Obutchénie
Revista de Didática e Psicologia Pedagógica

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

O Movimento Histórico das Contribuições da Teoria da Extensão de Grassmann para a Álgebra Linear

The Historical Movement of the Contributions of Grassmann's Extension Theory to Linear Algebra

Julia Santana Garcia Borges[1]
Aline Mota de Mesquita Assis[2]
Márcio Dias de Lima[3]

RESUMO

Hermann Grassmann foi um alemão do século XIX que estabeleceu os marcos iniciais para o surgimento da Álgebra Linear, um campo da Matemática que oferece recursos básicos para o desenvolvimento de várias subáreas da Matemática e de outras áreas do conhecimento, como Engenharias e Física, por exemplo. Assim, este artigo visa apresentar uma biografia deste autor, destacando duas de suas obras que registram seus feitos para este campo. Constitui-se de uma pesquisa bibliográfica com análise qualitativa dos dados pautada nos fundamentos do movimento lógico-histórico do objeto, possibilitando uma análise histórica, cultural e social, visando responder à seguinte questão-problema: quais foram as contribuições de Grassmann para o desenvolvimento da Álgebra Linear que o levou a ser considerado o criador desse campo de estudos? Conclui-se que Grassmann lançou as primeiras ideias sobre muitos conceitos que hoje constituem a Álgebra Linear, como espaços vetoriais n-dimensionais, transformação linear e outros, sendo, então, considerado por muitos, o criador da Álgebra Linear.

ABSTRACT

Hermann Grassmann, a 19th-century German scholar, pioneered the foundations of Linear Algebra, a mathematical discipline crucial for diverse fields like Mathematics, Engineering, and Physics. This article endeavours to present a comprehensive biography of Grassmann, emphasizing two works documenting his contributions to this domain. Employing bibliographic research coupled with qualitative data analysis grounded in the logical-historical movement of the object, the study enables a historical, cultural, and social examination. Addressing the central question — what were Grassmann's contributions to the evolution of Linear Algebra, positioning him as its creator? — the inquiry concludes that Grassmann introduced notions integral to contemporary Linear Algebra, including n-dimensional vector spaces and linear transformations. Consequently, he garners recognition from many as the creator of Linear Algebra.

[1] Mestranda em Educação pelo Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia. Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0009-0005-9587-1080. E-mail: julia.sgarciaborges@gmail.com.
[2] Doutora em Educação. Mestre em Matemática. Professora de Matemática do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3445-5903. E-mail: aline.mesquita@ifg.edu.br.
[3] Doutor em Ciências da Computação. Mestre em Matemática. Professor de Matemática do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2782-386X. E-mail: marcio.lima@ifg.edu.br.

Palavras-chave: História da Matemática; Álgebra Linear; Hermann Grassmann; Movimento lógico-histórico.

Keywords: History of Mathematics; Linear Algebra; Hermann Grassmann; Logical-historical Movement.

1 Introdução

A Álgebra Linear, como um campo de estudos matemáticos, tem suas raízes em um desenvolvimento histórico que remonta a, aproximadamente, 4.000 anos atrás, quando os babilônios encontraram o processo de resolução de sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas. Com o passar do tempo e o surgimento de novas demandas geradas pela atividade humana, a Álgebra Linear evoluiu, contando com a colaboração de vários cientistas e matemáticos notáveis, como Cayley, Leibniz e Peano, dentre outros.

No auge da Revolução Industrial, século XIX, onde o conhecimento científico ganhou destaque, o alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877), que atuou como teólogo, matemático e professor de uma escola secundária, publicou em 1844 e 1862 dois livros, um intitulado *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*[4] (GRASSMANN, 1878) e o outro *Die Ausdehnungslehre*[5] (GRASSMANN, 1862), respectivamente. Nesses livros, Grassmann criou uma teoria matemática que até então era desconhecida pelos pesquisadores, usando uma linguagem altamente filosófica, fato que dificultou seu entendimento por parte dos matemáticos da época. Além disso, eles continham uma teoria muito complexa, o que conduziu à rejeição pelos intelectuais. Apesar disso, a teoria de Grassmann continha as bases de uma teoria que estava prestes a emergir no cenário algébrico, as quais serão discutidas no decorrer deste.

Diante da relevância de Grassmann no contexto do desenvolvimento e estruturação da Álgebra Linear como um campo matemático, cabe a este artigo abordar a seguinte indagação: quais foram as contribuições de Grassmann para o avanço da Álgebra Linear e como ele se tornou um dos pioneiros na criação desse campo de estudo? Vale destacar que Grassmann desempenhou um papel fundamental na estruturação das teorias algébricas, e,

[4] A Teoria da Extensão, um novo ramo da Matemática.
[5] A Teoria da Extensão.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

posteriormente, outros pesquisadores também desempenharam papéis importantes nesse processo.

Com o intuito de responder esta questão, os objetivos específicos deste artigo são: apresentar uma biografia da vida de Grassmann, destacando suas obras principais, e identificar os conceitos por ele criados, comparando-os com a escrita algébrica atual. Para tanto, a metodologia de pesquisa adotada é a bibliográfica de cunho qualitativo, buscando elementos do movimento lógico-histórico para a análise e compreensão dos fatos, a saber, aqueles relacionados aos conceitos de movimento, fluência, interdependência, realidade, totalidade, história, processo, conhecimento, mutabilidade, lógica e pensamento (SOUSA, 2018).

Destaca-se que a pesquisa na área de História da Matemática desempenha um papel fundamental na obtenção de uma compreensão profunda e abrangente da forma e dos conteúdos dos conceitos da ciência Matemática, enriquecendo a Educação Matemática e estimulando o desenvolvimento do pensamento teórico através dos nexos internos dos conceitos.

2 Uma biografia de Hermann Günther Grassmann

Segundo Kopnin (1978), os pares dialéticos constituem a totalidade do objeto. Assim, o par vida e obra, permeado pelo lógico-histórico de Grassmann, conduz à totalidade dos conceitos algébricos, apresentados neste texto, constituintes da Álgebra Linear. Através dessa interdependência, pode-se compreender a relação entre a mutabilidade e a imutabilidade dos conceitos algébricos, a relação entre o pensamento humano e a realidade da vida de Grassmann, tudo inserido na lei universal, o movimento, o qual contempla tanto o lógico quanto o histórico da vida desse autor (SOUSA, 2018).

Desta forma,

> Compreender o movimento lógico-histórico da vida é compreender que todo conhecimento contém angústias, medos, aflições, ousadias, inesperados, novas qualidades, conflitos entre o velho e o novo, entre o passado e o futuro. É compreender que a totalidade do conhecimento é o próprio movimento da realidade objetiva que sempre estará por vir a ser (SOUSA, 2018, p. 45).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Visando uma melhor organização e compreensão dos fatos que permeiam a unidade vida e obra de Grassmann, o texto será dividido em períodos que marcam etapas importantes desse movimento, possibilitando uma visão totalitária de seus feitos, consequentemente, da Álgebra Linear.

2.1 A vida estudantil e profissional de Hermann Grassmann (1809 a 1843)

Hermann Günther Grassmann nasceu em 1809 em Stettin, na época, pertencente à Prússia. Foi teólogo, matemático autodidata, professor de escola secundária e o terceiro de doze filhos de Justus Günther Grassmann e Johanne Luise Friederike Medenwald. Seu pai, além de teólogo, pietista[6] e pastor, foi também professor de Matemática (DIEUDONNÉ, 1979).

Grassmann viveu em uma época em que a Alemanha não existia como uma nação unificada, mas era constituída por 39 Estados independentes. Os Estados mais proeminentes e influentes dentro dessa confederação foram o Império Austríaco e o Reino da Prússia. Destaca-se que, devido às mudanças políticas e de fronteiras, em decorrência das guerras e conflitos no século XX, Stettin, atualmente, faz parte da Polônia (ASSIS, 2018).

Nesse período, os ideais iluministas estavam se difundindo pelo mundo, influenciando mudanças sociais e políticas significativas. Os iluministas defenderam valores como a democracia, o liberalismo econômico e o racionalismo, que iam de encontro ao absolutismo monárquico e à influência da Igreja sobre a população. A revolução industrial também ocorreu nessa época, transformando a sociedade e a economia, bem como a atividade humana.

O cenário político e intelectual desse momento, provavelmente, teve impacto nas ideias de Grassmann e pode ter influenciado sua visão de Matemática e suas contribuições para o campo, pois como afirma Kopnin (1978,

[6] "O pietismo nasceu na Alemanha protestante do século XVII. Acentua a fé pessoal em protesto contra a secularização da Igreja. Surgiu como reação da guerra dos "trinta anos" na Alemanha e estendeu-se um pouco por toda a Europa sempre que a religião se divorciava da experiência pessoal. Foram vários os motivos imediatos desse movimento, entre eles o endurecimento escolástico do luteranismo diante dos seus adversários" (RUBEM, 2023, n.p).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

p. 53), "[...] as leis do mundo objetivo se convertem em leis também do pensamento, e todas as leis do pensamento são representadas no mundo objetivo". Grassmann, com seu trabalho inovador na Álgebra e na Geometria, deixou uma marca de rigor no desenvolvimento da Matemática, contribuindo para a compreensão e o avanço da área em um período de profundas mudanças históricas e intelectuais.

Mesmo pertencendo a uma família com um bom grau de educação, Hermann não se destacou nos primeiros anos do ginásio, o que hoje corresponde ao ensino fundamental. Em sua época os jovens demostravam desde cedo suas aptidões e, por ter estudado em boas escolas e ter tido uma boa educação domiciliar, seu pai acreditava que ele não poderia chegar a ter alguma relevância acadêmica. No entanto, aos poucos começou a progredir na escola, ficando em segundo lugar no exame final do que hoje é conhecido como ensino médio (DIEUDONNÉ, 1979).

Decidido a estudar teologia, pelo seu anseio em tornar-se ministro luterano, em 1827 ingressa na Universidade de Berlim, a instituição mais antiga da cidade e uma das mais privilegiadas da Alemanha e da Europa. Não há informações de que Grassmann tenha tido alguma formação acadêmica em Matemática, porém, foi ela a responsável por seu retorno a Stettin após finalizar seus estudos em Berlim, em 1830, onde tornou-se professor em ginásios e iniciou pesquisas matemáticas de maneira autônoma (DIEUDONNÉ, 1979).

Retornando em 1831 a Berlim para realizar exames visando uma carreira acadêmica, não obteve um bom desempenho, sendo-lhe permitido lecionar Matemática apenas nos níveis baixos. Em 1832, foi nomeado para o Ginásio de Stettin como professor assistente e, nessa mesma época, fez suas primeiras descobertas matemáticas que, posteriormente, seriam desenvolvidas e publicadas.

Devido ao tipo da sua licença profissional, em 1835, Grassmann foi nomeado para ensinar Matemática, Física, Alemão, Latim e Estudos Religiosos na Otto Schule, em Stettin, uma escola de ensino primário. E, em 1839, ele passou nos exames de teologia, o que permitiu dar aulas para o ensino secundário.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

> É importante aqui destacar quais eram os deveres de um professor de ginásio na Alemanha naquela época, e, de fato, durante toda a vida de Grassmann: ele deveria lecionar sobre todos os assuntos, desde religião até biologia, passando por latim, matemática, física e química, e em todos os níveis, em um ritmo de 18 a 30 horas por semana (DIEUDONNÉ, 1979, p. 2, tradução nossa).

Grassmann almejava lecionar para o nível superior para que pudesse dedicar mais tempo às suas pesquisas. No prefácio da sua Teoria da Extensão de 1844, percebe-se tal inquietação por sua profissão não o ter permitido dedicar-se como desejava à pesquisa científica:

> Eu espero clemência, principalmente, porque minha profissão me deixou pouquíssimo tempo de prática e não me deu a possibilidade de fazer comunicações provenientes dessa ciência ou, de ao menos, matérias semelhantes, e de ganhar, assim, o frescor vivo que deve inspirar e vivificar o todo, que se deve aparecer como um elemento vivo do organismo do conhecimento (GRASSMANN, 1995, p. 17, tradução nossa).

Em 1840, Grassmann fez exames admissionais para o Instituto de Stettin que foram importantes para ele, apesar das contradições ali vivenciadas, pois teve que apresentar um ensaio sobre a teoria das marés, para isso, ele utilizou a teoria básica de Mecânica Celeste de Laplace e da Mecânica Analítica de Lagrange e produziu o seu ensaio Teoria do Fluxo e do Refluxo, introduzindo pela primeira vez uma análise baseada em vetores (DIEUDONNÉ, 1979).

Dieudonné (1979) afirma que, embora o ensaio de Grassmann tenha sido aceito pelos examinadores, eles não deram importância às inovações ali introduzidas, pois sua explicação era muito abstrata e filosófica. Nota-se como a forma dos conceitos eram importantes para os matemáticos da época e que, não tendo a forma academicamente aceita, o conteúdo dos conceitos também era desprezado. Percebendo, no entanto, que sua teoria era amplamente aplicável, Grassmann decidiu dedicar-se ao desenvolvimento de suas ideias sobre espaços vetoriais, incluindo adição e subtração vetorial, diferenciação vetorial e teoria da função vetorial.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Em 1843, Grassmann retornou a Berlim e passou a interessar-se por Geometria, devido aos exames que chegou a fazer para melhorar sua posição de professor. Segundo Dieudonné (1979), Grassmann chegou ao conhecimento de vetores por si só, pois não havia aprendido Matemática além do currículo do ensino médio. Isso revela que Grassmann tinha um pensamento teórico e conseguia estabelecer os nexos internos e externos dos conceitos matemáticos.

Grassmann aspirava tornar-se um professor universitário, acreditando que isso facilitaria a promoção de suas ideias e, consequentemente, a disseminação de sua nova teoria. É como afirma Sousa (2018), "O pensamento humano busca formas que possibilitem a transformação contínua da realidade através de seu trabalho físico e intelectual [...]". Ele submeteu repetidamente seus trabalhos à avaliação de especialistas na esperança de obter uma posição como docente universitário. No entanto, eles não conseguiram compreendê-lo e, consequentemente, o rejeitaram.

2.2 Da publicação de sua primeira obra à reescrita da mesma (1844 a 1861)

Depois de negadas todas as tentativas em se tornar um professor universitário, Grassmann voltou sua atenção para escrever sua obra *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (GRASSMANN, 1878), que foi publicada em 1844. Ele criou o que hoje é chamado de álgebra exterior[7]. Porém, seu trabalho não obteve tanta receptividade e foi criticado pela "[...] falta de clareza na sua apresentação, especialmente em relação à extensa introdução filosófica, a qual impediu muitos matemáticos de qualquer leitura mais aprofundada" (DORIER, 2000, p. 18, tradução nossa).

Grassmann parecia estar ciente da possível rejeição que sua obra poderia encontrar, uma vez que escreveu:

> De fato, ao apresentar uma nova ciência, para que sua posição e significado possam ser devidamente reconhecidos, é indispensável mostrar de uma vez sua aplicação e sua relação com objetos afins. A introdução também deve servir a esse propósito. Na natureza das

[7] "A Álgebra Exterior é, do ponto de vista puramente algébrico, o estudo das aplicações multilineares alternadas e suas ramificações. Sob o ponto de vista geométrico, ela trata dos vetores p-dimensionais, que foram originalmente concebidos por H. Grassmann" (Lima, 2017, n.p).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

> coisas, isso é mais de natureza filosófica, e quando o separei do contexto de toda a obra, fiz isso para não assustar imediatamente os matemáticos com a forma filosófica. Pois ainda há uma certa rejeição entre os matemáticos, e em parte não erroneamente, diante das discussões filosóficas de assuntos matemáticos e físicos (GRASSMANN, 1995, p. 15-16, tradução nossa).

Nota-se que Grassmann justificou a falta de sucesso de sua obra devido à sua forma de apresentação, que empregava uma linguagem não convencional para a época, sendo bastante filosófica e com escassa escrita Matemática. Isso reflete a interdependência entre a forma e o conteúdo dos conceitos matemáticos, tão necessários para o desenvolvimento dessa ciência.

Em 1846, Möbius sugeriu, de acordo com Dieudonné (1979), que Grassmann concorresse ao prêmio *Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft* (prêmio destinado àqueles que tivessem tido grande relevância na área de exatas) da Academia de Leipzig. Ele, então, submeteu seu livro intitulado *Análise Geométrica Vinculada e a Característica de Leibniz*, onde desenvolveu as ideias de Leibniz sobre o estabelecimento de um cálculo aplicável diretamente a situações geométricas (OTTE, 1989). Nesse estudo, segundo Dieudonné (1979), Grassmann introduziu a noção de produto escalar entre dois vetores pertencentes a espaços n-dimensionais. No entanto, Möbius, que foi um dos jurados, criticou a maneira como Grassmann introduziu ideias abstratas sem fornecer ao leitor um gancho intuitivo para pendurá-las (SERVIDONI, 2006).

Em maio de 1847 Grassmann recebeu o título de *Oberlehrer* (professor sênior) na escola *Friedrich Wilhelm Schule* e, no mesmo mês, escreveu ao Ministério da Educação da Prússia solicitando que seu nome fosse colocado em uma lista daqueles a serem considerados aptos para cargos universitários. O Ministério da Educação pediu a opinião de Kummer sobre Grassmann, o qual, através de um relatório, acabou com qualquer esperança de Grassmann em conseguir um cargo universitário, alegando que a solicitação foi expressa de maneira deficiente (DOURADO *et al.*, 2021).

No início de 1849, ele se casou com Therese Knappe, tiveram onze filhos, dos quais nove atingiram a idade adulta (EVES, 2004). Em março de 1852, o pai de

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Grassmann, Justus, faleceu de insuficiência cardíaca. Mais tarde naquele ano, Grassmann foi nomeado para preencher a antiga posição de seu pai no *Stettin Gymnasium* (DIEUDONNÉ,1979).

Tendo falhado em obter reconhecimento por sua matemática, Grassmann voltou-se para um de seus outros assuntos favoritos, o estudo do sânscrito e do gótico. Durante sua vida, ele ganhou mais reconhecimento por seu estudo de idiomas do que pela Matemática, chegando a provar que o germânico era "mais velho" em um padrão fonológico que o sânscrito, estabelecendo-o como a língua mais antiga na linguística indo-europeia. Percebe-se aqui tamanha versatilidade de Grassmann, em dedicar-se a tantas áreas e quão grande era seu conhecimento científico.

Em 1854, ele redirecionou seu foco para a Matemática, sua grande paixão, e sua teoria da extensão. Ele estava determinado a reescrever completamente seu trabalho na esperança de obter o reconhecimento merecido. Simultaneamente, até o ano de 1861, ele publicou dezessete artigos científicos que desenvolveu para os campos da Física e Matemática. Sua abrangência intelectual, conforme aponta Servidoni (2006), permitiu que ele navegasse com força por diversas áreas do conhecimento.

2.3 Da segunda versão da Teoria da Extensão à sua morte (1862 a 1877)

Em 1862 foi publicado uma nova versão da sua obra de 1844, denominada *Die Ausdehnungslehre* (GRASSMANN, 1862). Nesta versão, Grassmann define os conceitos matemáticos e imediatamente passa a apresentar as aplicações desses conceitos, de modo a tornar suas ideias mais claras. É notável a alteração na estrutura do texto, em particular a completa omissão da introdução de cunho filosófico, bem como uma reestruturação metodológica do texto, em favor de um formato mais próximo à organização proposicional, caraterística do estilo euclidiano. Fica claro que, nesse movimento, através de um processo de mutabilidade, que Grassmann estaria buscando se adequar e ter uma boa recepção de sua proposta que, novamente, não teria sucesso ao menos na década de 1860 (LINDER; SCHUBRING, 2022). Dorier (2000) aponta que, mesmo não tendo mais

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

a linguagem filosófica pesada que continha na primeira versão, a leitura ainda era densa e necessitava de um estudo minucioso de toda a teoria, fato que levou os matemáticos da época a ignorar novamente o seu trabalho, não lhe dando voz em meio à comunidade científica.

Desapontado por não conseguir convencer os matemáticos da importância do seu trabalho, Grassmann voltou-se novamente para a pesquisa em linguística, onde foi homenageado por suas contribuições ao ser eleito para a *American Oriental Society* e com a concessão de um diploma honorário pela Universidade de Tübingen, na Alemanha (DOURADO *et al.*, 2021).

Em 1872, Grassmann retomou seus estudos matemáticos ao tomar conhecimento de que matemáticos estavam investigando e aplicando suas obras e teorias. Segundo seu filho, Justus Grassmann, dois dias antes de seu falecimento, Grassmann recebeu a notícia de que sua teoria seria divulgada por meio de palestras ministradas por um professor em Dresden (GRASSMANN, 2011).

Grassmann faleceu em 26 de setembro de 1877 de problemas cardíacos após um período de saúde bastante debilitada, conforme aponta Servidoni (2006). Dieudonné (1979, p. 1, tradução nossa), falando sobre Grassmann, afirma que:

> Em toda a galeria de matemáticos proeminentes que, desde a época dos gregos deixaram sua marca na ciência, Hermann Grassmann certamente se destaca como o mais excepcional em muitos aspectos [...] Quando comparada com as de outros matemáticos, sua carreira é uma sucessão ininterrupta de estranhezas: incomuns eram seus estudos; incomum era seu estilo matemático; incomum e infeliz a total falta de compreensão de suas ideias, não apenas durante sua vida, mas muito depois de sua morte; deplorável a negligência que o obrigou a permanecer por toda a vida professor de uma escola secundária quando homens deveras inferiores ocupavam cargos nas Universidades.

A teoria de Grassmann, que condiz com o que Kopnin (1978, p. 196) afirma ser uma teoria científica, a saber, "um sistema, um conjunto de juízos unificados por um princípio único", embora não tenha sido amplamente aceita em seu tempo, continha os fundamentos de uma teoria que estava prestes a

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

emergir no campo da Álgebra, incluindo conceitos como espaço vetorial, dependência linear, base, dimensão e transformação linear. Devido a essas valiosas contribuições, ele é reconhecido por muitos como o criador da Álgebra Linear (ASSIS, 2018).

Segundo Whitehead (1898), acredita-se que Grassmann, ao escrever sua segunda versão da Teoria da Extensão, não tinha conhecimento nem mesmo do clássico livro de memórias sobre matrizes de Cayley. Para Dorier (1995), Grassmann fez sua teoria independente do resto da Matemática, baseando-se apenas nas regras elementares de pensamento teórico matemático.

As teorias de Grassmann só obtiveram reconhecimento após Giuseppe Peano publicar uma versão condensada de sua própria leitura da obra de Grassmann, o qual intitulou *Geometric Calculus – according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*[8] (PEANO, 2000).

Peano era italiano e foi o matemático mais conhecido de seu país em sua época. Apesar de sua influência, ele não recebeu notoriedade em sua obra Cálculo Geométrico, provavelmente por ter exposto as ideias de Grassmann e não as suas próprias.

3 As contribuições de Grassmann pelo olhar de Peano

Em seu Cálculo Geométrico (PEANO, 2000), Peano fez uma releitura da Teoria da Extensão de Grassmann, transformando a linguagem filosófica em uma linguagem mais matemática, consequentemente, com maior aceitação pela comunidade científica da época, e ainda corrigiu certos equívocos cometidos pelo autor, além de ampliar alguns conceitos já estabelecidos. Apesar disso, Peano deixa claro em seu trabalho que tal produção trata-se de conceitos já concebidos por Grassmann e que seu objetivo é, além de dar mais visibilidade para o autor, tornar suas teorias conhecidas e aceitas pela sociedade matemática de sua época (Assis, 2018), conforme ele mesmo afirma:

[8] Cálculo Geométrico - de acordo com a Teoria da Extensão de H. Grassmann.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

> O objetivo desta obra é tornar a álgebra de Grassmann mais acessível a qualquer pessoa conhecedora dos fundamentos da Geometria, Álgebra e do Cálculo Geométrico, com base em algumas notações contidas na Teoria da Extensão, e no desenvolvimento de suas principais consequências (PEANO, 2000, p. 9, tradução nossa).

Peano, para desenvolver essa obra, precisou compreender o movimento de vir a ser dos conceitos matemáticos apresentados por Grassmann, apreendendo os conceitos grassmannianos através da obtenção do universal, do essencial e necessário ao conceito (KOPNIN, 1978).

O objetivo de Peano neste livro era o mesmo de Grassmann, o desenvolvimento de um cálculo geométrico. Desse modo, o livro consiste, em grande parte, de cálculos com pontos, linhas, planos e figuras tridimensionais. Segundo Dorier (1995), Peano recupera os principais conceitos contidos na Teoria da Extensão (versão de 1862), expondo-os de forma bem construída e resumida, colocando as aplicações ao final de cada capítulo, assim como Grassmann. Nos termos de Kopnin (1978), Peano representou o mesmo objeto de forma diferente, com fim diferente, de modo a exercer outra função no movimento do pensamento que conduz à verdade objetiva e leva ao processo de reprodução do objeto pelo pensamento.

No primeiro capítulo de sua obra, após definir os conceitos de volume, superfície e segmentos orientados, Peano estabelece operações que dizem respeito a quatro diferentes tipos de objetos geométricos: pontos, segmentos, superfícies e volumes. Nesse processo, ele extrai propriedades mais amplas que não estão vinculadas a uma espécie específica de objeto geométrico. Isso demonstra que é possível realizar operações com essas formações geométricas, independentemente dos objetos algébricos particulares envolvidos (PEANO, 2000). Como ele mesmo diz no prefácio do livro: "O cálculo geométrico consiste em um sistema de operações aplicáveis aos seres geométricos, análogos àqueles que a álgebra efetua sobre os números [...]". (DORIER, 1990, p. 64, tradução nossa). Este fato revela a interdependência do modo de pensar nos objetos da Álgebra Linear, com outros objetos algébricos e geométricos.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

No capítulo dois, ele mostra que em um espaço, se três vetores são tais que seu produto, que está em forma de determinante, é não nulo, todos os vetores se escrevem como combinação linear desses três vetores (DORIER, 1995), dando a noção de vetores geradores de um espaço.

No nono e último capítulo, Peano apresenta uma definição do que ele denominou de um sistema linear e hoje conhecemos como espaço vetorial. Esta é a primeira definição axiomática de um espaço vetorial real e estava muito próxima da definição atual, que é a síntese de um processo histórico de desenvolvimento. Há também outras definições com essa característica, a saber, independência linear, base, coordenadas e dimensão (considerando a possibilidade de dimensão infinita). E há a definição da dimensão de um sistema linear como sendo o número máximo de quantidades linearmente independentes em um sistema. Nos demais capítulos, Peano apresenta toda a restante teoria grassmanniana, aquela que originou a Álgebra de Grassmann.

É evidente a relevância da obra de Peano na disseminação das ideias de Grassmann. Embora a obra de Grassmann tenha sido subestimada em sua época, suas contribuições tiveram um impacto significativo no desenvolvimento da Álgebra Linear.

Suas contribuições quanto à constituição dos conceitos acima mencionados, serão discutidos nas seções seguintes, fazendo um paralelo com o que temos hoje formalizado nos livros didáticos de Álgebra Linear, mostrando que, no trabalho de Grassmann, a essência do conceito já estava presente. Entretanto, o foco não é o aspecto linear da história, mas sim a mutabilidade da história dos conceitos que contém uma realidade com constante movimento e que não pode ser dividida, fracionada, mas deve ser olhada com um todo, pois "O cerne dessa realidade é a fluência, o movimento, a transformação, e não a fragmentação do próprio pensar humano que contém a interdependência, característica fundamental do movimento do pensamento" (SOUSA, 2018, p. 47).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

3.1 Vetores

As primeiras noções de vetor, segundo Kleiner (2007), não são datadas nos últimos séculos, nem estão relacionadas com a Matemática, mas estão ligadas à Física e remonta a pensadores da Grécia Antiga, que interpretavam o vetor com um "apelo geométrico e intuitivo muito forte para auxiliar a análise de problemas físicos" (TÁBOAS, 2010, p. 2). De acordo com Kleiner (2007) e Táboas (2010), os gregos antigos utilizavam o conceito de vetor e de soma de vetores (atual regra do paralelogramo) aplicados às grandezas físicas como força e velocidade. São os conceitos emergindo das práxis humanas.

Na Matemática, a noção de vetores teve origem com a representação geométrica de números complexos, introduzida de forma independente por diversos autores no final do século XVIII e início do século XIX. Esta representação limitava-se a pontos ou segmentos de retas orientados num plano. Hamilton, em suas pesquisas de astronomia, ao precisar trabalhar com rotações no plano, encontrou na representação gráfica dos números complexos, a teoria matemática adequada. No entanto, ele precisava relacionar essa teoria a teoria de vetores. Assim, em 1835, ele definiu os números complexos, algebricamente, como pares ordenados de números reais, possuindo as operações usuais de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, como temos hoje (KLEINER, 2007). Desta forma, Hamilton associou números complexos com a representação vetorial, marcando as primeiras noções de vetores matemáticos e já mostrando a interdependência das representações matemática dos conceitos.

Na mesma época que Hamilton, Grassmann, na segunda versão de sua obra, representa um vetor como um segmento de linha reta com comprimento e direção específica, trazendo uma representação geométrica para este conceito, é a mutabilidade das noções conceituais. Ele define a adição de dois vetores como a regra que hoje admitimos como usual e a subtração de vetores é realizada como a adição do negativo, que é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção oposta (Melchiades da Silva; Frant; Oliveira, 2022).

Peano, na sua leitura de Grassmann, definiu vetor da seguinte forma: "Toda formação de primeira espécie da forma $B - A$ é chamada de vetor. Os pontos A e B são chamados, respectivamente, de origem e termo do vetor" (PEANO, 2000, p. 30,

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

tradução nossa). Para o autor, formação de primeira espécie equivale a uma linha, consequentemente, uma espécie da forma $B - A$ se torna uma limitação dessa linha, que seria, na linguagem moderna, um segmento orientado que conduz à conceituação atual de vetor.

Pensando na forma contemporânea de abordar o conceito de vetor, Boldrini *et al.* (1986), traz que vetores no plano são segmentos orientados com ponto inicial na origem, determinados exclusivamente pelo seu ponto final, uma vez que o ponto de início é fixo na origem. Algebricamente, para cada ponto no plano, está associado um único vetor e dado um vetor associamos um único ponto no plano que é o seu ponto final. Estabelece-se, então, uma correspondência chamada de biunívoca, entres pontos do plano e vetores.

Estendendo a definição de vetores para o espaço tridimensional, Boldrini *et al.* (1986, p. 101) afirma que nesse espaço também há "um sistema de coordenadas dado por três retas orientadas, perpendiculares duas a duas, e, uma vez fixada uma unidade de comprimento, cada ponto P do espaço estará indicado como terna de números reais (x, y, z), que dá suas coordenadas".

Nota-se que Grassmann, como expressado por Peano (2000), já concebia o nuclear do conceito de vetor e que autores posteriores a eles, através do desenvolvimento histórico do conceito, aprimoraram sua escrita, chegando a uma síntese, como a desenvolvida por Boldrini *et al.* (1986).

3.2 Espaço Vetorial

Em se tratando de espaços com mais de duas dimensões, Eves (2004) afirma que desde a época que Euclides lançou sua famosa obra Elementos de Euclides, por volta do ano 300 a.C., os gregos já conheciam os sólidos geométricos e possuíam uma geometria em três dimensões. Eves (2004) relata que no Livro XIII dos Elementos de Euclides, o autor reporta a criação de alguns sólidos regulares aos pitagóricos, remetendo o surgimento destes sólidos a séculos anteriores ao século III a.C.

Com o avanço da ciência, tornou-se necessário uma teoria algébrica sobre um espaço com mais de duas dimensões, uma ampliação da teoria científica existente até o

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

momento. Após várias tentativas frustradas de diversos estudiosos em criar um espaço tridimensional, surge Hamilton, em 1843, com os seus quatérnios, criando um conjunto de dimensão quatro, porém, sem ter uma teoria sólida de um espaço vetorial qualquer com mais de duas dimensões. Nesse contexto, vem Grassmann com a sua Teoria da Extensão, em 1844 e 1862, propondo uma álgebra extremamente abstrata para os matemáticos da época, mas que continha traços importantes de uma análise vetorial n-dimensional requisitada pelos cientistas. É a evolução da teoria matemática requerida pelos estudiosos, a fluência dos conceitos.

No ano de 1888, explicando Grassmann, Peano apresentou seus sistemas lineares que, em termos modernos, conhecemos por espaços vetoriais. Ele afirmou que o sistema linear é o sistema de entidades que satisfazem as condições 1, 2, 3 e 4 abaixo:

> 1. É definida a *equivalência* de duas entidades ae b do sistema, ou seja, é definida uma proposição, indicada por $a = b$, que expressa uma condição entre duas entidades do sistema, satisfeitas por certos pares de entidades, e não por outras, e que satisfaz as equações lógicas:
> $$(a = b) = (b = a), (a = b) \cap (b = c) < (a = c)$$
> 2. Define-se a *soma* de duas entidades a e b, ou seja, uma entidade, indicada por $a + b$, é definido que também pertence ao sistema dado e que satisfaz a condição
> $$(a = b) < (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c$$
> sendo o valor comum dos dois membros da última equivalência indicado por $a + b + c$.
> 3. Se a é uma entidade do sistema e m é um número inteiro positivo, pela expressão ma significaremos a soma de m entidades iguais a a. É fácil reconhecer que, se $a, b, \ldots$ são entidades do sistema, e $m, n, \ldots$ inteiros positivos
> $$(a = b) < (ma = mb); m(a + b) = ma + mb;$$
> $$(m + n)a = ma + na; m(na) = (mn)a; \quad 1a = a$$
> Suponhamos que à expressão ma seja atribuído um significado, qualquer que seja o número real m, de modo que as equações anteriores também sejam satisfeitas. A entidade ma é chamada de *produto* do número (real) m pela entidade a.
> 4. Finalmente vamos supor que existe uma entidade do sistema, que iremos chamar a *entidade nula*, e que indicaremos por 0, de modo que qualquer que seja a entidade a, o produto do número 0 com a entidade a sempre dá a entidade 0, ou seja, $0a = 0$. Se à expressão $a - b$ se atribui o significado $a + (-1)b$, deduz-se $a - a = 0, a + 0 = a$ (PEANO, 2000, p. 119-120, tradução nossa, grifo do autor).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Dorier (2000) esclarece que, enquanto Grassmann deduziu as propriedades fundamentais dos espaços vetoriais a partir da definição de operação nas coordenadas, Peano foi mais preciso e descreveu uma estrutura axiomática da qual elas emergiam, além de ter aperfeiçoado a formulação ao retirar algumas redundâncias e ter dado maior clareza aos conceitos de zero e de elemento oposto. Assim, Peano foi um pouco além de Grassmann, contribuindo com a melhoria e o desenvolvimento do conceito de espaço vetorial, ocasionando uma mutação das ideias através do juízo estabelecido, da ideia relativamente acabada (KOPNIN, 1978), após seus estudos da Teoria da Extensão.

Com a contribuição de outros estudiosos, o conceito foi se desenvolvendo, se transformando, e sua escrita se aprimorando, até chegar à síntese que se tem hoje e pode ser expressa conforme Boldrini *et al.* (1986) traz, definindo espaço vetorial como sendo um conjunto V, não vazio, que possui as operações soma e multiplicação por escalar dadas, respectivamente, por

$$+: V \times V \to V \qquad \cdot: R \times V \to V$$
$$(u, v) \mapsto u + v \qquad (a, u) \mapsto au$$

tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in R$ as propriedades abaixo sejam satisfeitas:

$i (u + v) + w = u + (v + w)$
$ii u + v = v + u$
iiiExiste $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$.é chamado vetor nulo.)
ivExiste $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
$v a(u + v) = au + av$
$vi (a + b)v = av + bv$
$vii (ab)v = a(bv)$
$viii 1u = u$ (BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 103).

Com essa definição, nota-se a riqueza das contribuições de Peano em relação à axiomatização da Matemática, pois, através dessa axiomatização, foi possível estabelecer sínteses claras e concisas de conceitos matemáticos como o de espaço vetorial.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

3.3 Dependência e Independência Linear

Os conceitos de dependência e independência linear não foram, originalmente, concebidos por Grassmann, segundo Táboas (2010), entretanto, o autor afirma que ele, em sua Teoria da Extensão, apresentou aspectos significativos para a organização e formalização desses conceitos em termos axiomáticos, apresentando isso em um contexto mais amplo dentro da Matemática.

Grassmann se aproximou da definição de dependência linear ao afirmar: "Dizemos que uma grandeza elementar de primeiro grau é dependente de outras grandezas elementares, quando pode ser representada por uma combinação linear destas últimas" (MELCHIADES DA SILVA; FRANT; OLIVEIRA, 2022, p. 20-21). Grassmann também se referiu ao conceito de dependência, como sendo uma espécie dependente de outra espécie, quando um vetor poderia ser escrito como combinação linear de outros vetores (MELCHIADES DA SILVA; FRANT; OLIVEIRA, 2022), exatamente como temos na atualidade.

Encontramos também, a noção de dependência linear expressa nos seguintes termos: "Uma espécie de mudança (*Aenderungsweise*), é dependente de uma outra, quando os vetores da primeira podem ser representados como soma de vetores da segunda [...]" (MELCHIADES DA SILVA; FRANT; OLIVEIRA, 2022, p. 20). Entretanto, segundo o autor, essa afirmação não é suficiente para decidir quando os vetores dados são linearmente independentes ou, nos termos de Grassmann, independentes entre si, pois ainda há contradições inerentes a ela.

Caire (2020), também evidencia uma noção de dependência linear apresentada no contexto do que Grassmann chamou de magnitudes:

> [Grassmann] definiu o conceito de dependência, onde uma magnitude elementar de primeira ordem era representada como soma múltipla de magnitudes elementares de primeira ordem independentes e essas magnitudes independentes não podiam ser representadas como múltiplo ou soma do restante das magnitudes independentes (CAIRE, 2020, p. 80).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Através de Peano, temos um aperfeiçoamento dos termos matemáticos expressos por Grassmann, com eliminação de contradições conceituais. No capítulo IX do seu Cálculo Geométrico, Peano traz a seguinte definição de linearmente dependente e independente.

> Várias entidades $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de um sistema linear são chamadas mutuamente *dependentes* se for possível determinar n números $m_1, m_2, \ldots, m_n$, nem todos iguais a zero, para os quais é satisfeita a igualdade
> $$m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n = 0.$$
> Neste caso, qualquer uma das entidades cujo coeficiente não seja zero pode ser expressa como uma função linear homogênea do resto. Se as entidades $a_1, \ldots, a_n$ são mutualmente independentes, e se entre elas existem uma relação, se deduz que $m_1 = 0, \ldots, m_n = 0$. Se AB ... são formações de primeira espécie no espaço, a equação $AB = 0, ABC = 0, ABCD = 0$ expressam a dependência de 2, 3 ou 4 formações. Cinco formações das primeiras espécies no espaço sempre são mutuamente dependentes (PEANO, 2000, p. 120, tradução nossa, grifo do autor).

Comparando a linguagem de Peano com a que se tem hoje nos livros, nota-se que o termo mutuamente equivale ao termo linearmente. Boldrini *et al.* (1986) diz ser de extrema importância saber se um vetor é ou não combinação linear de outros e traz uma síntese de todo o desenvolvimento histórico dos conceitos de linearmente dependente e linearmente independente, expressos da seguinte forma:

> Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, se a equação $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$, implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LD (BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 114, grifo do autor).

O autor ainda traz um resultado, em forma de Teorema, para esclarecer e classificar vetores linearmente dependentes: "$\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um desses vetores for uma combinação linear dos outros" (BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 114). É perceptível a semelhança da notação atual com a notação introduzida por

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Peano quase cem anos antes da obra de Boldrini *et al.* (1986), fato que reafirma que o movimento de vir a ser desse conceito se manifesta através do movimento da história da sua formação e do seu desenvolvimento (SOUSA, 2018).

3.4 Base e Dimensão

Crowe (1967), analisando as obras de Grassmann, traz o seguinte resultado que ele diz ser uma afirmação típica de Grassmann: "Todo vetor de um sistema de ordem m pode ser escrito como a soma de m vetores que pertencem às dadas m maneiras independentes de mudança do sistema. Essa expressão é única" (CROWE, 1967, p. 69, tradução nossa). Nesse trecho temos inserido o conceito de dimensão de um espaço vetorial quando ele fala de sistema de ordem m. E quando ele diz "a soma de m vetores que pertencem às dadas m maneiras independentes de mudança do sistema" está se referindo a uma combinação linear de vetores que são linearmente independentes. Juntando essas duas partes, pode-se afirmar que Grassmann estava se referindo à base de um espaço vetorial, que é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram todo o espaço, sendo que gerar implica em ser escrito como combinação linear de alguns dados vetores, consequentemente, esses dados vetores são os elementos da base, cuja quantidade representa a dimensão do espaço.

Desde as representações iniciais do conceito de base e dimensão, nota-se a sua interdependência com outros conceitos como o de combinação linear e dependência linear, mostrando que os conceitos estão estabelecidos em um sistema conceitual que requer um pensamento teórico e formas de pensar específicas da matemática que relacionam os conceitos de modo a desenvolver novos conceitos.

Do ponto de vista contemporâneo, esse resultado pode ser reescrito como: Todo vetor de um espaço vetorial de dimensão m pode ser escrito como a combinação linear de m vetores linearmente independentes. Esse resultado se assemelha ao que Boldrini *et al.* (1986, p. 120) traz como sendo um teorema e escreve: "Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$."

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Peano (2000, p. 120, tradução nossa), aperfeiçoando a linguagem de Grassmann, ao definir dimensão, escreve que "O número de dimensões de um sistema linear é o número máximo de entidades mutuamente independentes do sistema que se pode assumir." Para tornar sua definição mais clara, ele exemplifica:

> Por exemplo: as formações da primeira espécie na linha reta, ou no plano, ou no espaço, formam sistemas lineares de 2, 3 e 4 dimensões, respectivamente; os vetores no plano ou no espaço formam sistemas de 2 e 3 dimensões; as formações de segunda espécie no espaço formam um sistema de 6 dimensões. Os números reais formam um sistema linear de uma dimensão, os imaginários, ou complexos ordinários, formam um sistema de duas dimensões. Um sistema linear também pode ter dimensões infinitas (PEANO, 2000, p. 120, tradução nossa).

Nota-se que Peano remete à existência de espaços vetoriais de dimensão infinita, consequentemente, a noção de base está implícita nesse conceito através dos seus nexos internos.

Formalizando todos esses conceitos, Boldrini *et al.* (1986) escreve que um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V será uma *base* de V se eles forem linearmente independentes e gerarem todo o espaço. E ainda, "Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão* de V, e denotado $dimV$" (BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 119, grifo do autor). Assim, temos uma síntese dos conceitos apresentados, inicialmente por Grassmann e aperfeiçoados por Peano e outros autores que, com o desenvolvimento da história, contribuíram para a melhoria da escrita matemática.

3.5 Transformação Linear

Na versão de 1862 da Teoria da Extensão, Grassmann acrescentou uma parte que não continha na versão de 1844 e a denominou de *Funktionenlehre* (Teoria de Funções), que, de acordo com Liesen (2011) é o mais esplêndido acréscimo feito por Grassmann. É nessa parte que encontramos uma seção intitulada *Ganze Funktionen ersten Grades und Darstellung derfelben als Quotienten.* (Funções completas de primeiro grau e a representação delas como Quociente), onde Grassmann trabalha com o objeto matemático denominado de

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Bruch ou *Quotient* (Fração ou Quociente). Numa linguagem atual, a "fração" de Grassmann pode ser chamada de transformação linear de um espaço vetorial de dimensão finita (LIESEN, 2011).

Peano (2000), ao representar o histórico pelo lógico através sua leitura de Grassmann, reescreve a definição de transformação linear da seguinte forma:

> Uma operação R, a ser realizada sobre cada entidade a de um sistema linear A, é dita *distributiva*, se o resultado da operação R sobre a entidade a, que indicaremos por Ra, é também uma entidade de um sistema linear, e as entidades
> $R(a + a' = Ra + Ra', R(ma) = m(Ra)$
> são verificadas, onde a e a' são entidades quaisquer de um sistema A e m é um número real qualquer. A entidade Raque é resultado da operação distributiva Rsobre a entidade a,é chamada de *função distributiva* de a. Uma operação distributiva também é chamada de *transformação linear* (PEANO, 2000, p. 122, tradução nossa, grifo do autor).

Através de um movimento temporal, trazendo o conceito de transformação linear para atualidade, Boldrini *et al.* (1986, p. 144, grifo do autor), escreve:

> Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (aplicação linear) é uma função de V em W, $F: V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:
> i Quaisquer que sejam u e v em V, $F(u + v) = F(u) + F(v)$,
> iiQuaisquer que sejam $k \in R$e $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

É notável que ambas as obras definem transformação linear da mesma maneira, apesar dos símbolos usados serem diferentes, mostrando que em Peano já havia a formação do conceito e que, com a história, houve a mutação da escrita simbólica matemática.

4. Considerações Finais

O desenvolvimento histórico dos conceitos apresentados, revela, em si, o seu movimento de constituição permeado pelas certezas e incertezas científicas que foram se transformando em prol da unidade conceitual, a saber, a síntese de cada conceito expresso nos livros didáticos da atualidade. A totalidade da Álgebra

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

Linear se dá além desse processo histórico e através da constituição do lógico, permeado pelo histórico, na formação do pensamento teórico que está em movimento na mente humana por meio da atividade de aprendizagem.

A semelhança entre os conceitos desenvolvidos por Grassmann, reescritos por Peano, e aqueles utilizados hoje na Álgebra Linear revelam que os nexos internos e externos dos conceitos foram se desenvolvendo com a história, revelando o movimento do pensamento humano em prol da síntese conceitual. Peano foi um mediador entre a complexa obra de Grassmann e a comunidade matemática, reapresentando a teoria grassmanniana em uma linguagem mais acessível e, consequentemente, aceita pelos matemáticos e estudiosos da época.

Seus feitos transcendem seu tempo e, acrescidos de melhorias feitas por grandes nomes, como Élie Cartan, Hankel, Whitehead e Klein, a Álgebra Linear se desenvolveu, estruturou e chegou à sua síntese, a qual encontra-se nos atuais livros didáticos. Foi a transformação da realidade matemática através do trabalho intelectual de grandes homens.

Através dos conceitos lançados por Grassmann, os matemáticos desenvolveram novos conceitos e teorias, avançando no processo do conhecimento prol meio da generalização matemática da teoria grassmanniana, como é o caso da teoria sobre espaço vetorial de dimensão infinita, que teve como propulsor uma consideração feita por Peano sobre o conjunto das funções polinomiais de uma variável real. Porém, a síntese axiomática deste conceito só foi finalizada por Banach em 1920.

Outras teorias também se desenvolveram a partir das ideias de Grassmann, como a axiomatização de um espaço vetorial normado, criada por Hilbert, a definição de base de uma extensão de um corpo, desenvolvida por Dedekind e a axiomatização de um espaço vetorial normado completo, criada por Banach.

É notória a importância da Teoria da Extensão de Grassmann para o desenvolvimento da Matemática, necessitando de mais pesquisas nessa obra tão densa que conduzam à compreensão de fatos que permeiam processos de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear na atualidade, sejam elas no campo da História da Matemática, da Didática da Matemática, ou outros afins.

Obutchénie
Revista de Didática e Psicologia Pedagógica

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

El Movimiento Histórico de las Aportaciones de la Teoría de Extensión de Grassmann al Álgebra Lineal

RESUMEN
Hermann Grassmann fue un alemán del siglo XIX que estableció los hitos iniciales para el surgimiento del Álgebra Lineal, un área de las Matemáticas que ofrece recursos básicos para el desarrollo de diversas subáreas de las Matemáticas y de otros ámbitos del conocimiento, como la Ingeniería y la Física, por ejemplo. Por ello, este artículo tiene por objeto presentar una biografía de este autor, destacando dos de sus obras que recogen sus logros en esta área. Consiste en una investigación bibliográfica con análisis cualitativo de datos basado en los fundamentos del movimiento lógico-histórico del objeto, posibilitando un análisis histórico, cultural y social, con el objetivo de responder a la siguiente pregunta problema: ¿cuáles fueron las contribuciones de Grassmann al desarrollo del Álgebra Lineal que lo llevaron a ser considerado el creador de este campo de estudio? La conclusión es que Grassmann lanzó las primeras ideas sobre muchos de los conceptos que hoy componen el Álgebra Lineal, como los espacios vectoriales n-dimensionales, la transformación lineal y otros, por lo que muchos lo consideran el creador del Álgebra Lineal.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas; Álgebra Lineal; Hermann Grassmann; Movimiento Lógico-Histórico.

5 Referências

ASSIS, Aline Mota de Mesquita. *Atividade de estudo do conceito de transformação linear na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov*. 2018. 235 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2018.

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

CAIRE, Elaine. *Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX*. 2020. 284f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

CROWE, Michael J. *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. London: University of Notre Dame Press, 1967.

DIEUDONNÉ, J. The Tragedy of Grassmann. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, n. 2, p. 1-14, 1979.

DORIER, Jean-Luc. *Analyse historique de l'emergence des concepts elementaires d'algebre linéaire.* In: Les cahiers de didactique des Mathematiques, Institut de Recherche pour L´Enseignement des Mathematiques, Universite, n.7, jun., 1990.

DORIER, Jean-Luc. A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia da Mathematica.* v. 22, n. 3, p. 227 – 261, 1995.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

DORIER, Jean-Luc. On the Teaching of Linear Algebra. *Mathematics Education Library*. Kluwer Academic Publishers, v.23, p. 18-33, 2000.

DOURADO, Thiago Augusto Silva. et al. "Die Lineale Ausdehnungslehre" de H. G. Grassmann. *Revista Brasileira de História da Matemática, [S. l.]*, v. 21, n. 42, p. 275–293, 2021. DOI: https://doi.org/10.47976/RBHM2021v21n42275-293.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GRASSMANN, Hermann. *Die Ausdehnungslehre von 1844 oder Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*. Zweite. Otto Wigand, Leipzig, 1878.

GRASSMANN, Hermann. *Die Ausdehnungslehre*. Berlin: Verlag von th. chr. fr. enslin, 1862.

GRASSMANN, Hermann. *A new branch of mathematics*: the "Ausdehnungslehre" of 1844 and other works. Translated by Lloyd C. Kannenberg. Chicago: Open Court Publishing Company, 1995.

GRASSMANN, Justus. *Description of the life of Hermann Grassmann by his son Justus Grassmann, probably written shortly after the death of his father.* 1877. In: PETSCHE, HansJoachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. From Past to Future: Grassmann's Work in Context. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 3-8.

KLEINER, Israel. *A history of abstract algebra*. Boston, USA: Birkhäuser, 2007.

KOPNIN Pável Vassílyevitch. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento.* Coleção Perspectivas do homem. V. 123. Rio de Janeiro, RJ: Civilização Brasileira, 1978.

LIESEN, Jörg. *Hermann Grassmann's theory of linear transformations*. In: PETSCHE, Hans Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. From Past to Future: Grassmann's Work in Context. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 311-324.

LIMA, Elon. Lages. *Algebra Exterior*. IMPA, 2017.

LINDER, Vinícius; SCHUBRING, Gert. Relações entre matemática e filosofia na emergência da matemática pura: a matemática como fundamento da pensabilidade. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 24, n.2, p. 108-146, 2022. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i2p108-146.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv8.e2024-33

MELCHIADES DA SILVA, Amarildo.; FRANT, Janete Bolite; OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de. Uma leitura de Produções de Significados na constituição da noção de base em Álgebra Linear. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática, [S. l.]*, v. 6, n. 1, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/38657. Acesso em: 21 fev. 2024.

OTTE, Mchaeli. The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz. *Historia Mathematica*. v. 16, p. 1-35. 1989.

PEANO, Giuseppe. *Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann. Translated by Lloyd* C. *Kannenberg*. Birkhauser, Boston, 2000.

RUBEM, Márcio. *História da Igreja.* 2023. Disponível em: https://historiadaigreja-com.webnode.page/o/pietistas-sec-xvii-/. Acesso em: 05/07/2023

SERVIDONI, Maria do Carmo Pereira. *A axiomatização da aritmética: e a contribuição Hermann Grassmann*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2006.

SOUSA, Maria do Carmo de. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. *Obutchénie:* Revista de Didática e Psicologia Pedagógica. Uberlândia, MG, v.2, n.1, p.40-68, jan./abr. 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.14393/OBv2n1a2018-3.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. Um estudo sobre as origens dos Espaços Vetoriais. *Revista Brasileira de História da Matemática*. v. 10, n. 19, p. 1-13, 2010. DOI: https://doi.org/10.47976/RBHM2010v10n191-38.

WHITEHEAD, Alfred North. *A Treatise on Universal Algebra. With applications*. Volume I. Cambridge: At the University Press, 1898.

Recebido em março de 2024
Aprovado em abril de 2024