Obutchénie
Revista de Didática e Psicologia Pedagógica
DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

Conceitos Geométricos no primeiro ano escolar: manifestações em livro didático de Sistema de Ensino Desenvolvimental

Geometric Concepts in First School: manifestations in the didactic book of the Developmental Teaching System

Osvaldo Augusto Chissonde Mame[1]
Ademir Damazio[2]

RESUMO
O presente trabalho descreve o contexto de organização do ensino em que ocorre o desenvolvimento dos conceitos geométricos no primeiro ano do ensino fundamental. Fundamenta-se na teoria histórico-cultural, em especial as orientações de Davýdov e seus colaboradores. Tem como questão: Como são introduzidos os conceitos geométricos no primeiro ano do ensino fundamental no Sistema Elkonin-Davidov-Repkin? A referência de análise é os livros didáticos do referido ano escolar produzidos pelo grupo de Davýdov e o respectivo livro de orientação aos professores. Prioriza algumas tarefas particulares que introduzem os conceitos com teor geométrico. O estudo revela que as tarefas colocam o pensamento dos estudantes em movimento para as primeiras apropriações teóricas de conceitos geométricos, como ponto, reta e segmento, que expandem para linhas (curvas, quebradas, abertas, fechadas) e comprimento. Há articulação com os componentes da aritmética e da álgebra, mediados pela relação entre grandezas.

Palavras-chave: Geometria. Histórico-Cultural. Elkonin-Davidov-Repkin.

ABSTRACT
This work describe the context – mathematical and of teaching organization – in which the development of geometrical concepts take place in the first year of elementary school. It is based on historical-cultural theory, especially the guidelines of Davýdov and his collaborators. The research question is: How are geometric concepts introduced in the first year of elementary school in the Elkonin-Davidov-Repkin System? School books and teachers' books produced by the Davýdov group are used as reference in the analysis. Some particular tasks which introduce geometrical concepts. The study reveals that the tasks proposed prepare the students for the first theoretical appropriations of the geometrical concepts such as point, line and segment, and expand to the idea of lines (curved, broken, opened, closed) and length. There is an articulation with the components of arithmetic and algebra mediated by the relation among magnitudes.

Keywords: Geometric Concepts. Cultural-Historical Theory. Davydov Proposition.

[1] Universidade José Eduardo dos Santos, Huambo, Angola. Orcid: http://orcid.org/0000-0002-1239-0371. E-mail: osvalneusiomame@gmail.com.
[2] Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6755-3377. E-mail: add@unesc.net.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

1 Introdução

As pesquisas em educação matemática, das últimas décadas (PAVANELLO, 1993; MENESES, 2007; CARDOSO, 2012; LORENZATO, 1995, 2006), mostram que a geometria não assume relevância no currículo escolar nas mesmas proporções da aritmética e da álgebra. Para Pavanello (1993), Menezes (2007), Cardoso (2012) e Lorenzato (1995), essa secundarização decorre das dificuldades por parte dos professores em lidar com os referidos conceitos. Esse empobrecimento da geometria em sala de aula nos coloca em situação de busca por um modo de organização do ensino que possibilite a apropriação, pelos estudantes, dos seus conceitos. Tais estudos denunciam a referida ausência, mas não propõem um sistema que oportunize a apropriação, em nível teórico, dos conceitos geométricos, articulada com a aritmética e a álgebra.

Nesse âmbito, deparamo-nos com algumas proposições brasileiras – por exemplo, Lorenzato (2006), e estrangeiras, dentre elas cita-se Villiers (2010). Essa última, apresenta um estudo com base na teoria de Van Hiele para o ensino da geometria. No entanto, tais propostas centram-se basicamente na geometria, o que parece sedimentar a tricotomização entre ela, a álgebra e a aritmética. Isso significa que ainda existe o risco de se priorizar um desses campos matemáticos em detrimento dos outros e, por questão de tempo e afinidade, o professor se centrar em um ou dois deles e abandonar o outro. Por isso, buscamos contribuições nos estudos elaborados sob a base da teoria histórico-cultural, concretamente na proposição de ensino de Davýdov[3] e de seus colaboradores e continuadores, no âmbito do que Longarezi (2018) denomina de Sistema Didático Elkonin-Davidov-Repkin. O apego a essa proposição se justifica na afirmação de Davýdov (1982) de que uma das preocupações do seu modo de organização do ensino foi a superação do divórcio existente entre as significações aritméticas e algébricas. Contudo, para Rosa (2012), a confluência conceitual do referido sistema é tão presente que não só confirma a tese de Davýdov (1982) como inclui

[3] Adotamos a grafia do nome do autor como aparece nas obras citadas. Quando a referência é nossa, Davýdov.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

as significações geométricas. Suas ações, operações e tarefas (LEONTIEV, 1978) criam as condições para que as crianças se apropriem dos conceitos matemáticos no mais alto grau de cientificidade (DAVÍDOV, 1988). Não priorizam conceitos empíricos como nos sistemas educacionais em vigor, causadores das fragilidades mencionadas. A repercussão positiva desse modo de organização do ensino é referenciada na literatura nacional, por exemplo, em Libâneo e Freitas (2013) e Rosa (2012) e, internacionalmente, dentre tantos, Schmittau e Morris (2004).

A marginalização da geometria e as possibilidades vislumbradas colocam o seguinte problema de pesquisa: Como são introduzidos conceitos geométricos no primeiro ano do ensino fundamental no modo de organização do ensino de Matemática do Sistema Elkonin-Davidov-Repkin? Para tanto, debruçamo-nos na tarefa de atingir o seguinte objetivo geral: apresentar o contexto – matemático e de organização do ensino – em que ocorre o desenvolvimento das primeiras noções conceituais de geometria, proposto pelo Sistema Elkonin-Davidov-Repkin.

2 Considerações metodológicas

O estudo adota a análise qualitativa descritiva – de base bibliográfica – do desenvolvimento das primeiras noções conceituais de geometria no primeiro ano escolar, da organização do ensino elaborada especialmente por Davýdov, seus colaboradores e continuadores. Têm como *locus* duas fontes bibliográficas: 1) Горбов, Микулина, Савельева[4] (2008), manual de orientação ao professor do primeiro ano; 2) ДАвыдова[5] et al. (2012), livro didático dos estudantes. A investigação se concentra no modo que os conceitos geométricos – tratados nos dois livros – por meio de algumas tarefas identificadas com base: 1) nas ilustrações e enunciados que indicassem alguma referência a conceito de geometria; 2) no(s) elemento(s) que articula(m) os conceitos de uma tarefa com a outra; 3) nas ideias, propriedades e princípios referentes aos conceitos de geometria. É possível distinguir, nos livros, dois grupos de tarefas. Um, que não serão analisadas, enfatiza as formas geométricas – como componentes de

[4] Gorbov, Mikulina e Savieliev.
[5] Davidov.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

introdução do ensino da matemática – e prioriza as figuras geométricas para analisar as características externas (cor, forma, tamanho, posição). O outro grupo, foco do presente estudo, apresenta tarefas que se voltam aos conceitos geométricos (pontos, segmentos, linhas retas e curvas, comprimento, linhas fechadas e abertas, limites das figuras, área, volume e capacidade). Traz vínculos das relações entre grandezas que é o objeto central dos conceitos e condição para o desenvolvimento do pensamento teórico (DAVÍDOV, 1988).

Ainda, foi considerado o anunciado por Davýdov (1982) de que as tarefas são elaboradas de modo que os estudantes procurem novos caminhos e inventam seus próprios meios para atingir os objetivos de aprendizagem.

3 As proposições davydovianas referentes ao objeto de estudo

A proposta de Davýdov e colaboradores – apresentada nessa seção, na especificidade de conceitos geométricos introduzidos no primeiro ano escolar – atende ao conclamo de Vygotski (1993, p. 243): "[...] o ensino é unicamente válido quando precede ao desenvolvimento". Esse desígnio exige a organização do ensino que contemple: tarefas de estudo movidas pelas suas particulares – em um contexto de ações de estudos – com teor investigativo. Tal organização aponta para a apropriação conceitual, cujo processo permita, às crianças, a identificação das condições de origem do conhecimento (DAVÍDOV, 1988). Nesse sentido, Горбов, Микулина e Савельева (2008) salientam: ao organizar a aprendizagem, não é possível introduzir a lógica conceitual como modelos prontos. Em vez disso, imprimir um movimento que expresse as características gerais do objeto da matemática: a grandeza. Para tanto, adota como um dos princípios didáticos, o de "caráter objetal", fazendo que as tarefas particulares propiciem à análise de situações que requerem o manuseio e observações de objetos ou figuras familiares, a fim de revelar a relação essencial o conceito (DAVÍDOV, 1988).

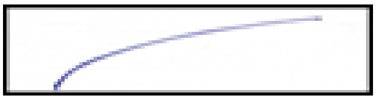
Afim de explicitar tais pressupostos, a análise centra-se na apresentação de algumas tarefas que, segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), têm como finalidade colocar os estudantes em ação investigativa para as apropriações

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

das bases de alguns conceitos geométricos, que se apresentam inter-relacionados, constituído um sistema conceitual. Eles se apresentam no contexto da "primeira tarefa de estudo", que tem a finalidade de criar as condições necessárias para que as crianças desenvolvam o pensamento conceitual de *número* – por extensão de operações e propriedades matemáticas – *como relações entre grandezas* (DAVÍDOV, 1988). Por isso, trazem um teor fortemente aritmético de medida, inter-relacionados, de modo implícito ou explícito, com ideias geométricas e algébricas. Estas, em determinadas tarefas, são desenvolvidas como condições prévias para o surgimento de uma base conceitual ou para o desenvolvimento do segundo tipo de representação[6] do resultado da comparação das grandezas.

A introdução do conceito de reta (figura 1) não perde de vista a ideia de sua origem nas ações práticas e os problemas da vida cotidiana. Горбов, Микулина e Савельева (2008) orientam para entregar às crianças uma folha de papel e o professor solicitar para que elas dobrem, conforme o modelo indicado. E, em outra folha, desenharem a linha reta sem o uso de instrumentos. O propósito dessa condição é levar os estudantes a perceberem que a linha desenhada à mão livre é torta ou curva. A intenção é que o diálogo necessário à análise da situação leve as crianças à conclusão de que a dobra forma uma linha reta.

Figura 1 – Introdução da noção de linha reta e curva



Fonte: adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Горбов, Микулина e Савельева (2008) sugerem a questão: *Como fazer para desenhar a linha reta?* Isso cria a necessidade da ação investigativa que conduz a duas possibilidades de modo de ação: 1) dobrar a folha ou apoiar em

[6] No modo davydoviano de organização do ensino, a representação de resultados das medições (indicação das relações de maior, igual e menor) é desenvolvida gradativamente em três níveis: 1) objetal, com apresentação de duas fichas (iguais ou diferentes, dependendo do resultado da comparação das grandezas); 2) gráfica (por meio de segmentos) e 3) literal (com letra).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

outro objeto com os lados retos, pelo desconforto de, à mão livre, traçar a linha reta; 2) uso da régua, instrumento especial, para cumprir a finalidade.

As primeiras tarefas têm por base a unidade constituída pelos conceitos: linha e suas particularidades (curva e reta). Outras tarefas retomam a linha curva – que não serão explicitadas – e, por exemplo, propõem que as crianças contornem, com o lápis, a palma da mão, para responder à questão: Que tipo de linha aparece na folha? Nelas, há aspectos da gênese do conhecimento geométrico: desenhar e a ação manufatureira (ALEKSANDROV, 1976). Para Davídov e Márkova (1987), a gênese do desenvolvimento dos conceitos se fixou na forma de atividade objetal, em que o órgão principal foi a mão por propiciar movimentos interativos com os demais órgãos dos sentidos.

Горбов, Микулина, Савельева (2008) alertam que a linha curva não será o objeto central nesse início de estudo. Apresenta-se com a finalidade de comparação, pois, na matemática, ela é considerada como a linha em geral, enquanto a reta é entendida como uma particularidade, cuja curvatura é zero.

Na tarefa seguinte, os dois tipos de linhas se apresentam como base para o surgimento de outro conceito ou ente geométrico: o ponto. As crianças desenham uma linha curva e, em seguida, com o apoio da régua, traçam uma reta de forma que passem próximo das extremidades da curva (Figura 2). Finalmente, o professor solicitará que elas marquem os locais em que as linhas se cruzam.

Figura 2 – O ponto como intersecção

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

O ponto surge articulado aos conceitos de linha e com significado de elemento de intersecção. É indício para a formação do pensamento de que a linha (reta ou curva) é constituída deles. As crianças concluirão que o ponto, local de intersecção das linhas ou retas, se constitui em fundamentos da geometria: "[...] conceito abstrato final de uma linha, de uma posição definida com um máximo de precisão, porém não é composto de parte" *(*ALEKSANDROV, 1976, p. 41).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

A tarefa da figura 3 propõe o desenho de uma linha reta; nela, sugere-se marcar dois pontos e destacar com lápis de outra cor, a parte entre eles, e indica-se que tal parte chama-se segmento. Suas extremidades são os pontos ou traços verticais (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 3 – Ideia do conceito de segmento

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

A organização das tarefas permite a formação de conceitos geométricos e a adoção de procedimentos para a análise de problemas disponíveis no cotidiano dos estudantes. Pressupõe o domínio do sistema de conceitos e o desenvolvimento de capacidades peculiares, como a demonstração (BUTKIN, 2001) que, no início da escolaridade, não se trata da aplicação formal do método axiomático de provar um teorema com base na sua hipótese e tese. Em vez disso, a criança expressa as articulações do sistema conceitual (VIGOTSKI, 2001). Assim, o segmento, não se apresenta isolado, mas pela existência da reta, na indicação de dois pontos e do intervalo que o define. No caso, a demonstração elucida as condições de existência do conceito, sem explicitar a distinção se necessária ou suficiente.

A próxima tarefa (Figura 4) exigirá a participação intelectual ativa das crianças para contemplar a unidade de um sistema conceitual constituído por: ponto, como determinante para definir o segmento (origem e extremidade); a linha reta e as noções sobre finito e infinito. O professor solicitará para que marquem dois pontos e, em seguida, una-os com um segmento. A orientação é para pegar uma régua e prolongar o segmento em ambos os sentidos. Isso induz a perguntas: Qual o tipo de linha? O quanto ela pode ser estendida? Ela teria fim ou não? Para Горбов, Микулина e Савельева (2008), o debate é decisivo para que as crianças percebam que é possível continuar a linha ilimitadamente, porém impossível sua representação na folha de papel e no quadro, pelas limitações de suas extensões. Também, estabelece algumas diferenças em termos conceituais do

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

tipo: a linha reta não tem extremos determinados, porque é sempre possível continuá-la passando por todos os seus pontos. O segmento, como sendo uma parte da linha reta, é limitado por dois de seus pontos.

Figura 4 – Distinção entre segmento e reta

Fonte: Rosa (2012, p. 89).

A ação com os objetos – no caso das tarefas com o uso da régua, lápis, folhas – requer forças intelectuais, cognoscitivas e físicas, peculiares ao gênero humano. Para Elkonin (1987), as circunstâncias para aprendizagem da criança e do adulto se apresentam como ampliação da esfera e elevação do nível de domínio das ações com objetos. Isso ocorrerá se a organização do ensino os coloque em atividade de estudo, com destaque para duas características do objeto do ensino: a apropriação de conhecimentos e sua direção. Há tarefas que parecem quebrar esse vínculo. Porém, apresentam-se como algo necessário, como um componente a ser incluído no sistema de conceito, tornando as elaborações mais complexas.

Ilustrar-se-á essas articulações (relação entre grandezas e conceitos geométricos) não explícitas, com tarefas voltadas à medida de comprimento. Para Горбов, Микулина e Савельева (2008), o comprimento é a primeira especificação da ideia de tamanho. Rosa (2012), com base em Freudenthal (1975) e Eves (2007), afirma que o comprimento é a mais matemática das grandezas e um dos conceitos fundamentais da geometria. É componente básico para estabelecer as unidades para as demais grandezas, centralidade da próxima tarefa (Figura 5). O professor disponibilizará um *kit* com recortes de tamanhos e cores diferentes.

Figura 5 – Material de referência (esquerda) e sistematização da comparação (direita)

Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

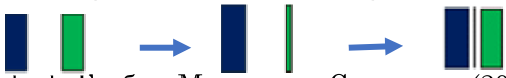
Propõe-se a comparação dos recortes pelo comprimento, a partir do lado maior (altura) deles, local em que as crianças percorrerão com o dedo, por indicação do professor. Mostrar-se-ão dois recortes, um em cada mão, longe um do outro, com a questão: Como vamos fazê-lo? As crianças sugerirão modos de comparação, até a escolha do correto e selecionarão recortes iguais aos seus para completar a tarefa. Elas aprenderão o modo correto de comparação dos comprimentos e a sua linguagem específica: o recorte verde é maior que o recorte vermelho pelo comprimento da altura, etc. (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008). Por eliminação, chega-se à conclusão de que o recorte preto é o maior em relação à altura. Além da relação de comparação com base no comprimento, a tarefa induz ao pensamento geométrico, pela ideia de altura que, por sua vez, remete à noção de segmento. A escolha da própria forma do material – recorte de superfícies retangulares – é algo intencional para que as crianças, aos poucos, elaborem pensamentos de que o retângulo tem duas dimensões a serem medidas (comprimento da altura e da largura), as quais, mais tarde, serão entendidas, como base e altura. A preocupação não é nomear os recortes como retângulos, conforme procedem as propostas de ensino tradicionais (DAVÝDOV, 1982), mas inserir os conceitos no contexto de medidas e suas relações.

Esse tipo de tarefa proporciona a aprendizagem sobre o comprimento, bem como de determinações externas e internas, produzidas historicamente em relação ao tamanho. O direcionamento, por parte do professor, é para que as crianças não fiquem somente no nível das aparências detectadas pelos órgãos dos sentidos. Por exemplo, observação dos recortes somente com o olhar, por ensaio e erro, para indicar o maior. Outro destaque é que a ideia de segmento tem a finalidade implícita de formação do pensamento sobre as dimensões das figuras planas. Isso se caracteriza ao solicitar, à criança, para deslocar o dedo pelo comprimento da altura. É uma noção física de segmento, pois têm extremidades identificadas passível de representação com lápis, apoiado em régua ou recorte. Portanto, o conceito está em permanente estado de devir, de possibilidades, isto é, em processo de constituição de zona de desenvolvimento proximal (VYGOTSKI, 1993). Nessa trama teórica se

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

apresenta a tarefa, em que o professor coloca no quadro duas tiras de papel do mesmo comprimento e propõe a comparação pelo comprimento e, posteriormente, de forma exposta as tornam desiguais (Figura 6).

Figura 6 – Medidas de figuras com dimensões iguais e diferentes.



Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Ao emparelhá-las, a resposta em elaboração é que as tiras da esquerda são iguais, pelo comprimento da largura e da altura. O professor pega uma delas e corta um pedaço (central) que diminui a largura e perguntará: E agora ela tem o mesmo comprimento que a outra tira que está no quadro? As respostas são averiguadas com a aproximação das duas tiras. O mesmo procedimento ocorre no processo de resolução da tarefa que imprime a diminuição da largura da tira por no mínimo duas vezes. As crianças emitem suas opiniões e as comprovam a fim de elaborar a síntese: com os sucessivos cortes, o comprimento da altura da tira permanece o mesmo. Isso não significa a conclusão da tarefa, mas a condição para a complexificação, própria do processo de apropriação conceitual e de formação do pensamento teórico. A atenção é para a representação do resultado. O professor pede para desenhar o comprimento único para as duas tiras e pergunta: Como fazê-lo? As crianças apresentam suas tentativas, que desencadeiam a discussão com argumentos, entre elas. A participação do professor se torna premente de modo que elas concluam que a melhor representação é desenhar um segmento entre as tiras (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

A tarefa permite a ação investigativa que cria a necessidade de representar o resultado da comparação. Ela justifica a aparente quebra de sequência das tarefas anteriores que tratavam de conceitos linha, ponto e segmento, em vez da ideia de comparação. Reveste-se de importância, pois o conceito de segmento, dela decorrente, assumirá uma nova significação: elemento de representação. E, como tal, o segmento agrega outra abstração essencial: a propriedade de figura com uma só dimensão. Isso ocorre sutilmente no momento de traçá-lo entre as duas tiras, assumidas como possuidoras, no mínimo, das dimensões altura e largura

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

(base) dada a centralidade, até então, nos seus comprimentos. Ao se traçar o segmento com o lápis, explicita-se apenas um comprimento da sua extensão, o que produz a ideia de sua unidimensionalidade, pois não faz sentido cogitar que nele exista uma largura e profundidade como nas tiras. Tal representação se constitui em meio para outra noção: a dimensão. Ela conduz à apropriação das bases essenciais de que: uma figura geométrica é um conceito mais geral, pois é possível abstrair a extensão espacial. Assim, a superfície tem duas dimensões, a linha somente uma dimensão e o ponto nenhuma (ALEKSANDROV, 1976).

A tarefa seguinte introduz a ideia de uma nova dimensão: a profundidade. Relata-se, aos estudantes, que alguém fez três buracos e os desenha em um esquema no quadro (Figura 7). Sugere-se que eles comparem as profundidades.

Figura 7 – Comparação de profundidades

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

O esquema é propício para identificar dois tipos de extensões das regiões curvas: a profundidade (comprimento vertical) e a largura (comprimento horizontal). As crianças são convidadas para, no quadro, representar esses comprimentos com segmentos de cores diferentes para profundidade e largura, conforme figura à direita (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008). Elas perceberão que, pelo desenho, ficam mais evidentes as diferenças entre as três profundidades do que entre as suas larguras. Os segmentos que representam a largura permitem apenas a comparação aproximada.

Observa-se que a proposição davydoviana não se volta à (re)descoberta, à aquisição de habilidades, às capacidades, à solução rápida e prazerosa dos problemas matemáticos, conforme Lorenzato (2006). Em vez disso, objetiva o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, que requerem a aquisição de ações em um movimento dialético do pensamento de transformações mútuas externo-interna. Ou seja, trata dos conceitos teóricos que propiciam o movimento de uma série de funções – entre elas as habilidades e capacidades – ainda não

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

desenvolvidas no estudante (VYGOTSKI, 1993). Importa salientar que a boa organização do ensino não é condição suficiente, nem necessária, para atingir o desenvolvimento mental das crianças. Deve-se considerar um elemento fundamental no processo de ensino: a comunicação entre o professor e a criança e desta com seus colegas. Puentes (2013, p.184) afirma: “O desenvolvimento na criança de determinadas funções mentais em sala de aula depende da comunicação com os adultos e com os colegas, da atividade conjunta e da natureza, do conteúdo, do tipo de estrutura e da especificidade dessa atividade”.

A próxima tarefa retoma o estudo de linhas sem exclusividade aos entes geométricos em si; mas, a partir da conexão entre eles, introduzir-se-ão novas significações às linhas fechadas, sejam elas segmentadas ou curvas (ROSA, 2012). O professor marca no quadro quatro pontos de diferentes cores, de modo que três deles não fiquem em linha reta. De igual modo, as crianças marcam os pontos nos seus cadernos, de acordo com o modelo no quadro (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА 2008), situação similar à figura 8 (esquerda).

Figura 8 – Linhas quebradas

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Em seguida, unem-se os pontos por meio dos segmentos (figura 8, esquerda), na ordem dada pelo professor, por exemplo: o ponto verde com o vermelho, este com o azul e, finalmente, ao preto. Assim, surge a linha composta de segmentos, porém não é reta (Figura 8, direita). É traçada com uma linha reta, entre dois pontos, porém como não estão alinhadas, elas se quebram nesses lugares. O professor acrescenta: esse tipo chama-se *linha segmentada.*

A próxima tarefa tem características idênticas à anterior, mas levará a um novo componente conceitual: a construção de uma linha fechada, segmentada ou curva. De início, há quatro pontos de diferentes cores no quadro e, depois, outros dois. As crianças copiarão em seus cadernos e unirão os pontos em ordem indicada, incluindo aqueles considerados os extremos. Por exemplo, o ponto verde com o vermelho, este ao azul, que é unido ao preto

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

e, finalmente, as extremidades verdes e pretas. Obtém-se uma linha quebrada que não tem começo e fim especificados (Figura 9, esquerda). O professor dirá que esse tipo linha se denomina segmentada fechada (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 9 – Linhas fechadas, respectivamente, segmentada e curva.

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008)

A tarefa correspondente à figura 9 (esquerda) prenuncia o conceito de figuras planas. Segundo Rosa (2012), o conceito de linha segmentada fechada, no decorrer do processo escolar, generaliza-se, independentemente da quantidade de segmentos que a compõe e receberão denominações diferentes: três segmentos, triângulo; quatro, quadrilátero; cinco, pentágono, etc.

Para finalizar as tarefas referentes ao conceito de linhas fechadas, os estudantes desenham no caderno dois pontos (figura 9, direita) com o objetivo de determinar uma linha fechada não segmentada. A orientação é para uni os pontos com duas linhas. O debate necessário com base na situação apresentada é de tal modo, que leva à conclusão de que se trata de uma linha curva fechada.

Essas tarefas têm como objetivo primordial a elevação do nível de compreensão dos estudantes com base em questões externas e internas que envolvem o estudo das linhas fechadas e abertas, bem como outras determinações da introdução dos conceitos da geometria. Elas se apresentam no âmbito de um problema em que exige aproximação e distanciamento daquilo que os estudantes conhecem. Atendem a premissa de que compreender como se resolve um problema nem sempre significa saber resolvê-lo. Por isso, só é possível falar sobre os conhecimentos dos estudantes à medida que eles sejam capazes de realizar ações fundamentadas em pensamento conceitual (TALÍZINA, 1987).

Na tarefa a seguir, referente ao estudo de linhas fechadas, acrescentam-se novos componentes conceituais: limite das figuras, pontos e regiões, que antecipam o estudo da grandeza área, cuja discussão acontecerá mais adiante. As

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

crianças são motivadas a fazerem várias figuras com o auxílio de um arame macio e, a partir delas, desenharem as linhas fechadas que as limitam, com a condição de que não passem pelo ponto dado. A análise, com base nas variantes de posição da linha e do ponto, possibilita a observação de que em algumas figuras, o ponto ficou no interior e, em outras, na região externa (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008). Exemplo dessa representação é a figura 10.

Figura 10 – Curva fechada como delimitação da região interior e exterior

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Na tarefa seguinte, as crianças receberão um *kit* com recortes de papelão (Figura 11). Elas contornarão cada figura e indicarão o tipo de linha obtida.

Figura 11– *Kit* de recortes de papel

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Essa tarefa enfatiza o contorno das figuras de forma articulada à preocupação para que os estudantes voltem a diferenciar os tipos de linhas que, por sua vez, atrelam-se à dupla significação: limitar e definir uma determinada forma geométrica plana. Nesse contexto de interconexão conceitual, ocorre a probabilidade de indicação, por parte das crianças, depois de contornarem os recortes e obterem, por exemplo, da figura A um quadrado. No entanto, o professor nega tal afirmação, mas sugere que digam o nome da linha e não da figura. Elas concluem que se trata de uma linha quebrada fechada composta por quatro segmentos. A intervenção do professor é proposital para evitar que as crianças se prendam às percepções empíricas e as adotem como referência para a elaboração do conceito das figuras planas. A tarefa traz uma das ideias essenciais do conceito de quadrado: como uma região interna delimitada por uma linha quebrada constituída de quatro segmentos.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

Da mesma forma, elas identificarão a figura B como uma linha quebrada fechada composta por três segmentos. Tal conclusão decorre do questionamento do professor: *Que tipo de linha forma o recorte da figura B?* As crianças passam a apreender as primeiras ideias teóricas de triângulo como determinado por três segmentos que constituem uma linha curva fechada.

A análise da figura C gera a apreensão, por parte dos estudantes, de que o seu contorno representa uma linha curva fechada. E o professor acrescenta: denominada de circunferência (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Por fim, a referência é o contorno da figura D para a qual o professor dirige a atenção da criança a fim de identificarem as duas circunferências. Ele informa que podem chamá-las de anel (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Convém dizer que essas referências aos conceitos de quadrado, triângulo, circunferência, entre outros, dizem respeito às suas primeiras significações teóricas. As demais apresentar-se-ão no decorrer dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isso porque uma concepção teórica dessas figuras geométricas inclui outros conceitos (número de pontos e segmentos, ângulo, condição ou não de paralelismo e perpendicularismo, entre outros). Por exemplo, Горбов, Микулина e Савельева (2008) dizem que a diferenciação entre círculo e circunferência ocorrerá com tarefas próprias que ainda não condizem com as possibilidades pertinentes ao primeiro ano. Davýdov (1982, p. 303) entende que tais conceitos se constituem em um nível elevado de articulações que estão além das capacidades já adquiridas pelas crianças dessa fase escolar. Por isso, requer uma organização sequencial de tarefas que, aos poucos, desenvolvam as condições necessárias para as devidas apropriações. Para o autor, a definição expressa *"[...] a causa do surgimento da coisa dada e o método de sua estruturação"*.

As últimas tarefas analisadas centram nos aspectos relacionados ao limite das figuras, porém trazem elementos que constituirão um complexo sistema de conceitos. Além de aglutinar seus peculiares conceitos aos desenvolvidos anteriormente, formam um todo, que são base para novas apropriações, entre elas a noção de área, foco das próximas tarefas. Essas primeiras noções se

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

apresentam no âmbito das relações entre grandezas (DAVÝDOV, 1982). O conceito de área, de início, é concebido como uma grandeza passível de medição, porém ainda sem pretensão imediata de atingir um modelo ou fórmula.

Em seguida, a tarefa a ser analisada retoma as ideias sobre tamanho, mas acrescenta um parâmetro de comparação, a área de regiões delimitadas por linhas fechadas, sejam elas quebradas ou curvas (ROSA, 2012). A questão conceitual central é a identificação dos comprimentos, por exemplo, da largura e da altura, de início, de figuras irregulares (Figura 12). A ação investigativa tem por base duas figuras irregulares de mesma forma e na posição que dificulta a identificação da altura, da largura e do comprimento e mesmo da superfície.

Figura 12 – Identificação do tamanho de figuras com superfícies irregulares

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

O professor sugere a comparação dos recortes por diferentes parâmetros. Detecta-se que elas são iguais pela forma e diferem pela cor. A questão é: o tamanho é igual ou diferente. As crianças formulam hipóteses do tipo: a figura amarela é maior que a vermelha. O professor concordará, porém instiga para que desenvolvam processos de demonstração e solicita-lhes que especifiquem o tipo de tamanho a que se referem. Ele gira os recortes – por exemplo, o vermelho (Figura 12, A) – de modo que não permita a identificação, de imediato, da posição de referência para a indicação do comprimento da altura e da largura, com base em segmentos (Figura 12, B) (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Em seguida, o professor sobrepõe os dois recortes (Figura 12, C) de modo que se torne perceptível que, à primeira vista, o comprimento da altura da figura vermelha é maior que o da amarela (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

As discussões ocorrem de maneira que leva as crianças a apresentarem uma contestação referente à posição dos recortes. Logo, o professor sugere que elas mesmas coloquem as figuras, a seus modos, para identificarem se alguma

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

delas é maior. Uma conclusão esperada de demonstração é colocar uma figura sobre a outra em mesma posição. Nesse movimento (Figura 12, D), percebe-se que a vermelha fica completamente dentro da amarela, que é maior. O professor concorda com essa análise, porque os recortes são comparados pela área e não por algum comprimento isolado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Uma nova tarefa é proposta com o objetivo de comparar dois recortes iguais de superfície quadrangular. De forma visível aos estudantes, o professor corta uma parte de um deles (Figura 13). As discussões se dirigem à identificação de que nem todas as dimensões se alteraram, por exemplo, o comprimento da altura e da largura. A conclusão principal é que, mesmo assim, a área ficou menor.

Figura 13 – Área alterada com conservação do comprimento da altura e da largura

Fonte: Adaptada de Rosa (2012, p. 104).

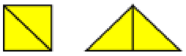
A questão central na tarefa é: a alteração da grandeza área não interfere em duas outras, um comprimento da largura e da altura. A coexistência – variação e conservação das grandezas – se explica pela possibilidade de transformação do real objeto (recortes). Isso não aconteceria se o sistema de tarefas não focasse as propriedades dos objetos e centrasse na sua imediatez.

A outra tarefa apresenta características idênticas à anterior. Há o recorte de superfície quadrada que, na ação investigativa, os estudantes transformarão em superfície triangular (Figura 14). Горбов, Микулина, Савельева (2008) alertam que, durante o processo de análise, elas apresentam novos elementos de apropriação, o que é passível de dificuldades, porém nada que seja insuperável, porque as crianças já adquiriram a noção de área. A peça de superfície quadrada está com as crianças e com o professor. Marca-se no quadro a letra T como sendo a sua área. Recorta-se a peça na diagonal, obtendo-se duas superfícies triangulares que, posteriormente, são reorganizadas para se transformarem em uma peça de superfície triangular. O professor questiona: Como marcar a área da figura? A conclusão é que a junção dos dois recortes permanece com a área T,

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

pois, no processo de análise da figura anterior em que foi cortada, recomposta em outra forma, mas nada se adicionou ou subtraiu das duas partes.

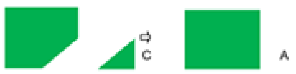
Figura 14 – Transformação de superfície quadrada em triangular



Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Esse tipo de tarefa prenuncia um novo objetivo, que será atingido por outras, a seguir, qual seja: possibilitar que os estudantes desenvolvam a ideia de que as diversas variações da figura não determinaram alterações na medida da área das novas superfícies formadas, o que Горбов, Микулина, Савельева (2008) denominam de "permanência de valores". O professor mostrará um recorte de superfície quadrada (Figura 15). Em seguida, em comum acordo com as crianças, escolhe-se a letra para indicar a medida da área, A. Corta-se um canto, cuja área deve ser marcada com outra letra (C). O professor coloca o canto cortado no seu lugar, voltando ao valor de A. A evidência é para o seguinte movimento: a retirada de parte de uma superfície diminui sua área e, ao ser recolocada, retoma a medida original (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 15 – Transformação de uma superfície e sua recomposição



Fonte: adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Posteriormente, o professor faz o registro do movimento dos recortes da seguinte forma: primeiro A → C, posteriormente, A→C→A. É um modo de representação que adota as flechas indicativas dos estágios de transformação das superfícies. A ação toma forma de representação que, segundo Davídov (1988), é uma base da formação do pensamento teórico, o que requer a reflexão, a análise e a experiência mental, peculiaridades humanas para examinar os aspectos da "atividade objetal-prática", e suas formas universais de representação.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

As próximas tarefas continuam com a ideia de tamanho, medida, que ao ser detalhada, revelam um novo parâmetro de comparação dos objetos, o volume. Isso significa que tal conceito carrega tanto a significação geométrica quanto a aritmética e a algébrica. É no estudo dessa grandeza que a representação dos resultados começa a ser evidenciada, organizada, sistematizada. As crianças começam a fixar as relações das grandezas com a ajuda de tiras de papel, o que lhes permite dar o primeiro passo para atingir o conceito abstrato (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008). No primeiro momento, o foco é a diferença entre as figuras planas e os corpos. Cada criança tem três tiras iguais quanto à cor, duas das quais têm o mesmo comprimento e a outra é mais curta. O professor apresenta duas figuras de cada vez (Figura 16, esquerda), para que comparem e expressem o resultado da relação de igualdade ou desigualdade. Inicialmente, a tarefa é desenvolvida em silêncio. Ao apresentarem as duas figuras de superfícies quadradas azuis, as crianças mostram as duas tiras idênticas, pois elas têm a mesma cor, forma, tamanho e espessura (Figura 16, direita). O mesmo ocorre com o último par de peças – superfícies triangulares azuis. O contrário ocorrerá com os outros três pares, em que as crianças mostrarão uma tira maior e a outra menor. Isso porque as figuras apresentam algumas características iguais, mas se diferem, porque uma tem duas dimensões e a outra três. Ou, uma é grossa e a outra é fina (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 16 – Iintrodução da ideia de volume e representação objetal

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Durante as manipulações, é possível que algumas crianças não percebam o movimento na comparação das figuras com espessuras diferentes e mostrem tiras de papéis iguais. O professor conduz a discussão de modo que elas produzam a síntese: as figuras não planas são chamadas de corpos, no caso, prismas. É possível discutir outras formas: cone, cubo, esfera, etc., que na vida real se apresentam como corpos. Porém, não é necessário que as crianças lembrem os

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

respectivos nomes, pois o objetivo nesse momento é formar a ideia de corpo, ligada ao conceito de volume (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Se a tarefa anterior provocou o surgimento da ideia de corpo, a seguinte (Figura 17) introduzirá o conceito de volume. O professor apresenta duas caixas em forma de paralelepípedo, de modo que uma delas caiba dentro da outra. A comparação dar-se-á pelo tamanho que, dependendo da posição ou referência (faces, arestas), a mesma caixa em relação à outra, pode ser: mais alta ou mais baixa, mais comprida ou mais curta e mais larga ou mais estreita. Isso requer aproximação e emparelhamento, em conformidade com uma determinada grandeza pré-estabelecida. A tarefa cria perturbações, pois a aparência é de que elas têm tamanhos diferentes. Porém, nas comparações realizadas, não apresentam resultado único, tudo irá depender de como as caixas serão colocadas uma contra a outra. A caixa menor pode ser maior que a maior se a comparação for pelo seu comprimento com a largura da outra. Isso cria a necessidade pela busca de um modo para comparar as caixas em sua totalidade e não apenas pelas suas dimensões separadas. Trata-se de colocar uma caixa dentro da outra, isto é, a pequena dentro da maior, uma vez que ela cabe por inteiro e sobra espaço. Nesse momento, o professor indica que esse tamanho geral das caixas é denominado "volume" (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 17 – Comparação com a ideia de volume

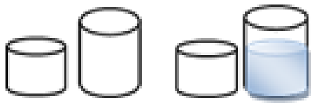
Fonte: Adaptada de Rosa (2012, p. 106).

O professor também apresenta dois recipientes cilíndricos que se diferem somente pela altura (Figura 18), a fim de comparar o volume e a indicação do resultado com a ajuda das tiras. Горбов, Микулина, Савельева (2008) dizem que as crianças percebem que o volume do recipiente mais alto é maior. Verifica-se a impossibilidade do recipiente menor (mais baixo) ser colocado dentro do recipiente maior (mais alto), pois têm bases iguais. No decorrer da análise,

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

concluem que é possível encher com água, grãos ou com areia o recipiente menor e, depois, transferir o conteúdo para o recipiente mais alto, com sobra de espaço.

Figura 18 – Comparação de volumes com impossibilidade de sobreposição



Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

A tarefa traz uma nova nomenclatura, pela possibilidade de um recipiente absorver maior ou menor quantidade de líquido. O professor dirá: a capacidade do recipiente mais alto é maior que a do mais baixo. Por isso, o volume de líquido do recipiente mais baixo, não encherá o mais alto (ROSA, 2012). A tarefa seguinte (Figura 19) se assemelha esta em termos procedimentais de resolução. A diferença está na forma dos recipientes, de modo que isso torna impossível a identificação, com um simples olhar, do maior volume. Tal impedimento não é superado ao se reportar ao desenvolvimento da tarefa precedente na qual se utilizou como medida o líquido ou outro material que se transfere de um ao outro recipiente. Ela apresenta outra sutileza, pois a situação se inverte em relação à tarefa anterior, uma vez que o ato de transferência do líquido se dá do maior recipiente – completamente cheio – para o menor, o que implica em sobras de líquido (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 19 – Capacidade de volume em recipientes de formas diferentes

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

As condições dadas pela tarefa propiciam a indicação de que a capacidade do recipiente prismático é maior que a do cilíndrico. Nota-se que uma tarefa, em relação à outra, tem sempre uma peculariedade: dá condições ao desenvolvimento do pensamento conceitual. A tarefa da figura 19 se vincula à anterior pelos objetos: capacidade e volume, e pelo procedimento

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

(identificação e demonstração do maior ou menor), mas impõe o desafio de mudar a forma do recipiente e o movimento contrário na transferência do líquido: do maior para o menor. Essas interfaces caracterizam a introdução de outra tarefa (Figura 20) que tem a base do conteúdo em estudo, mas traz algo diferente em relação à análise. Resgata o estudo de segmentos, que assumem uma nova função e significação: elemento de representação no ato de comparação dos recipientes (com maior e menor volume ou capacidade). Sobre uma mesa, estão dois recipientes iguais e, no quadro, o desenho de dois segmentos de comprimentos diferentes (Figura 20). O professor expõe: os segmentos representam o volume do líquido a ser colocado dentro dos recipientes. Aponta para o menor segmento e diz que indica o volume de líquido do primeiro recipiente e despeja no recipiente maior, correspondente ao outro segmento (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 20 – Medida de volume com s indicação da representação por segmentos

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

A tarefa estabelece que dois estudantes se dirijam até a mesa e coloquem o líquido nos recipientes conforme estabelecem os segmentos. Enquanto isso, os demais observam se a manipulação ocorre corretamente. O importante não é a quantidade de líquido a ser colocada nos recipientes, mas a condição dada pelo comprimento dos dois segmentos: o primeiro recipiente, ter menos líquido que o segundo. A tarefa coloca o pensamento dos estudantes em movimento, não mais gerado diretamente, mas pela situação em si de lidar com líquido e os recipientes, a fim de elaborarem conclusões sobre o maior ou o menor volume. É apresentado um elemento mediador geométrico – os segmentos –, teor abstrato da orientação na execução da tarefa, cuja essência é o comprimento dos segmentos. Esse teor configura a tarefa da figura 21, cujo objetivo é igualar valores. Há dois recipientes iguais, mas com diferente volume de líquido. Os

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

estudantes notam tal diferença e a representarão por meio de segmentos, no quadro e no caderno (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008). Em seguida, o professor alerta para a necessidade de igualar o recipiente de menor volume de líquido ao maior. As crianças dirão que basta colocar líquido, e assim procederão. A questão primordial é a representação dessa operação no segmento. Existe um vínculo entre o ato de lidar com o líquido e o uso dos segmentos. A referência é o maior – no recipiente e no segmento – que não requer ação direta, respectivamente, no volume e no comprimento. A alteração só ocorre em relação ao menor, o que requer como referência a igualdade. Isso significa que o aumento do volume acarreta na necessidade de acréscimo no segmento. Porém, não é algo aleatório e indicado verbalmente pelo professor ou estudante, mas indicado pelo segmento.

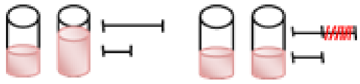
Figura 21 – Medida de volume pela indicação da representação por segmentos

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

A percepção dessa determinação pelos estudantes só é possível devido ao modo de organização do ensino, que os levam às apropriações necessárias. Aquilo que em uma determinada tarefa era a ação para apropriação de uma determinada ideia conceitual, em outra se constitui em procedimento para novas elaborações (LEONTIEV, 1978). Esse processo transformativo faz com que o teor geométrico de segmento e volume cada vez mais incorpore ou conclame por significado aritmético. Há um prenúncio para buscar formas de dizer o quanto aumenta ou diminui e as operações necessárias, ou seja, número e operações de adição e subtração. Esta é prenunciada na tarefa (Figura 22), que se diferencia da anterior por prever que se iguale o valor maior ao menor. Isso implicará na diminuição do líquido ou material do recipiente com maior volume; bem como em relação ao segmento (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

Figura 22 – Movimento de igualar o volume pela diminuição de uma situação



Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Na análise da tarefa, recomenda-se a diminuição do valor maior por meio da subtração ou eliminação da diferença. No segmento maior, a demonstração será feita com riscos verticais em uma parte até atingir o comprimento do menor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008). Importa salientar que a demostração das relações existentes entre os volumes e a capacidade, por meio de tiras e segmentos, marca o início da modelação das relações entre grandezas que, gradativamente, serão reproduzidas na forma gráfica e literal (ROSA, 2012). Tais relações se convertem em "*objeto das ações*" das crianças e suas leis em objeto de apropriação (GALPERIN, ZAPORÓZETS, ELKONIN, 1987, p. 311).

As articulações promovidas pelas tarefas que confluem as significações geométricas e aritméticas levam, mais tarde, as crianças ao acréscimo de outro elemento geométrico na representação de resultados: a sobreposição de arcos (linha curva) ao segmento de reta. Esse elemento traduz um movimento em duplo sentido, gerador de uma concepção das operações de adição e subtração que traz como fundamento a relação parte/todo. A título de ilustração do papel do arco como elemento de representação, apresentar-se-á uma tarefa particular (Figura 23), que tem por base a grandeza área. O professor mostra um recorte (superfície azul da figura 23) e desenha no quadro um segmento que, em seguida, é aumentando. Algumas crianças, mais atentas ao movimento realizado, dirão: a área aumentará. O professor acrescenta o recorte de menor largura de cor amarela e solicita que elas mostrem, nos recortes retangulares e no desenho (sequência de segmentos), qual foi a área inicial. Elas indicarão com duas mãos a parte de cada recorte retangular e o respectivo segmento. O gesto no desenho é substituído pelo arco. Também, mostram – primeiro com o gesto e depois com o arco – a área final do retângulo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

Figura 23 – Representação gráfica com a inclusão de arco

Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

Essa tarefa apresenta uma característica diferente, explicitada no seu desenvolvimento e na sua análise, pois os estudantes, para além de focarem no movimento de acréscimo da área da figura plana (superfície retangular azul acrescida da amarela), entram em contato com um modo de representação (uso de segmentos e arcos) do tamanho da superfície – inicial-acréscimo-final.

As próximas tarefas centram na introdução da reta numérica vinculada ao conceito de grandeza (comprimento, área e volume). Na separação entre as significações aritméticas e geométricas, uma contribui para apropriação da outra. As representações como segmento e arcos são elementos de expressão do resultado de uma medição. A reta constitui-se, conceitualmente, uma "construção geométrica específica" (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas dão base para a discussão sobre o melhor modo de apresentação da propriedade numérica da grandeza. Isso só se efetiva porque os estudantes atingiram o nível conceitual de número traduzido no modelo universal na relação de multiplicidade: ***a* = *nc*** (**a** é a grandeza que se quer medir, **c** a unidade pré-determinada e ***n*** o número de vezes que **c** cabe em **a**) (DAVÝDOV, 1982).

Nessas circunstâncias, condição ao desenvolvimento do pensamento teórico matemático, a reta se adjetiva como numérica, o lugar geométrico dos números, inicialmente, naturais. Sua apresentação ocorre sem o zero[7]; em seu lugar, uma bandeira, "[...] o que induz à ideia de uma referência e, por extensão, de possibilidade para existência de números que também possam situá-los antes dela e não só depois como, até então, tem ocorrido" (SOUSA, 2013, p. 206).

A reta assume significação numérica por ser à base da representação do resultado de uma medição que estabelece três condições: a opção por ponto inicial, a determinação da direção e a escolha da unidade. Ela é o elemento

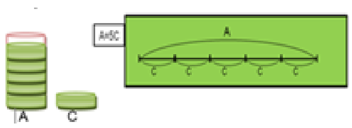
[7] O zero será acrescido à reta no contexto do estudo das operações, mais especificamente de subtração sucessiva. Para tal, sugere-se a leitura de Rosa (2012) e Sousa (2013).

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

geométrico mediador que expressa duas significações do número, referentes aos aspectos: ordinal, como ponto; e qualitativo, um segmento da reta. A base de apresentação às crianças é um esquema (segmento) produzido em situação de medição em que se estabeleceu uma unidade de medida, o passo. A referência é os segmentos – representativos dos passos –, mas a sua construção explicita o seu ponto inicial (origem), a direção e o sentido (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Para início da ação investigativa, na mesa do professor há um recipiente com água e mais um recipiente vazio que será usado como unidade de medida. No quadro, está o registro: A = 5C. O professor informa que A é o volume da água a ser colocado no recipiente, mas Vitor já colocou certa quantidade e só é preciso completar. As crianças se defrontam com a necessidade da identificação da quantidade de medidas da água colocadas no recipiente. A situação ainda é problematizada pela informação do professor: também não sei o que Vitor fez. E alerta que é diferente de quando se mede a área ou o comprimento. A decisão é medir outra vez a água. O professor questiona: *Como tornar "visível" a medida dentro do recipiente?* A sugestão é marcar com caneta ou elástico e registra-se (esquema) no quadro (Figura 24). Para evidenciar que o lugar de um número na reta depende do tamanho do segmento unidade, o professor apresenta no quadro outro passo (segmento) diferente do primeiro. As crianças perceberão a diferença e fazem a correção. Identificar-se que no recipiente há apenas três medidas.

Figura 24 – Introdução da reta numérica



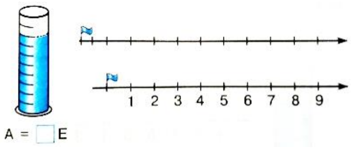
Fonte: Adaptada de Горбов, Микулина, Савельева (2008).

A próxima tarefa com a nomenclatura "reta numérica" simula que Olga e Paulo marcam a quantidade de água do recipiente (Figura 25). As crianças

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

contarão e concluirão que A = 8E. Resta indicar quem fez a melhor representação na reta: Olga, autora da reta superior (Figura 25), ou a reta inferior de Paulo.

Figura 25 – Introdução da reta numérica com os numerais



Fonte: Давыдова *et al*., 2012, p. 51).

O professor acrescenta que a menina tomou a iniciativa e foi a primeira a desenhar. O menino fez acréscimos de unidades bem definidas e, a cada uma delas, o respectivo numeral. Para evidenciar a vantagem da representação de Paulo, solicita-se que uma criança marque o valor de A no desenho (reta) superior e um colega faça o mesmo no inferior. A interação professor e crianças, mediada pelos desenhos no quadro, torna-se argumento de que a representação de Paulo seria a melhor referência, pois os numerais mostram o valor sem recorrer à contagem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

As vinte e cinco tarefas são repesentativas do movimentoo da introdução da geometria no primeiro ano do Ensino Fundamental em articulação com a aritmética. Isso se caracteriza como ímpar em termos de proposição de ensino. Por isso, concorda-se com Rosa (2012) e Schmittau, Morris (2004) que a proposição davydovina supera as concepções de ensino-aprendizagem presentes nas tendências que permearam e estão presentes no sistemas escolares.

4 Outras considerações

Essa síntese esboça algo referente à questão que conduziu o presente estudo. Vale refirmar que o foco não foram os conceitos geométricos em seu mais alto nível de sistematização, mas como eles são apresentados, às crianças, no primeiro ano escolar. Entretanto, o modo davydoviano de organização do ensino – caracterizado pela interface entre tarefas de estudo, suas respectivas ações de estudo e as consequentes tarefas particulares – não

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

perde de vista o caráter científico. A preocupação é que o estudante entre em movimento de pensamento conceitual que supere a fase de desenvolvimento anterior, com predominância da atividade principal do jogo. A questão precípua é colocá-lo em outro patamar de formação de pensamento conceitual pertinente à sua segunda atividade principal, o estudo, que o faz se sentir em outro lugar, no âmbito das relações sociais, em termos de responsabilidade e compreensão da realidade (LEONTIEV, 1978). Davýdov insistente que esse entendimento a ser desenvolvido na atividade de estudo não pode ocorrer em nível empírico, mas em estágio daquilo do que a ciência apresenta de mais atual. Para tanto, o referencial são os conceitos científicos propulsores para a formação do pensamento teórico.

Nesse âmbito é que se apresentam as tarefas particulares. Elas atentam para minúcias conceituais decorrentes da análise interativa das crianças como o professor, que promovem a identificação da relação geral inicial que se manifesta em outras situações particulares. As tarefas iniciais, mesmo com o foco para os aspectos externos das figuras e objetos, visam a que as crianças entrem em ação investigativa para que, valendo-se da percepção das formas geométricas, traga à tona uma essencial abstração matemática: a relação de igualdade e desigualdade. Isso acontece com referência ao tamanho, à posição, à cor, etc. Além disso, elas indiciam a relação entre grandezas, essencial dos conceitos teóricos de Matemática. Para tanto, orientam para elaboração tanto de respostas quanto de perguntas que colocam os estudantes em permanente ação investigativa.

Outras tarefas introduzem as crianças em contexto de apropriação de uma unidade conceitual constituída por ponto, reta e segmento. Esses elementos da geometria – trazidos à tona desde Euclides – são referências de assimilação, não como algo estático e independente – como o método axiomático linear euclidiano – mas interligados e em movimento. Cada tarefa apresenta novas significações em um processo que une conceitos elaborados e com a necessidade de outros.

A unidade (ponto, reta e segmento) concatena as tarefas, geradoras de um movimento do pensamento conceitual referente à geometria em que o

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

ponto é uma abstração (ALEKSANDROV, 1976) constitutiva da reta, que assume novas significações ao considerá-lo em par. Uma delas, por delimitar (extremidades) um segmento de reta; a outra como condição para definir a reta, com prolongamento para os dois sentidos e, também, para determinar a semirreta. Nesse contexto conceitual, abarcam-se as primeiras noções de infinito[8]. Quando a referência é o segmento, a ideia de infinito toma como base o aumento e a diminuição de distância dos pontos que os define. À criança, apresenta-se a noção de que o segmento assume um tamanho de muito pequeno a muito grande. Os pontos extremos estão separados por distâncias que não são possíveis imaginá-las nem proceder sua representação gráfica com o lápis, pois se situam em um espaço imensamente pequeno ou exageradamente distante. O infinito da reta se caracteriza pela sua possibilidade de prolongamento, a partir dos dois pontos que a define e sem necessidade de identificação de sua origem e extremidade. A semirreta possui algo comum ao segmento, pois tem uma origem, e, também, à reta, que é a sua infinitude, porém em um único sentido. Mesmo preliminares esses conceitos se apresentam com significações científicas em um processo de análise que coloca a criança em situação de novas ideias que estão por vir.

Isso é por consequência do movimento propiciado pela organização pedagógica que expande para outras noções conceituais. Por exemplo, aos tipos diferentes de linhas (reta, curva, aberta, fechada, segmentada), base para as primeiras formações do pensamento referentes às figuras planas, que também traduzem uma essência conceitual da unidade – ponto, linha reta e segmento – com aglutinação de outros conceitos, por exemplo, infinito.

Essa trama conceitual gera a determinação de três ou mais pontos não colineares que são unidos por segmentos. Cada ponto incide em uma intersecção de dois segmentos com duplo significado: linha segmentada fechada e lado da figura. Daí, ocorre a possibilidade de, no primeiro ano

[8] Conceito a ser visto nos cursos superiores na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

escolar, a criança elaborar o pensamento geométrico a respeito das figuras planas em base teórica. Por exemplo, um quadrado é uma superfície delimitada por uma linha segmentada fechada, constituída de quatro segmentos com mesmo comprimento. Isso ocorre com os demais polígonos, nomeados pela quantidade de pontos que os originam.

Nesse sistema conceitual – mesmo sendo noções iniciais – está a ideia central de grandeza que se potencializa pela possibilidade de ser medida e como premissas do conceito de número. Há uma interconexão entre as significações geométricas, aritméticas e algébricas, não exploradas no presente estudo. Importa esclarecer que o conjunto das tarefas referenciadas dizem respeito somente à introdução da geometria no modo davydoviano de organização. Mesmo assim, é passível o prenúncio de que, com a execução de todas elas, os estudantes desenvolvam ideias substanciais com teor teórico de geometria.

Referências

ALEKSANDROV, A. D. Visión General de la Matemática. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial, p. 17-91, 1976.

BUTKIN, G. A. La formación de las habilidades que se encuentran en la base de la demostración geométrica. In: TALIZINA, N. F. *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. México: Editorial Universitária Pososina, p. 151-194, 2001.

CARDOSO, F. C. O ensino da Geometria e os registos de Representação sob um enfoque epistemológico. *Anais* IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul. Caxias do Sul, RS: UCS, 2012.

DAVÍDOV, V. V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*: Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. In: SHUARE, Marta (Org.). *La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS:* Antología (p. 316-337). Moscú: Editorial Progreso, p 316-337, 1987.

DAVÝDOV, V. V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

ELKONIN, D. B. Sobre El problema de La periodización del desarrollo psíquico en la infancia. In: SHUARE, M. (Org.). *La Psicologia Evolutiva y Pedagógica em la URSS*: Antología. MFiorentinioscú: Editorial Progresso, p. 104-124, 1987.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 2007.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

GALPERIN, P. Y.; ZAPORÓZETS, A. V.; ELKONIN, D. B. Los problemas de la formación de conocimientos Y capacidade em los escolares y los nuevos métodos de enseñanza em la escuela. In: SHUARE, M. (Org*.). La Psicologia Evolutiva y Pedagógica em la URSS:* Antología. Moscú: Progresso, p. 300-315, 1987.

LEONTIEV, A. N. *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Livros Horizontes, 1978.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davýdov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). *Ensino Desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, p. 315-350, 2013.

LONGAREZI, A, M**.** Apresentação do dossiê Formação de professores e sistemas didáticos na perspectiva histórico-cultural da atividade: panorama histórico-conceitual. *Obutchénie*, v.2, n.3, p.571-590, set./dez., 2018. DOI: https://doi.org/10.14393/OBv2n3.a2018-47433.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista,* n. 4, primeiro semestre de 95, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. Campinas, SP: Editora Autores Associados (Coleção Formação de Professores), 2006.

MENESES, R. S. *Uma história da Geometria Escolar no Brasil:* de disciplina a conteúdo de ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

PAVANELLO, R M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, Ano 1, n.1, p. 01-17, 1993.

PUENTES, R. V. Vida, pensamento e obra de A. V. ZAPOROZHETS: Um estudo introdutório. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). *Ensino Desenvolvimental:* vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, p. 163-201, 2013.

DOI: http://doi.org/10.14393/OBv5n2.a2021-61412

ROSA, J. E. *Proposições de Davýdov para o Ensino de Matemática no primeiro ano Escolar*: Inter-Relações dos Sistemas de Significações Numéricas. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. The development of algebra in Davydov's elementary curriculum, the mathematics V. V Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), p. 60-87, 2004.

SOUSA, M. B. (2013). *O ensino do conceito de número*: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

TALÍZINA, N. F. *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. Moscú: Editorial Progresso, 1987.

TALÍZINA, N. F. *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. México: Editorial Universitária Pososina, 2001.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, v12, n.3, p. 400-431, 2010.

VYGOTSKI, L. S. *Obras Escogidas II*: Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

ГОРБОВ С. Ф., МИКУЛИНА Г. Г., САВЕЛЬЕВА О. В. *математике:* Учебник для - класса начальной. Москва: ВИТА-ПРЕССб, 2008.

ДАВЫДОВА, В. В., ГОРБОВ, С. Ф.,МИКУЛИНА, Г. Г., САВЕЛЬЕВА, О. В. *Математика:* Учебникдля 1 классначальнойшколы. Москва: ВИТА-ПРЕСС, 2012.

Recebido em fevereiro de 2021.
Aprovado em abril de 2021.