não compreendem firmemente os conceitos usados no problema. Vamos considerar um problema bem conhecido, no qual também fui testado.

Figura 01 – Cruzando os pontos



Fonte: o autor

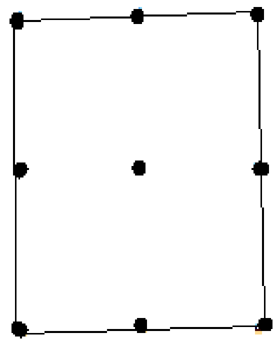
Aqui vemos 9 pontos dispostos, formando quadrado 3x3, com 3 linhas e 3 colunas, cada uma com 3 pontos alinhados sobre as mesmas linhas retas.

O problema convida o solucionador a conectar todos os pontos com 4 linhas retas, sem levantar o lápis do papel. Em outras palavras, com 4 movimentos consecutivos, sendo que cada movimento começa no ponto onde o anterior terminou. A ideia é que, nesse caso, o solucionador se depare com uma

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

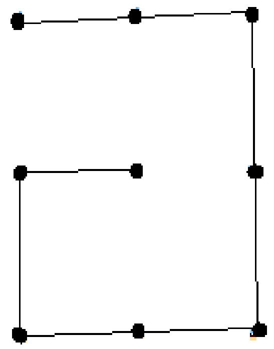
autoimposição psicológica: a de procurar a solução dentro da "caixa" (Figura 2), como a tentativa na Figura 3, que frequentemente ocorre na prática pedagógica.

Figura 02 – A primeira tentativa. O ponto central fica de fora



Fonte: o autor

Figura 03 – A segunda tentativa. Pontos são cruzados, mas com 5 linhas



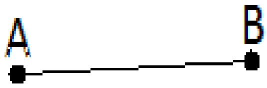
Fonte: o autor

A conclusão sobre a restrição psicológica está correta; ela realmente ocorre nesse caso. Mas, quando oferecemos esse problema a crianças que ainda não receberam uma educação sistemática em geometria, esse resultado pode ser confundido com outro problema.

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

Nos cursos de matemática padrão ensinados na Rússia, os alunos começam a estudar geometria apenas na 7ª série, e dificilmente podemos esperar alguma proficiência antes da 8ª série, o que corresponde a adolescentes de 14 anos. Assim, quando esse problema é proposto para crianças entre 7 e 12 anos, devemos ter em mente que o próprio conceito de "linha reta" ainda não foi totalmente desenvolvido. O obstáculo está na ideia de uma linha que se estende indefinidamente em ambas as direções. Se pedirmos a um aluno para desenhar uma linha reta que passe pelos pontos A e B, ele quase certamente a desenhará da forma que vemos na Figura 4**.**

Figura 04 – Linha reta infinita apresentada como segmento



Fonte: o autor

A linha não se estenderá além dos pontos A ou B. Portanto, nesse caso, o obstáculo não tem apenas uma origem psicológica, mas decorre de outro motivo – a falta de familiaridade com conceitos geométricos básicos, como linhas infinitas em um plano. Para remover esse obstáculo do problema e torná-lo mais justo para crianças mais novas, precisamos introduzi-lo com algum trabalho cuidadosamente selecionado. Como exemplo, eu recomendaria vários exercícios, projetados, como sempre prefiro, em forma de perguntas.

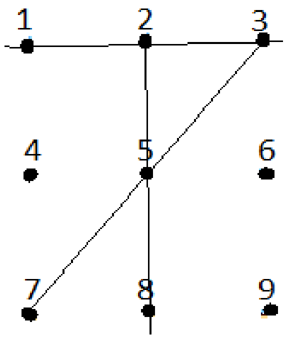
Novamente, mesmo que os alunos conheçam formalmente a definição de uma linha reta, que se estende infinitamente em ambas as direções, a ideia de infinito está muito distante de sua experiência cotidiana e é abstrata demais para ser compreendida e aplicada em problemas reais. Precisamos discutir um pouco sobre linhas paralelas em um plano antes de retornar ao problema. Aqui está um exemplo da sequência de perguntas correspondentes ao problema:

1. Desenhe 2 linhas retas que passem por alguns dos pontos numerados de 1 a 9 e que sejam paralelas à linha 1-2-3.
2. Desenhe 2 linhas retas que passem por alguns dos pontos numerados de 1 a 9 e que sejam paralelas à linha 2-5-8.

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

3. Desenhe 2 linhas retas que passem por alguns dos pontos numerados de 1 a 9 e que sejam paralelas à linha 3-5-7. (Figura 5).

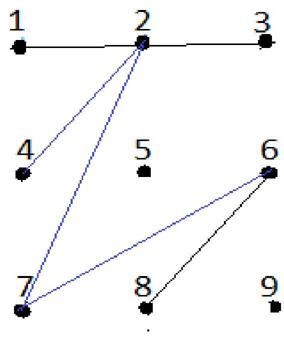
Figura 05 – Desenhe linhas paralelas às 3 linhas dadas passando pelos pontos numerados



Fonte: o autor

A resposta para a terceira pergunta difere das duas primeiras. Em primeiro lugar, desta vez, essas linhas passam apenas por 2 dos pontos numerados, e não por 3 como antes. Mas, em seguida, vem outro conjunto de perguntas:

Figura 06 – Quais linhas não são paralelas e onde se encontram?



Fonte: o autor

1. As linhas 1-2-3 e 6-8 também são paralelas?
2. Não as vemos se cruzando, certo?

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

3. Se, no entanto, elas não forem paralelas, elas devem se cruzar em algum lugar, certo?
4. Se sim, onde?

Neste momento, eles terão que pegar o lápis e a régua e estender ambas as linhas até o ponto de encontro. Depois, será apropriado acrescentar algumas outras perguntas para fixar esse entendimento:

5. As linhas 7-6 e 1-2-3 são paralelas? Se não, onde está o ponto de encontro delas?
6. As linhas 2-7 e 6-8 são paralelas? Elas se cruzam em algum lugar?
7. E quanto às linhas 6-7 e 2-4? Encontre o lugar onde elas se cruzam.
8. Encontre outros pares de linhas que não sejam paralelas e seus pontos de interseção.

Agora, após essa preparação, pode-se apresentar o problema inicial, e ele se tornará um "jogo justo", estando livre da elaboração insuficiente dos conceitos geométricos correspondentes, como o de linhas paralelas e o conceito de linha em geral. Agora, toda a dificuldade estará, de fato, conectada apenas à questão psicológica mencionada anteriormente e não será confundida com outros problemas.

Outro exemplo bem conhecido desse tipo é o próximo problema: "Forme 4 triângulos iguais com 6 palitos de mesmo comprimento". Supõe-se que o obstáculo psicológico aqui reside em se restringir a soluções bidimensionais, em vez de considerar a construção em 3D. Na verdade, na matemática, é comum incluir todo o cenário na formulação do problema; neste caso, seria exatamente a dimensão do espaço em que o problema deve ser resolvido.

Por exemplo, quando pedimos aos alunos que resolvam algumas equações, definimos explicitamente ou implicitamente qual conjunto de números estamos considerando. Se os alunos conhecem apenas números naturais (ou se o próprio problema, por seu conteúdo, implica que a resposta seja um número natural), então a equação $x^2 - 4 = 0$ tem apenas uma raiz. Se eles estão familiarizados com números inteiros, mas não com números racionais (ou se o problema implica que a resposta seja um número inteiro), então a equação $3x - 1 = 0$ não tem soluções, e a equação

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

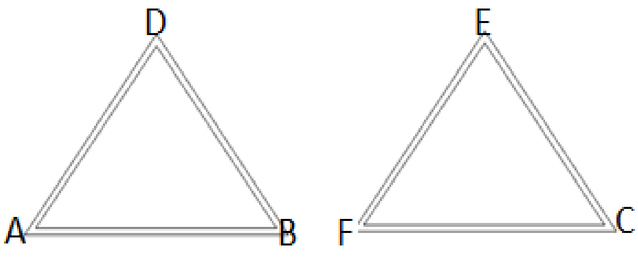
$2x^2 - 3x + 1 = 0$ tem apenas uma solução. Se eles conhecem números racionais, mas não números irracionais, então, por exemplo, a equação $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ tem apenas uma raiz, embora no conjunto R, dos números reais, ela tenha 3 raízes. Da mesma forma, quando os alunos do ensino médio, não inscritos em uma turma avançada de matemática, lidam com a equação $x^3 - 1 = 0$, eles chegam com precisão a apenas uma única raiz, $x = 1$, porque estão limitados ao conjunto R. dos números reais, embora no conjunto C, dos números complexos, essa equação tenha 3 raízes diferentes.

O mesmo ocorre na matemática superior. Quando, por exemplo, procuramos a solução de algum problema de variação, definimos desde o início em qual classe de funções estamos procurando a solução. Em outras palavras, a definição das configurações em que a solução está sendo procurada faz parte da situação do problema e, portanto, deve ser incluída nas próprias condições da tarefa. Por outro lado, neste caso específico, qualquer lembrete direto sobre a terceira dimensão seria uma dica para a solução.

Como, por um lado, não enganar os alunos ao incentivá-los a buscar a solução no plano e, ao mesmo tempo, não os direcionar diretamente para o 3D. É muito importante que mencionemos palitos e não segmentos, por exemplo. Devemos dar a eles esses palitos; além disso, temos que fornecer-lhes massa de modelar para fixá-los juntos e formar triângulos rígidos.

Com 6 palitos, eles podem formar 2 triângulos:

Figura 07 – 2 triângulos feitos com 6 palitos

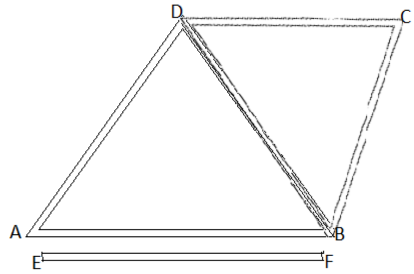


Fonte: o autor

O que pode ser feito? Afinal, precisamos de dois triângulos a mais! Podemos unir um ao outro e economizar um palito, já que um palito servirá como lado comum para ambos os triângulos:

Obutchénie
Revista de Didática e Psicologia Pedagógica
DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

Figura 08 – Eliminando 1 palito



Fonte: o autor

Eu recomendaria colá-los juntos pelo lado comum BD. O que fazer com o único palito restante, EF? Conseguiríamos dois triângulos adicionais, ADC e ABC, se ele pudesse conectar os pontos A e C. Mas ele não pode, pois é muito curto. Não podemos esticá-lo, mas talvez possamos aproximar os pontos A e C um do outro? Neste ponto, podemos deixar os alunos tentarem encontrar a solução sozinhos. Pelo menos podemos dizer que fizemos o nosso melhor para jogar "um jogo justo" neste caso. Agora, somente aquela autorrestrição psicológica pode desempenhar seu papel.

Discutindo este problema e o anterior, chegamos perto da questão do papel e do lugar do chamado "insight" na resolução de problemas. Lembro-me de como essa questão interessava ao meu avô. Mas esse seria um tema bastante diferente e exigiria uma investigação especial e detalhada.

Encerrando esta breve revisão de problemas matemáticos que interessavam a P. Galperin em relação ao papel da psicologia no processo de solução, menciono também outro tipo de construções geométricas que foram objeto de seu grande interesse. Eram construções que causavam ilusões ópticas, que, por sua vez, também tinham um lado psicológico.

Cuestiones psicológicas en problemas de matemáticas

RESUMEN
Algunos datos psicológicos basados en resultados obtenidos en la resolución de problemas matemáticos que incluyen componentes psicológicos, como la auto-restricción, a veces son irrelevantes por diferentes razones. Ocasionalmente, el posible error se debe en gran parte a preguntas mal formuladas y, en algunos casos, especialmente en preescolares y alumnos de educación primaria, se confunde con su falta de competencia en el manejo de conceptos matemáticos pertinentes al problema. En el artículo también se ofrecen ejemplos de cómo solucionar estos problemas introduciendo un conjunto de preguntas que preceden a la formulación del problema.
Palabras clave: Problemas matemáticos. Conceptos geométricos.

DOI: https://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-46

Bibliografia recomendada[3]

ABRAMSON, Y. Sobre o conteúdo e métodos de ensino de matemática no ensino fundamental para estudantes dotados, nos Anais da PME e da Conferência Russa Yandex (p. 243). *Tecnologia e Psicologia para a Educação Matemática* [Recurso Eletrônico]. ed. por A. Shvarts; Nat. Research Univ. Higher School of Economics. Moscou: HSE Publishing House, 2019.

GALPERIN, P. Ya. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual (de 5 a 8 anos). *Anais do 19º Congresso Internacional de Psicologia*. Londres: Sociedade Britânica de Psicologia, 1971, p. 201.

GALPERIN, P. Ya. *Capacidades intelectuais entre crianças pré-escolares mais velhas: sobre o problema de treinamento e desenvolvimento mental*. Imprensa da Universidade de Chicago, 1982, v.6, p. 526-46.

GALPERIN, P. Ya. *Psicologia: Sujeito e método*. Obras psicológicas selecionadas. (Em russo). Moscou, 2023.

OBUKHOVA, L. F. *Fundamentos da psicologia geral. Teoria de P. Ya. Galperin e experimento de modelagem* (Em russo). Moscou, 2022.

Recebido em 20 de agosto de 2024
Aprovado em 20 de setembro de 2024

[3] Veja também no site https://education.yandex.ru/pme/en/