

Movimento lógico-histórico do conceito de poliedro: o processo de elaboração e desenvolvimento de uma seqüência didática nos anos finais do Ensino Fundamental

Logical-historical movement of the polyhedron concept:
the process of elaboration and development of a didactic sequence in
Middle School

Wilson Francisco da Rocha Lima¹

RESUMO

Este artigo aborda o processo de ensino do conceito de poliedro nos anos finais do Ensino Fundamental. Nos materiais disponíveis para o ensino, o conceito aparece em situações que se encerram dentro da própria Geometria e que podem ser resolvidas de forma mecânica. Nesse contexto, utilizamos como metodologia a Engenharia Didática para elaborar e analisar o processo de criação e desenvolvimento de uma seqüência didática que considera a evolução histórica do conceito, por meio de seu movimento lógico-histórico, assim como os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem de conceitos geométricos. O objetivo é oferecer um ensino de Matemática que promova ampla compreensão desta ciência. O movimento lógico-histórico do conceito de poliedro auxiliou no entendimento da Matemática como ciência desenvolvida por seres humanos e em constante transformação. A utilização de materiais concretos permitiu a manipulação e visualização de objetos tridimensionais e facilitou a assimilação do conceito. A organização proposta pela metodologia adotada foi eficaz na busca pelos objetivos estipulados, mas ao segmentar as fases de planejamento e experimentação das atividades, esta abordagem deixa pouco espaço para a imprevisibilidade.

Palavras-chave: Engenharia Didática; Geometria; Relação de Euler.

ABSTRACT

This article approaches the process of teaching the concept of polyhedron the final years of elementary school. In the materials available for teaching, the concept appears in situations that are enclosed within Geometry itself and can be solved mechanically. In this context, we used Didactic Engineering as a methodology to design and analyze the process of creating and developing a didactic sequence that considers the historical evolution of the concept, through its logical-historical movement, as well as the cognitive processes involved in learning geometric concepts. The aim is to offer mathematics teaching that promotes a broad understanding of this science. The logical-historical movement of the polyhedron concept helped us understand mathematics as a science developed by human beings and in constant transformation. The use of concrete materials allowed the manipulation and visualization of three-dimensional objects and facilitated the assimilation of the concept. The organization proposed by the methodology adopted was effective in achieving the stipulated objectives, but by segmenting the planning and experimentation phases of the activities, this approach leaves little room for unpredictability.

Keywords: Didactic Engineering; Geometry; Euler's Gem.

¹ Doutorando do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos, Brasil. Orcid: <https://orcid.org/0009-0003-0295-1299>. E-mail: wilsonlima@estudante.ufscar.br.

1 Introdução

O conceito de poliedro é estudado nos anos finais do Ensino Fundamental, como parte dos estudos de Geometria que compõem o currículo de Matemática no Brasil.

Um assunto relacionado a esse conceito é a chamada Relação de Euler, contribuição do suíço Leonhard Euler para a Matemática, que generaliza em uma igualdade a relação existente entre a quantidade de vértices, arestas e faces de qualquer poliedro. Na educação básica, essa relação é estudada para poliedros convexos e generalizada na seguinte sentença: o resultado da soma da quantidade de vértices e da quantidade de faces é sempre igual ao número de arestas adicionado de duas unidades.

No processo de ensino-aprendizagem, frequentemente deparamo-nos com esse assunto em situações que se encerram dentro da própria Geometria, e que podem ser resolvidas de forma mecanizada. Por exemplo, as atividades propostas pelos Cadernos do Aluno, materiais de apoio distribuídos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, consistem em elaborar tabelas com as quantidades de arestas, vértices e faces de diversos poliedros convexos e constatar que a relação é válida em todos os casos.

A proposta de ensino se aproxima muito da Pedagogia do Treinamento problematizada por Lima (1998). Essa pedagogia tem como principal característica executar as etapas: 1) definição do conceito; 2) aplicação do conceito; 3) treinamento para o uso do conceito; e 4) avaliação como forma de organizar o processo pedagógico.

No entanto, essa abordagem pode gerar a impressão de que conteúdos matemáticos não são resultados de pesquisas desenvolvidas por seres humanos, e que já estão prontos, acabados, com fim em si mesmos. A Relação de Euler é um importante resultado que transformou paradigmas da Geometria e foi fundamental para o desenvolvimento da Topologia, importante área de pesquisa da Matemática.

Nesse contexto, surge a questão norteadora deste trabalho: como elaborar uma sequência didática que aborda os conceitos relacionados a poliedros de maneira crítica, contextualizando os conhecimentos com os momentos históricos nos quais foram desenvolvidos e articulando-os com pesquisas atuais da Matemática?

Assim, essa pesquisa analisa o processo vivenciado pelo autor-pesquisador-professor na elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática para ensinar o conceito de poliedro considerando os diferentes momentos históricos nos quais esse conceito se desenvolveu e se transformou. A sequência didática foi elaborada para uma turma de vinte estudantes do último ciclo do Ensino Fundamental de uma escola pública de São Carlos – SP.

Como metodologia foi utilizada a Engenharia Didática, que prevê a elaboração de um material didático para determinado conteúdo e de uma análise qualitativa do processo de desenvolvimento. Dessa forma, a Engenharia Didática é instrumento para a concepção de uma sequência didática e também uma metodologia de pesquisa.

Foram criadas situações de ensino-aprendizagem que consideram o movimento lógico-histórico do conceito, conforme teorizado por Sousa (2018) e Saito e Dias (2013). Essa perspectiva propõe o conhecimento como conteúdo mental que se expressa por meio da linguagem, e busca ressaltar as relações que esse conhecimento possui com a realidade objetiva em seu processo histórico de construção e transformação. O lógico, nesse caso, é o meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico de desenvolvimento do conceito.

Foram considerados também os estudos sobre os processos cognitivos envolvidos na compreensão de conceitos geométricos por um indivíduo. Almouloud (2010) explica que o pensamento geométrico envolve três processos cognitivos que preenchem funções epistemológicas específicas: visualização, construção e raciocínio. Na sequência didática elaborada estão presentes quatro formas de interpretações autônomas: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória, conforme classificação do autor supracitado.

2 O processo de elaboração e desenvolvimento

Nosso objetivo é analisar o processo de elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino da Relação de Euler. Nas situações de ensino-aprendizagem que compõem a sequência, buscamos considerar a perspectiva do movimento lógico-histórico do conceito. Utilizamos como metodologia de elaboração e de pesquisa qualitativa a Engenharia Didática.

Nessa seção trazemos uma breve descrição desta metodologia. Em seguida, apresentamos os referenciais teóricos que orientaram a elaboração da sequência didática e as análises do processo de elaboração.

2.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática é uma metodologia de trabalho didático que visa desenvolver, além de um material didático para determinado conteúdo, uma análise qualitativa acerca deste desenvolvimento. Assim, a Engenharia Didática é instrumento para a concepção de uma sequência didática e também uma metodologia de pesquisa, como explicam Almouloud e Coutinho (2008).

Como forma de organização do trabalho pedagógico, possibilita que o professor realize uma abordagem experimental, envolvendo a concepção, o desenvolvimento, a observação e a análise das sessões de ensino.

Como instrumento de pesquisa qualitativa, possui como objeto de análise o processo de elaboração de uma situação de aprendizagem ou de uma sequência de situações de aprendizagem, também chamada de sequência didática, sobre determinado conteúdo, sua experimentação em sala de aula e os resultados obtidos.

A metodologia propõe que a pesquisa seja realizada em quatro etapas: análises prévias; concepção e análises a priori; experimentação; análises posteriores e validação. Essas etapas, em geral, não ocorrem de maneira linear, como explica Pommer (2008). Em alguns momentos a elaboração do trabalho necessita de articulação, de antecipação e de superposição dos elementos caracterizadores das quatro etapas.

Na primeira etapa, das análises prévias, são realizados um levantamento e uma revisão bibliográfica de textos que versam sobre elementos didáticos gerais e relacionados ao conteúdo em questão, assim como de conhecimentos específicos relacionados ao tema da pesquisa.

Os estudos realizados nessa etapa devem abranger três dimensões: epistemológica, didática e cognitiva. Esses estudos podem ser retomados em outros momentos da pesquisa, conforme a necessidade, e possibilitam a realização da próxima etapa: concepção e análises a priori da sequência didática.

Na etapa da concepção e das análises a priori, o pesquisador deve selecionar alguns tópicos relacionados ao conteúdo em questão e ao seu ensino, que são consideradas no desenho da proposta didática. Elabora-se nessa etapa a sequência didática, e a análise a priori assume um caráter descritivo e de previsão, descrevendo as situações de aprendizagem e justificando as escolhas que levaram à elaboração de tais situações, relacionando o conteúdo estudado com as possíveis respostas dos estudantes e os desafios que podem ser encontrados no decorrer da experimentação.

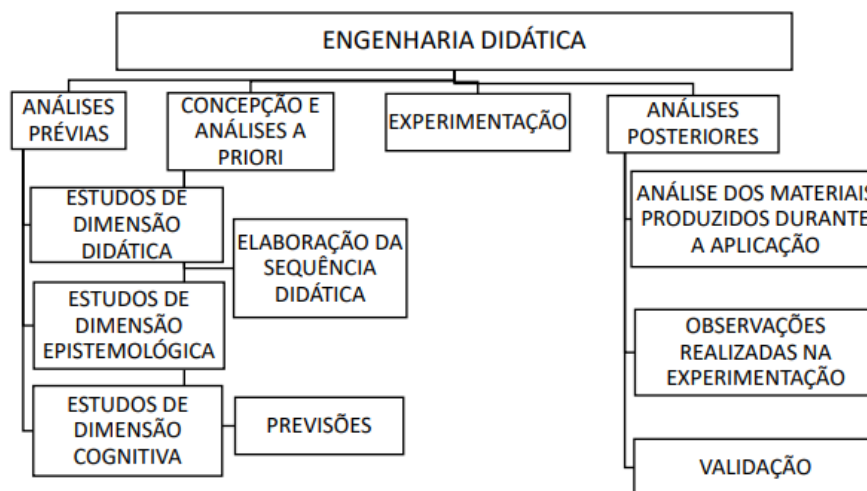
Na terceira etapa é feita a experimentação empírica da sequência didática desenvolvida. A partir da experimentação o pesquisador pode ampliar seu olhar sobre o objeto de pesquisa e obter registros que podem servir como instrumentos de análise na etapa posterior.

A análise dos resultados, que constitui a quarta etapa da pesquisa desenvolvida nos moldes da Engenharia Didática, é chamada de análise a posteriori, e consiste na avaliação e validação da experiência, por meio de dados recolhidos durante a aplicação da sequência didática. A figura 1 mostra um mapa conceitual com as etapas da Engenharia Didática como metodologia de ensino e pesquisa.

2.2 As análises prévias

A primeira etapa, das análises prévias, envolveu estudos em três dimensões: didática, epistemológica e cognitiva. Como objetos de estudos de dimensão didática foi estudado o ensino de Matemática que considera o movimento lógico-histórico do conceito (SOUSA, 2014; SAITO; DIAS, 2013).

Figura 1- Etapas da Engenharia Didática



Fonte: Lima, 2017.

A lógica dialética e o histórico como forma de pensamento possibilitam construir relações entre o histórico dos conceitos e sua essência, com o objetivo de apresentar o conceito para o aluno de forma mais ampla. A compreensão do processo de criação e desenvolvimento dos conceitos proporciona ao indivíduo, além de conhecer as necessidades e as aptidões humanas nele sintetizadas, a capacidade de elaborar novos aspectos e novas relações de movimento para esses conceitos. A compreensão, porém, não se limita à reprodução mecânica dos fatos, pois neste processo de compreensão, o aluno cria, recria e transforma os conceitos envolvidos, internalizando-os de maneira individual.

A abordagem do processo de desenvolvimento dos conceitos não necessariamente segue as etapas cronológicas, baseada em uma vertente historiográfica tradicional, pois isso “tende a reforçar a linearidade do desenvolvimento do conceito” (SAITO; DIAS, 2013, p.95). Ao utilizar-se de historiografias pautadas no evolucionismo pode-se causar a impressão de que os conhecimentos matemáticos só poderiam ter seguido esse caminho e que todo conhecimento existente converge para o momento presente, que seria a etapa mais aprimorada de seu desenvolvimento.

Através de uma abordagem que propõe estudar os conceitos em seus contextos históricos e os movimentos pelos quais passaram durante seu desenvolvimento histórico, essa impressão se dissipa, visto que se torna evidente

que seu desenvolvimento está em um contexto maior, seja esse contexto econômico, social, político ou cultural, e este transforma-se de acordo com as necessidades dos indivíduos. Como escreve Sousa (2014), essa abordagem contribui para o sentido da totalidade dos conhecimentos, ou seja, inserido em um contexto amplo que não deve ser desconsiderado.

Como objetos de estudo de dimensão epistemológica utilizamos uma historiografia da Matemática (Eves, 2004), uma historiografia específica do conceito de poliedro (RICHESON, 2008), obras literárias (PLATÃO, 2011), (EUCLIDES, 2009) e artigos publicados nas áreas de Matemática e História da Matemática, como Poincaré (2010), Sandifer (2007), Atiyah (2002) e Lloyd (2012), com o objetivo de analisar o Movimento Lógico-Histórico do conceito de poliedro na história da Matemática.

Os gregos foram os primeiros seres humanos que se dedicaram aos conhecimentos matemáticos dos sólidos, especificamente os Pitagóricos. Nessa época, a prosperidade e a democracia andaram juntas em Atenas. A vida intelectual girava em torno da Ágora. “Ali, agricultores do interior, mercadores e artesãos das lojas da cidade e mercadores e marinheiros recém-chegados do cais misturavam-se e conversavam” (EVES, 2004, p.92). Nesse momento da história surgiu o pensamento dedutivo nos conhecimentos humanos. “Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de por quê” (EVES, 2004, p.94).

A primeira aparição dos então chamados sólidos geométricos da qual se tem registro está na obra *Timeu* (PLATÃO, 2011). No livro, o filósofo expõe sua teoria acerca da composição do universo e das coisas materiais, associando ao elemento terra a forma cúbica, pela estabilidade do elemento e do sólido, ao fogo a figura sólida da pirâmide triangular, ao ar é associado o octaedro e à água, o icosaedro. Platão conclui a teoria associando o dodecaedro ao universo e suas constelações.

O estudo dos sólidos é retomado pelo matemático grego Euclides de Alexandria, que, de acordo com Eves (2004), foi aluno da Academia de Platão e mudou-se para a capital quando a famosa biblioteca estava sendo construída, fundando a escola de Matemática de Alexandria. Ele escreveu diversos livros, dos quais o conjunto mais

famoso se chama “Os Elementos” (EUCLIDES, 2009). No Livro XIII da obra, o autor exhibe como construir os cinco sólidos de Platão, elaborando o que Richeson (2008) afirma ser a mais importante contribuição deste livro.

Muito tempo depois, o matemático suíço Leonhard Euler aceitou o convite de Frederico, o Grande, e mudou-se para a Alemanha, assumindo uma cadeira na Academia de Berlim. Ali Euler permaneceu por 25 anos, e, de acordo com Richeson (2008), escreveu dois artigos que revolucionaram os estudos de poliedros: *Elementa Doutrinae Solidorum*, em 1750, e *Demonstratio nunnularum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sun praedita*, em 1751. Estes foram os únicos artigos publicados pelo matemático que abordam os poliedros e são muito importantes na história deste conceito.

No primeiro, Euler inicia seus estudos sobre o que ele denomina Stereometria. Para Sandifer (2007), ler esse artigo gera a impressão de que Euler escreveu diversos artigos sobre esse novo assunto, mas ele escreveu apenas dois. Com uma analogia aos polígonos, que consistem em pontos e segmentos de reta, o artigo de Euler propõe o estudo dos sólidos vistos como pontos, segmentos e planos.

Ele denomina os pontos de *anguli solidi*, e os representa pela letra S, e os planos de hedra, utilizando a letra H para representá-los. Os segmentos são por ele chamados de *acies*, representados pela letra A. Esses componentes dos poliedros são traduzidos para o português, respectivamente, como vértices, faces e arestas.

Sete páginas do artigo são destinadas a proposições relacionadas aos sólidos. A grande proposição enunciada pelo suíço é a Proposição IV, que afirma que em todo sólido fechado por planos, a soma do número de ângulos sólidos [vértices] e do número de faces excede o número de arestas por 2 (SANDIFER, 2007). No segundo artigo, Euler propõe uma demonstração para essa proposição.

O trabalho de Euler acerca dos poliedros revolucionou a visão dos matemáticos acerca destes objetos, e contribuiu para o surgimento da Topologia, no século XX. Como explica Richeson (2008), enquanto na Geometria é crucial que os objetos de estudo sejam rígidos, pois só assim é possível medir ângulos, comprimentos, deduzir congruências e calcular áreas e volumes, a Topologia descarta esta rigidez, pois esta obscurece outras propriedades matemáticas

subjacentes ao objeto estudado. Para um geômetra, dois triângulos são considerados iguais se são congruentes, ou, no mínimo, semelhantes. Já para um pesquisador da área de Topologia, dois objetos são considerados iguais se um pode ser transformado no outro através de transformações contínuas, como flexão, torção e alongamento, por exemplo. Estes espaços, nestas condições, são ditos homeomorfos.

Um dos primeiros trabalhos publicados na área de Topologia chama-se *Analysis Situs* (POINCARÉ, 2010) do matemático francês Henri Poincaré em 1895. Neste trabalho, Poincaré esquematiza sistematicamente os conhecimentos já desenvolvidos na área e desenvolve novos conceitos. Inicialmente, Poincaré define uma variedade, e os poliedros são estudados como variedades de duas dimensões, também chamadas de superfícies. No capítulo 16 de *Analysis Situs*, chamado O Teorema de Euler, Poincaré generaliza a famosa relação de Euler para qualquer variedade de dimensão p .

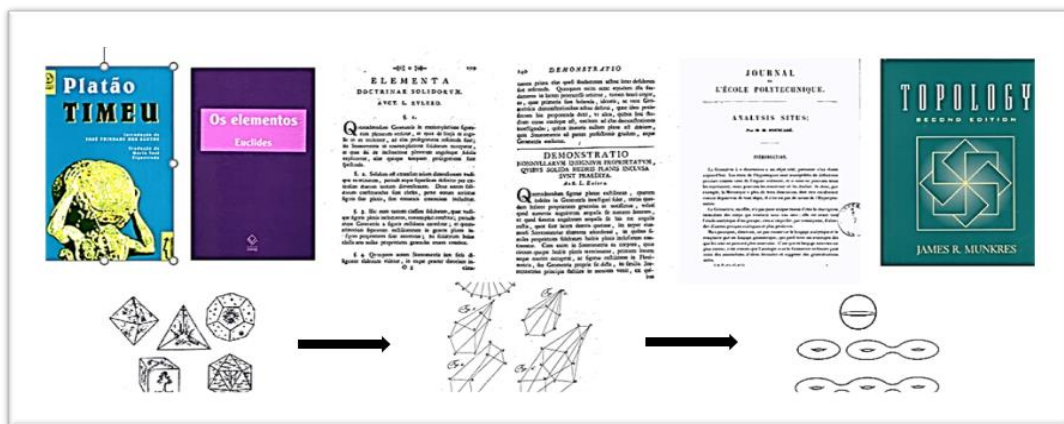
Poincaré exhibe uma maneira de calcular a Característica de Euler de uma superfície, e conclui que para poliedros convexos este número será igual a 2, independente da forma do poliedro. Na verdade, “o fato das faces serem planas é evidentemente sem importância [...] [o teorema] também é aplicável em subdivisões de qualquer superfície fechada em regiões conexas.” (POINCARÉ, 2010, p.61)

Os estudos com o objetivo de classificar superfícies, segundo Richeson (2008), foram iniciados por Riemann na década de 1850. Foi continuado por Möbius que demonstrou que qualquer superfície orientável compacta, ou seja, fechada e sem bordo, é homeomorfa a uma das formas que ele chama de formas normais. A demonstração do Teorema de Classificação das Superfícies Compactas, em sua versão completa, que inclui superfícies não orientáveis, foi concluída com rigor por Max Dehn e Poul Heegaard em 1907. A partir deste Teorema, é possível determinar a Característica de Euler de poliedros não-convexos que possuem ‘túneis’ observando-se o número de ‘túneis’ que este poliedro contém. Sabendo que $2-2g$ é a Característica de Euler de um toro de gênero g , se o poliedro em questão possui g ‘túneis’, pelo Teorema tem-se que este é homeomorfo a um toro de gênero g , portanto $V-A+F=2-2g$. Se o poliedro é não-convexo, porém não possui ‘túneis’, este é homeomorfo à esfera e, portanto, $V-A+F=2$.

Em síntese, mais de dois mil anos após a sua primeira aparição na obra de Platão, encontramos na atualidade um objeto bastante diferente do idealizado pelo

filósofo grego. Essas transformações pelas quais passou o conceito de poliedro podem ser vistas como reflexos das transformações pelas quais passou a sociedade e os indivíduos que nela estão inseridos. A figura 2 busca evidenciar o movimento das aparições do conceito de poliedros em três diferentes obras, escritas em contextos sociais e históricos distintos e que refletem especificidades de cada um destes contextos.

Figura 2- Movimento lógico-histórico do conceito de poliedro



Fonte: Lima, 2021.

Com os estudos de dimensão cognitiva buscamos entender os processos cognitivos envolvidos na compreensão de conceitos geométricos por um indivíduo. Almouloud (2010) explica que o pensamento geométrico envolve três processos cognitivos que preenchem específicas funções epistemológicas:

- 1) visualização, para a exploração e sucessiva aproximação de uma situação complexa;
- 2) construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo no qual as ações realizadas são representadas e os resultados observados são relacionados aos objetos representados;
- 3) raciocínio, que é processo que conduz para a demonstração matemática do resultado e para a explicação.

Ainda segundo o autor, esses processos cognitivos são entrelaçados e necessários para a proficiência da Geometria. Em contrapartida, a heurística dos problemas de Geometria dá lugar a formas de interpretações autônomas, das quais o autor distingue quatro:

1. sequencial, solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura;
2. perceptiva, que é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
3. discursiva, que é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados e levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto;
4. operatória, que está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que estas modificações sugerem.

Ao elaborar as situações de aprendizagem consideramos que as situações de ensino-aprendizagem que exploram conceitos geométricos devem evidenciar as figuras geométricas com um papel heurístico, levando em conta as diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

A demonstração deve ser parte integrante do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos e do raciocínio lógico-dedutivo. Nesse processo, Almouloud (2010) enfatiza também a importância dos registros de representação, em linguagem natural ou em linguagem matemática, assim como das ilustrações das formas geométricas.

2.3 Concepção e análises a priori

A sequência didática elaborada é composta de três situações de aprendizagem, que buscam compreender o movimento lógico-histórico do conceito (SOUSA, 2014; SAITO; DIAS, 2013) de poliedro e os processos cognitivos elencados em Almouloud (2010).

A primeira situação de aprendizagem é constituída por duas atividades, e compreende a habilidade de construir sólidos geométricos a partir da planificação, reconhecer semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros), comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão, identificar características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, percebendo semelhanças e diferenças entre elas (superfícies planas e arredondadas, formas das faces, simetrias).

A primeira atividade da situação de aprendizagem 1, que recebeu o nome de Dodecaedro do Zodíaco, foi inspirada na obra *Timeu*, de Platão (PLATÃO, 2011). Um dos objetivos dessa atividade é explorar a planificação do dodecaedro, sólido formado por doze pentágonos regulares, de maneira lúdica. Esta atividade articula no pensamento geométrico, conforme os termos utilizados Almouloud (2010), os processos cognitivos de visualização e construção. A atividade consiste em recortar e construir o dodecaedro, a partir da planificação que receberam, e na visualização do objeto já construído. Em cada face do dodecaedro está a representação de um signo do zodíaco.

Feita a construção do dodecaedro, cada grupo de alunos recebe uma folha impressa com as principais características de cada signo. Com estas informações, o aluno pode socializar e identificar algumas semelhanças que possui com outros colegas de sala. Busca-se despertar sentimentos de pertencimento a um grupo social.

A segunda atividade tem como pano de fundo os primeiros registros de definições de sólidos geométricos, realizados por Euclides. Um dos objetivos desta atividade é familiarizar o aluno com a linguagem matemática explorando o que é uma definição dentro desta ciência. Considerando a definição matemática como elemento básico de demonstrações dos resultados da Matemática, é importante que esta seja explorada no ensino fundamental, pois conforme pontua Almouloud (2010, p.132), a iniciação à demonstração tem um papel importante e pode levar os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental à melhor aquisição dos conceitos geométricos e de habilidades geométricas.

Os alunos trabalham em duplas. Cada dupla escolhe um poliedro entre diversos tipos de poliedros, convexos, não convexos, alguns com ‘túneis’, que estão dispostos em uma caixa. A partir da observação do sólido, o aluno conversa com seu colega sobre as características que o definem e juntos escrevem uma definição. Espera-se nesta etapa que o aluno elabore questões sobre as características e elementos dos poliedros, como faces, arestas e vértices, entre outros.

Em seguida, os estudantes devem desenhar o poliedro. Espera-se que, ao realizar esta representação, o aluno seja estimulado a identificar as faces do poliedro com polígonos, os quais ele terá que representar de maneira indireta em seu desenho.

Após concluírem as representações e definições dos poliedros, as definições são compartilhadas oralmente, em um bate-papo sobre a atividade, no qual todos

devem se sentir à vontade para expor os raciocínios que os levaram a construir as definições. Em seguida, os grupos constroem coletivamente uma definição dos objetos estudados nesta aula, chamados na Matemática de poliedros (palavra de origem grega que pode ser traduzida como várias faces).

Nesta atividade são articulados os processos cognitivos de visualização e raciocínio, conforme os termos utilizados por Almouloud (2010). O aluno parte da simples observação de um objeto para elaborar um texto, ou seja, elaborar registros semióticos que traduzem as ideias que possui em um discurso explicativo.

A segunda situação de aprendizagem é composta por três atividades que tem como objetivo desenvolver as habilidades de identificar elementos de um poliedro como faces, vértices e arestas, coletar, organizar e descrever dados, estabelecer relações entre acontecimentos e fazer previsões, identificar diferentes possibilidades na composição e decomposição de figuras tridimensionais e representar e resolver problemas por meio de equações.

Os grupos de estudantes recebem novamente um poliedro, que pode ser convexo, não convexo, com ou sem túneis, e são orientados a contar o número de vértices, faces e arestas do poliedro e devem anotar os dados dos objetos. Após a coleta de dados, estes são organizados em uma tabela.

O objetivo de se organizar os dados dos poliedros em uma tabela é questionar sobre a relação de Euler, desconhecida para os estudantes do Ensino Fundamental, anos finais. Entretanto, como não são utilizados apenas poliedros convexos sem túneis, a contradição está presente e contribui para o movimento de elaboração do conhecimento a partir da construção e testagem de hipóteses e para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Para explorar a demonstração da Relação de Euler é utilizado um cubo, feito em material manipulável, para exibir como funcionam os cortes que Euler utilizou em sua demonstração, obtendo um tetraedro após certo número de cortes. Essa etapa da atividade auxilia a compreensão do que é uma demonstração matemática, pois conforme escreve Duval, a “tomada de consciência [do que é uma demonstração] surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso” (ALMOULOUD, 2010, p.128).

A segunda atividade propõe a resolução de três questões retiradas do SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Todas tratam o conceito de poliedro a partir das ideias desenvolvidas por Leonhard Euler, e aprofundam o tratamento dado aos objetos pela atividade anterior.

Nessa atividade os alunos articulam as funções epistemológicas de visualização e construção, conforme os termos definidos por Almouloud (2010). De acordo com o autor, o processo cognitivo de construção se dá no momento que o aluno liga as ações e os objetos concretos aos objetos matemáticos representados. Nesse caso, os alunos recebem questões que possuem poliedros representados para que observem características dos objetos em sua representação matemática.

Na terceira atividade pretende-se trabalhar a forma de apreensão que Almouloud (2010) chama de operatória. A atividade consiste em resolver uma questão retirada do Banco de Questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (ASSIS et al, 2015, p.46).

Inicialmente os alunos acessam apenas a representação matemática fornecida pela questão e devem resolver a questão em equipe. Entretanto, prevendo que nessa etapa alguns alunos podem apresentar dificuldades para visualizar as transformações do sólido em questão, construímos o modelo em material concreto que permite visualizar os cortes realizados em um cubo e o novo sólido obtido.

De acordo com Almouloud (2010), a reconfiguração é a operação que permite obter figuras diferentes a partir de uma figura dada. As partes obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em diversas outras subfiguras, todas dentro da figura de partida. Dessa maneira, essa operação permite engrenar diversos tipos de tratamento, como medidas de áreas e volumes por soma de partes elementares, por exemplo, ou a equivalência de reagrupamentos intermediários.

A terceira situação de aprendizagem busca trazer para a sala de aula os poliedros como são estudados atualmente, pelos pesquisadores da área de Topologia, e compreende as habilidades de coletar, organizar e descrever dados, estabelecer relações entre acontecimentos e fazer previsões, identificar diferentes possibilidades na composição e decomposição de figuras tridimensionais.

A situação se constitui apenas por uma atividade, que consiste em retomar a tabela elaborada na situação anterior, na qual constam os números de arestas, vértices e faces dos poliedros, para refletir sobre a sua generalização quando os poliedros possuem túneis. Ao aplicar a relação de Euler nos poliedros que possuem um túnel, como os disponibilizados, encontra-se sempre o resultado zero. A atividade é interessante pois retoma os poliedros com túneis, já utilizados no início desta sequência e os inclui no estudo de poliedros. Em geral, o estudo de poliedros nos livros didáticos limita-se apenas ao estudo de poliedros convexos.

Buscando estabelecer as diferenças entre as formas, como são estudadas na Topologia, são expostos objetos com a forma da esfera e do toro, estimulando a imaginação de como poliedros sem túneis podem ser transformados em uma esfera e poliedros com um túnel podem ser transformados em um toro, sem a necessidade de cortar ou colar, introduzindo o conceito de transformações que conservam a topologia desses objetos.

2.4 Experimentação e análises posteriores

Após a etapa de elaboração e das análises a priori, a sequência didática foi desenvolvida com uma turma de estudantes do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de São Carlos - SP. A turma conta com vinte e dois alunos matriculados, mas o número de pessoas presentes variou muito e apenas dez alunos participaram de todas as situações de aprendizagem que compõem a sequência didática. Todavia, essa variação não gerou grandes conflitos no desenvolvimento da sequência.

Todas as situações de aprendizagem propostas foram realizadas em duplas ou grupos. Durante a aplicação, este método de trabalho mostrou-se muito eficiente, pois facilitou a socialização dos conhecimentos prévios dos alunos, que juntos puderam recordar diversos tópicos de Geometria.

Além disso, a realização das atividades de maneira coletiva auxiliou para que todos conseguissem se apropriar dos conhecimentos durante o desenvolvimento das situações. Alguns alunos, ao compreenderem os assuntos abordados, passaram a dialogar sobre estes assuntos com os colegas. Nesse processo, auxiliaram os outros a compreender e fortaleceram a própria assimilação dos novos conhecimentos.

Como explica Oliveira (1997), os estudos de Vygotsky nos permitem compreender que os processos pelos quais o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes, valores e outros componentes do seu desenvolvimento, estão fortemente ligados às relações desse indivíduo com seu ambiente sociocultural e à sua situação de organismo que não se desenvolve plenamente sem o suporte de outros indivíduos, como ocorreu com os estudantes que participaram da atividade.

A utilização de materiais manipuláveis mostrou-se de extrema importância no desenvolvimento das situações de aprendizagem propostas, pois sem recorrer à manipulação dos objetos tridimensionais, os objetivos de algumas situações de aprendizagem não foram atingidos.

Almouloud (2010) propõe que uma sequência didática para o ensino de conceitos geométricos deve conter “figuras geométricas que tenham um papel heurístico, levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial”). No caso dessa pesquisa, os objetos elaborados para a sequência de situações de aprendizagem contribuíram notavelmente para a construção dos conhecimentos acerca da forma, da composição e da reconfiguração dos sólidos estudados.

A maioria dos alunos presentes declararam nunca ter realizado atividades que envolvem planificação e construção de poliedros, apesar destas habilidades estarem presente no currículo do Ensino Fundamental. Quando foram questionados sobre a construção do cubo, que em geral é realizada no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, os estudantes ficaram divididos.

Alguns conheciam tal construção e outros declararam nunca ter tido contato com planificações de figuras sólidas. Nesse momento, foi necessário um diálogo mais amplo sobre planificações de poliedros, e foram exibidos, como exemplos, algumas planificações de outros poliedros, como o cubo, a pirâmide e o octaedro. Embora não estivesse presente no planejamento, o momento mostrou-se oportuno para a apresentação destes conhecimentos.

As estratégias criadas pelos alunos para definir os objetos foram basicamente partir do número de vértices, arestas e faces e das formas geométricas de cada face. Todos os alunos da turma demonstraram estar familiarizados com figuras geométricas planas, e conseguiram identificar nos sólidos faces

triangulares, quadradas, hexagonais, entre outras. Alguns estudantes confundiram figuras bidimensionais e tridimensionais, revelando dificuldades para reconhecer as diferenças entre os dois tipos de figuras geométricas. Essas dificuldades evidenciaram a necessidade de uma conversa e da exibição de exemplos de formas planas e de formas tridimensionais. Novamente foi necessária uma ação que não estava prevista no planejamento.

A metodologia proposta pela Engenharia Didática, utilizada para moldar o desenvolvimento deste trabalho e conduzir a pesquisa qualitativa, mostrou sua eficácia na consecução dos objetivos estabelecidos. Contudo, ao dividir as etapas de planejamento e execução das atividades, tal abordagem pode, inadvertidamente, rigidificar o processo educacional, restringindo a margem para surpresas.

Dentro do escopo delineado neste estudo, durante a fase experimental, emergiram lacunas inesperadas na etapa de planejamento. Desafios como a falta de conhecimento prévio dos estudantes supracitada, assim como as flutuações significativas no número de participantes foram identificados, e demandaram de adaptação contínua do plano de ensino. A maleabilidade do planejamento revelou-se essencial para visitar conceitos anteriores conforme necessário e para ajustar de forma contínua os resultados obtidos.

Na atividade que envolve a transformação de um cubo em um tetraedro, por meio de cortes, quase todos os alunos apresentaram dificuldades em visualizar o processo por meio de sua representação matemática. Esta dificuldade revelou que os alunos ainda não haviam desenvolvido habilidades relativas às interpretações operatórias de uma figura geométrica espacial, pois não foram capazes de processar mentalmente as modificações, nesse caso específico uma modificação mereológica, conforme Almouloud (2010), sofridas pelos objetos e visualizar o resultado desta modificação.

Quando receberam o material concreto que permitiu a visualização da transformação empiricamente, muitos alunos passaram um tempo manipulando o material, e isso auxiliou na compreensão da operação mereológica e contribuiu para o desenvolvimento da apreensão operatória.

À medida que os alunos realizavam as atividades propostas, habituaram-se a trabalhar com os diferentes registros e com suas transformações. Uma vez que

iniciaram com representações concretas dos sólidos, criaram suas próprias representações, misturando registros distintos de forma a facilitar o entendimento, e puderam estudar outras representações, que envolvem maior capacidade de abstração. Foi possível notar que esta abordagem auxiliou na compreensão dos conceitos.

A compreensão do movimento lógico-histórico do conceito de poliedro revelou-se uma perspectiva didática interessante para tratar os assuntos relacionados ao conceito de poliedro. Através desta, a abordagem evidenciou as transformações na maneira de se conceber um poliedro em diferentes épocas e por indivíduos de diferentes culturas, auxiliando no entendimento da Matemática como ciência desenvolvida por seres humanos e em constante transformação.

A introdução dos conceitos topológicos e as relações entre poliedros, esferas e toros despertaram nos alunos interesse pela Matemática científica. Durante a aplicação da sequência didática desenvolvida neste trabalho foi possível notar que a aproximação entre a Matemática como área de pesquisa atual e a Matemática escolar possibilitou aos estudantes a visão de Matemática como uma ciência viva, atual e em constante desenvolvimento.

3 Considerações finais

O presente trabalho analisou o processo de elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino de poliedros com a participação da História da Matemática, compreendendo a concepção de poliedros por indivíduos de diferentes culturas em diferentes momentos históricos, por meio de seu movimento lógico-histórico, para levar para a sala de aula situações de aprendizagem que possibilitaram diálogos entre a cultura do ambiente escolar e as culturas nas quais os conhecimentos foram concebidos.

No processo de elaboração e desenvolvimento da sequência didática, consideramos também os registros de representação semiótica e suas transformações no estudo de um conceito geométrico. Por meio do contato com diferentes maneiras de se representar um objeto geométrico, as atividades possibilitaram aos estudantes articularem diferentes processos cognitivos que preenchem específicas funções epistemológicas relacionadas à compreensão do conceito.

A utilização de materiais concretos desempenhou um papel fundamental, permitindo a manipulação e visualização de objetos tridimensionais, sem os quais os objetivos das situações de aprendizagem poderiam não ser alcançados. Dessa forma, destaca-se a importância de incluir figuras geométricas que desempenham um papel heurístico na sequência didática, pois estas contribuíram notavelmente para a construção do conhecimento acerca da forma, da composição e de reconfigurações dos sólidos estudados.

O ensino de Geometria Espacial pautado apenas em conteúdos teóricos, sem objetos manipuláveis ou situações que envolvem a construção de sólidos, dificultam a assimilação dos conceitos envolvidos. Sem a possibilidade de visualizar tais formas o aluno será impossibilitado de criar registros mentais que possibilitam operar estas formas, habilidade esta que deve ser desenvolvida na escola básica

A abordagem proposta pela Engenharia Didática, que se constitui como a metodologia para a estruturação do desenvolvimento deste trabalho, bem como um método de pesquisa qualitativa, revelou-se eficaz na busca pelos objetivos estipulados. No entanto, ao segmentar as fases de planejamento e experimentação das atividades, esta abordagem pode inadvertidamente engessar o processo educacional, deixando pouco espaço para a imprevisibilidade.

No contexto da sequência delineada neste estudo, durante a fase experimental, surgiram lacunas não antecipadas na etapa de planejamento. Desafios como a ausência de conhecimentos prévios por parte dos estudantes e variações significativas no número de participantes foram observados, exigindo uma adaptação constante do plano de aula. A flexibilidade do planejamento revelou-se crucial para revisitar conceitos prévios conforme necessário e para ajustar continuamente os resultados alcançados.

Esta experiência destaca a falha em prever completamente o processo de ensino-aprendizagem. Demonstra, portanto, a importância de incorporar a flexibilidade desde a concepção do plano, reconhecendo que o inesperado é inerente ao processo educativo. Uma abordagem metodológica mais adaptável pode permitir uma resposta mais eficaz às necessidades emergentes dos estudantes e promover um ambiente de aprendizado ainda mais dinâmico e inclusivo.

Movimiento lógico-histórico del concepto de poliedro: el proceso de elaboración y desarrollo de una secuencia didáctica en los últimos años de la Educación Primaria

RESUMEN

Este artículo aborda el proceso de enseñanza del concepto de poliedro en los últimos años de la Educación Primaria. En los materiales disponibles para la enseñanza, el concepto aparece en situaciones que se cierran dentro de la propia Geometría y que pueden resolverse de forma mecánica. En este contexto, utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica para elaborar y analizar el proceso de creación y desarrollo de una secuencia didáctica que considera la evolución histórica del concepto, a través de su movimiento lógico-histórico, así como los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de conceptos geométricos. El objetivo es ofrecer una enseñanza de Matemáticas que promueva una amplia comprensión de esta ciencia. El movimiento lógico-histórico del concepto de poliedro ayudó en la comprensión de las Matemáticas como ciencia desarrollada por seres humanos y en constante transformación. La utilización de materiales concretos permitió la manipulación y visualización de objetos tridimensionales y facilitó la asimilación del concepto. La organización propuesta por la metodología adoptada fue eficaz en la búsqueda de los objetivos establecidos, pero al segmentar las fases de planificación y experimentación de las actividades, este enfoque deja poco espacio para la imprevisibilidad.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica; Geometría; Relación de Euler.

4 Referências

ALMOULOUD, S. Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* – Campinas, São Paulo. Papirus, p. 125-148. 2010.

ALMOULOUD, S. A. COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Vol. 3, 8. p. 62 – 77. UFSC, 2008. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62>.

ASSIS, C. BARBOSA, R. FEITOSA, S. MIRANDA, T. OBMEP. Banco de questões 2015. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

ATIYAH, M. Mathematics on the 20th century. In: *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 34. Jan. 2002. DOI: <https://doi.org/10.1112/S0024609301008566>.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Translated to Portuguese by Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Translated to Portuguese by Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

- LIMA, L. C. Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica. In: Programa Integrar. Caderno do Professor: trabalho e tecnologia. CUT/SP, 1998, p. 95-103.
- LIMA, W. F. R. Movimento lógico-histórico do conceito de poliedro. In: Anais do Encontro Mineiro de Educação Matemática: desafios e possibilidades da Educação Matemática durante e pós-pandemia. Anais... Pouso Alegre (MG) IFSULDEMINAS, 2021. DOI: <https://doi.org/10.29327/147222.9-13>.
- LIMA, W. F. R. Uma sequência didática para o ensino de poliedros explorando o movimento lógico-histórico do conceito. 2017. Dissertation (Master's in Mathematics) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.
- LLOYD, D. R. How old are the Platonic Solids? BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 27(3), p. 131-140, London: British Society for the History of Mathematics, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1080/17498430.2012.670845>.
- OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997.
- PLATÃO. Timeu-Crítias. Translated to Portuguese by Rodolfo Lopes. Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos da Universidade de Coimbra, 2011.
- POINCARÉ, H. Papers in Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements. Translated by John Stillwell. Providence, RI: American National Society, 2010.
- POMMER, W. M. Equações diofantinas lineares: um desafio motivador para alunos do ensino médio. 2008. 153 f. Dissertation (Master's in Education) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.
- RICHESON, D. S. Euler's Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- SAITO, F. DIAS, M. S. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. Ciência & Educação, v. 19, n. 1, p. 89-111. Bauru: UNESP, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1516-73132013000100007>.
- SANDIFER, E. *How Euler did it*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2007. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/spec/052>.
- SOUSA, M. do C. de. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. *Obutchénie*. Revista De Didática E Psicologia Pedagógica, 1(4), 40–68, 2018. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv2n1a2018-3>.

Recebido em fevereiro de 2024
Aprovado em março de 2024