

Partes, medidas e frações equivalentes: o movimento do pensamento teórico de professores que ensinam matemática

Parts, measures and equivalent fractions: the movement of theoretical thought of teachers who teach mathematics

*Iraji de Oliveira Romeiro*¹
*Vanessa Dias Moretti*²

RESUMO

A pesquisa sobre conceito de fração se depara com o relato de professores e alunos sobre dificuldades com esse conceito no processo de ensino e aprendizagem. É possível que tal dificuldade decorra de uma abordagem didática baseada em processos puramente técnicos e mecanizados. Na busca de superar essa mecanização, compreendendo a relação dialética entre atividade de ensino e atividade de estudo, organizamos uma pesquisa que investigou o processo de desenvolvimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração. Neste artigo, trazemos um recorte dessa pesquisa, apresentando o movimento de aproximação do pensamento teórico dos professores mediado pelo conceito de frações equivalentes. Baseados nas contribuições do Sistema Didático Desenvolvimental, fundamentado na Teoria Histórico-Cultural, organizamos um experimento formativo para professores, em que foram desenvolvidas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem para possibilitar aos docentes o encontro com o movimento lógico-histórico do conceito revelando sua essência na comparação de grandezas contínuas. A análise dos dados revelou que o

ABSTRACT

Research on the concept of fraction is faced with the report of teachers and students about difficulties with this concept in the teaching and learning process. It is possible that this difficulty stems from a didactic approach based on purely technical and mechanized processes. In an attempt to overcome this mechanization, understanding the dialectical relationship between teaching activity and study activity, we organized a research that investigated the process of developing the theoretical thought of teachers about the concept of fraction. In this article, we present an excerpt of this research, presenting the movement of approximation of the theoretical thought of teachers mediated by the concept of equivalent fractions. Based on the contributions of the Developmental Didactic System, based on the Historical-Cultural Theory, we organized a formative experiment for teachers, in which Triggering Learning Situations were developed to enable teachers to encounter the logical-historical movement of the concept, revealing its essence in the comparison of continuous quantities. The analysis of the data revealed that the concrete-abstract-concrete movement at work with situations

¹Programa de Pós-graduação em Educação, Doutorado em Educação (em andamento) na Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Brasil. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1633-9872>. E-mail: iraji.oliveira@unifesp.br.

²Programa de Pós-Graduação em Educação, Docente Associada do Departamento de Educação da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP). Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-2435-5773>. E-mail: vanessa.moretti@unifesp.br.

movimento concreto-abstrato-concreto no trabalho com situações envolvendo frações equivalentes, propiciou aos docentes um pensar mediado pelo conceito, próprio do pensamento teórico. Nesse processo, os professores demonstraram superar ações empíricas ou métodos cristalizados de transformação de frações em representações decimais, compreendendo a importância da inter-relação aritmética, algébrica e geométrica do conceito de fração. Os resultados reforçam a importância de que a formação de professores promova, por meio do desenvolvimento do pensamento teórico, a superação de formas cristalizadas de uso de algoritmos, com vistas à produção de um conhecimento teórico e significado para professores e alunos.

Palavras-chave: Teoria Histórico-Cultural. Sistema Didático Desenvolvimental. Pensamento Teórico. Fração Equivalente. Formação de Professores.

involving equivalent fractions, provided teachers with thinking mediated by the concept, typical of theoretical thought. In this process, teachers demonstrated to overcome empirical actions or crystallized methods of transforming fractions into decimal representations, understanding the importance of the arithmetic, algebraic and geometric interrelationship of the concept of fraction. The results reinforce the importance of teacher training promoting, through the development of theoretical thought, the overcoming of crystallized ways of using algorithms, with a view to the production of theoretical and meaningful knowledge for teachers and students.

Keywords: Historical-Cultural Theory. Developmental Didactic System. Theoretical Thought. Equivalent Fraction. Teacher training.

1 Introdução

O conceito de fração é um tema de interesse entre diferentes pesquisadores da área de educação matemática que estudam os processos educativos. Nessa linha, muitas pesquisas apontam para dificuldade de alunos e professores, no processo de ensino e aprendizagem desse conceito no percurso escolar (DIAS, 2007, ROSA, 2012, ROSA et al, 2013, FREITAS, 2016, entre outros).

Tal dificuldade pode ser justificada pela forma de apresentação do conceito, muitas vezes baseada nos pressupostos da escola tradicional, em que o conceito é apresentado em sua fase final, no contexto da lógica-formal, seguindo normalmente um roteiro de percurso de ação, em que é organizada a apresentação do conceito, um ou alguns exemplos e exercícios de treinamento ou fixação. Tal forma de apresentação do conceito garante a resolução de situações cotidianas ou imediatas, mas não são suficientes para uma compreensão mais significativa, duradoura e conceitual.

Diante desse contexto, buscamos bases teóricas e metodológicas que pudessem explicar e ajudar a superar tal situação atual no ensino das frações. Essa base teórica foi encontrada com o ingresso no Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-Cultural, na linha Educação Matemática (GEPEDH-Mat),

onde aprofundamos estudos na perspectiva Histórico-Cultural, a partir dos trabalhos de Vigotski, na Teoria da Atividade, defendida por Leontiev e no Sistema Didático Desenvolvimental de Davidov-Elkonin-Repkin.

Na concepção de tais autores, a escola tem como finalidade superar o conhecimento empírico e utilitarista para um conhecimento mais consciente, significado, científico e teórico. Para que isso seja possível, as formas de apresentação e desenvolvimento do estudo de um conceito devem ser mais abrangentes do que a síntese apresentada na lógica formal, superando-as em busca de um percurso baseado na lógica dialética do pensamento.

Para verificar como essa superação da técnica e da aparência se objetivaria na atividade de ensino do professor de matemática, desenvolvemos uma pesquisa de mestrado (ROMEIRO, 2017) cujo objetivo foi investigar como o desenvolvimento do pensamento teórico dos professores que ensinam matemática, mediado pelo conceito de fração, impactaria a escolha, utilização ou adequação dos materiais didáticos na atividade de ensino. Para fins desse artigo, apresentaremos a análise do movimento do pensamento teórico dos professores sobre frações equivalentes.

Buscando atingir nosso objetivo de pesquisa, optamos pelo experimento formativo, apoiado no método do materialismo histórico-dialético, como estratégia de acompanhamento do fenômeno e coleta de dados. Para desencadear o movimento dos professores em atividade de aprendizagem e também em atividade de ensino, usamos como recurso teórico-metodológico a Atividade Orientadora de Ensino por meio da história virtual intitulada “Jardins Egípcios” que vislumbrou colocar os professores diante da necessidade dos princípios lógico-históricos das frações equivalentes por meio da comparação de grandezas contínuas subdivididas em quantidades diferentes. Como mostraremos no decorrer do artigo, a análise dos dados revelou que o desenvolvimento do pensamento teórico de professores em atividade de ensino permitiu a superação de formas cristalizadas de uso de algoritmos na direção de um conhecimento teórico e significado sobre frações equivalentes.

O presente artigo parte de aspectos do movimento do pensamento no contexto da lógica dialética, ressaltando a base teórica adotada, ou seja, o sistema

Elkonin-Davidov-Repkin, em particular, a Teoria do Ensino Desenvolvidor defendida por Davidov. De forma complementar, mostra o conceito de Atividade Orientadora de Ensino como recurso teórico e metodológico para desencadear o movimento dos professores em atividade, valorizando a coletividade na busca da solução de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem. Logo depois, a análise de um recorte de dados da pesquisa revela aspectos do movimento do desenvolvimento do pensamento teórico de professores mediado pelo conceito de fração equivalente. Por fim, o texto traz algumas considerações sobre os impactos do desenvolvimento do pensamento teórico na e para a formação de professores.

2 A Teoria do Ensino Desenvolvidor e o movimento do pensamento na lógica dialética

As contribuições das pesquisas desenvolvidas por Vigotski, Leontiev, Luria e seus colaboradores possibilitaram identificar que é importante criar condições para que o sujeito, em seu processo de formação, compreenda o significado cultural, histórico e social de elaboração do conceito. Assim, na atividade humana mediada, o sentido pessoal acerca do que é aprendido produz-se em unidade dialética com o significado social.

Para Vigotski (2010), o significado é proveniente das interações sociais e culturais nas quais o sujeito compreende a relação entre a palavra e o signo, em que a palavra ganha um significado. Já o sentido é mais amplo, mutável e complexo, envolvendo também as experiências pessoais. É nessa relação dialética entre sentido e significado, que ocorre na atividade, que o sujeito toma consciência do objeto (LEONTIEV, 1988). Porém, esses pesquisadores afirmam que a atividade não é uma simples ação realizada pelo sujeito, ela surge como uma estrutura que envolve necessidade e motivo orientados a um fim, a um objeto, mediados pelos signos, linguagem e instrumentos culturais.

A partir do detalhamento da Perspectiva Histórico-Cultural de Vigotski, especialmente de sua hipótese sobre a interrelação interna entre educação, aprendizagem e desenvolvimento humano (PUENTES; LONGAREZI, 2020), Davidov, Elkonin e Repkin desenvolveram o Sistema Didático Desenvolvidor,

no qual se integram pesquisas, teorias e métodos sobre os processos de ensino e aprendizagem no ambiente escolar. Esse sistema pode ser integrado a várias teorias para elaborar o que é chamado de aprendizagem desenvolvimental. Por exemplo, uma teoria pode ter como objeto o trabalho do professor em atividade de ensino, outra teoria pode ter como objeto os materiais didáticos e orientações aos professores, outra pode ter como objeto o estudante e, ao se integrarem formam um sistema com um conteúdo de aprendizagem específico, formas e métodos de usá-los na prática (DAVIDOV, 1996 apud PUENTES; LONGAREZI, 2020). Mas vale ressaltar, que todas as teorias partem de um pressuposto comum, neste caso, a perspectiva Histórico-Cultural sobre o desenvolvimento humano.

Davidov, junto com seus colaboradores, formulou a Teoria do Ensino Desenvolvimental que tem como foco investigar a atividade de estudo nos escolares, ou seja, os processos de aprendizagem dos alunos a partir da entrada na escola formal³. Esta Teoria considera que o ingresso na escola marca uma nova etapa da vida da criança, impactando consideravelmente sua forma de organização psíquica externa e interna (DAVIDOV, 1988). Essa nova fase caracteriza-se por uma mudança na atividade principal da criança, como nos explica Leontiev (1978).

Segundo Leontiev (1978), atividade principal é aquela que governa as mudanças psicológicas mais importantes da personalidade em certo estágio da vida do sujeito. A mudança de uma atividade principal para outra está exatamente na relação dialética do sujeito com a realidade social, histórica e cultural. Para Davidov (1988), ao ingressar na escola, a atividade principal da criança vai se transformando na atividade de estudo que, de acordo com o autor, é aquela cujo produto forma as transformações psíquicas no aluno, em outras palavras, a autotransformação. O conteúdo principal da atividade de estudo é a apropriação dos procedimentos generalizados de ação na esfera dos conceitos científicos e a mudança qualitativa no desenvolvimento psíquico das crianças.

³ A escola formal citada pelo autor equivaleria a entrada no 1º ano do Ensino Fundamental, no contexto da Educação Básica brasileira.

Para este autor, o ensino é a forma de organização dos meios de transmissão da experiência socialmente elaborada a ser apropriada pelos sujeitos. Juntamente com a apropriação da experiência socialmente elaborada, o sujeito também desenvolve o pensamento, formando assim uma unidade entre os processos internos e externos (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987; LIBÂNEO, 2004). A apropriação dessa experiência ocorre na relação com o outro por meio da comunicação e do estudo, o que

[...] representa o resultado da atividade do indivíduo destinada a dominar os procedimentos, socialmente elaborados, de orientação no mundo objetal e suas transformações, procedimentos que paulatinamente se convertem em meios da própria atividade do indivíduo (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 323).

Essa transmissão não é passiva, pelo contrário, ela é ativa, coletiva e ocorre na atividade humana. A apropriação da realidade socialmente elaborada pode ocorrer em vários tipos de atividade, em vários meios sociais, porém, estes autores, amparados nos trabalhos de Vigotski, afirmam que é na escola que o pensamento organizado e científico, por meio da atividade de estudo, ganha um objetivo específico e se desenvolve.

Ao defender que o ensino propicia a apropriação da experiência e produção humana, socialmente elaborada, desenvolvendo assim o pensamento, Davidov (1988) afirma que é necessário desenvolver na escola o pensamento teórico. Sendo assim, o autor critica a forma de produção do conhecimento na escola tradicional, pautada na lógica formal, desenvolvendo do pensamento empírico. Para ele

O conteúdo e os métodos adotados no ensino primário seguem uma orientação que proporcionam somente a formação “dos primeiros graus, das bases da consciência e do pensamento empírico, caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico das crianças” (DAMAZIO; ROSA; CARDOSO, 2019).

O pensamento empírico, citado por Davidov, é aquele que privilegia as qualidades aparentes dos objetos por meio da classificação de características comuns entre eles, ou seja, “[...] reconhece como comuns as qualidades parecidas em todos os objetos do mesmo tipo e classe” (DAVIDOV, 1988, p. 100, tradução nossa) e, a partir dessa classificação, por indução, chega-se a uma abstração e

generalização empírica, determinando a forma geral de solução de alguns tipos de situações particulares apresentadas, inicialmente, no modelo.

O movimento do pensamento empírico parte do particular (o objeto) para o geral (características comuns de objetos singulares), do concreto sensorial para o abstrato e, por meio da indução é gerada uma generalização empírica. Segundo Davidov (1988) este tipo de pensamento é limitado, pois, não analisa o objeto em sua plenitude e universalidade, não considera as tensões e contradições de produção do objeto, ou seja, o seu processo histórico, considerando somente o processo lógico da produção humana, pronta e acabada.

Davidov (1982; 1988) defende que as disciplinas escolares devem propiciar o desenvolvimento dos níveis mais altos de consciência e pensamento sobre os conceitos, ou seja, o pensamento teórico. Para ele, o pensamento teórico é o “processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetual-prática, a reprodução nela, das formas universais das coisas” (DAVIDOV, 1988, p. 125, tradução nossa). Este pensamento possui um caráter generalizador que inclui as relações internas e externas do objeto do conhecimento, o seu processo de produção lógico-histórico, buscando revelar sua essência. Sua função é analisar e resolver problemas práticos da vida cotidiana e também problemas teóricos não práticos, de modo intencional e consciente.

Pautado na lógica dialética entre o concreto e o abstrato, o pensamento teórico não exclui as características do pensamento empírico, mas sim o supera por incorporação. Kopnin (1978) diz que o pensamento teórico insere no seu interior dados do pensamento empírico. Esses dados não embutem um degrau para o desenvolvimento do pensamento teórico, mas se dão como uma etapa para o desenvolvimento deste pensamento como, por exemplo, no processo de análise do concreto caótico na qual ocorre a separação das características comuns e sua classificação por semelhança. Embora esta etapa seja importante, ela não é suficiente para o desenvolvimento do pensamento em suas máximas potencialidades.

Em nível empírico obtém-se da experiência imediata o conteúdo fundamental do pensamento. [...] O pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste,

cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. [...] O conhecimento pode assim proceder no seu nível teórico, porquanto, ajudado pelo pensamento, ultrapassa os limites do que é dado na experiência (KOPNIN, 1978, p. 152).

O pensamento teórico segue o movimento de redução do concreto sensorial ao abstrato e de ascensão do abstrato ao concreto real (DAVIDOV, 1988; LIBÂNEO, 2004; FREITAS, 2016). É uma redução, pois, o sujeito parte da análise do concreto caótico, multifacetado, geral e, por meio da classificação, análise, hipótese e trabalho coletivo, reduz o pensamento à sua essência, de caráter particular. Neste movimento em busca da abstração, além das características aparentes, são reveladas as características internas, não semelhantes e contraditórias do objeto, chegando assim, na abstração teórica do pensamento, sua essência. A partir da essência, ainda de maneira analítica, revela-se a generalização substancial, teórica. Para Davidov (1988) a generalização teórica é universal e instrumentalizada, na qual é possível identificar relações gerais principais do conceito estudado. O movimento do pensamento teórico não se finaliza com a generalização substancial teórica. É necessário retornar ao concreto em um movimento de ascensão, ou seja, de um caráter particular para o caráter geral, multifacetado do objeto, porém, com outra qualidade, uma qualidade teórica, organizada e pensada. É por meio do movimento entre o concreto e o abstrato, em relação dialética, que é possível a apreensão do conceito em suas relações lógico-históricas no reflexo da natureza humana, na sua realidade e na consciência (FREITAS, 2016).

Visando o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, Davidov (1988) propõe novas formas de organização do ensino, distintos da escola tradicional, a partir de princípios estruturadores das disciplinas e do trabalho escolar, desde os anos iniciais do percurso escolar.

Para isso, é fundamental que o professor organize o ensino, desenvolvendo ações de estudo que despertem no estudante a necessidade de estudar, de modo que este entre em atividade de estudo e, em movimento, se apropriando dos elementos lógico-históricos do conceito estudado. Tal organização é essencial uma vez que estudar não é algo inato, autônomo ou natural dos estudantes que ingressam na escola (ROSA, 2012) e, por isso, demanda um trabalho conjunto entre o professor e o aluno, de modo que o

professor oriente o percurso do estudante para o movimento do pensamento teórico.

Considerando a atividade de ensino do professor e a atividade de estudo do aluno em relação dialética indissociável, a Atividade Orientadora de Ensino, proposta por Moura et al. (1996), assume o desafio de desencadear o movimento dos sujeitos no processo educativo escolar e, por isso, assumimos tal conceito como base de recurso teórico-metodológico na organização do experimento formativo da nossa pesquisa.

3 Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre atividade de ensino e atividade de estudo.

A atividade Orientadora de Ensino – AOE (MOURA, 2010) tem como pressuposto teórico a atividade humana partindo de uma necessidade, na qual a ação é dirigida a um fim, ao seu objeto, de modo intencional e consciente. Partindo da sua atividade principal (LEONTIEV, 1988), que é o ensino, o professor organiza ações mediadas pelo conteúdo, na qual escolhe, adapta ou elabora instrumentos e operações para a objetivação do seu plano ideal. É nesse sentido que a Atividade Orientadora de Ensino tem o caráter orientador (MORETTI, 2007), ou seja, tem por princípio orientar as ações do professor na sua atividade de ensino.

A AOE, segundo Moura et al (2010), surge como unidade entre o ensino e a aprendizagem. Isso porque o professor, na sua atividade de ensino, ao organizar o ensino de forma intencional e consciente, busca compreender o conceito no movimento lógico-histórico de produção humana, ou seja, busca compreender o conceito na sua gênese, na sua essência. Essa busca pela essência do conceito coloca o professor em atividade de aprendizagem. A partir desse conhecimento, o professor organiza o ensino de modo a propiciar o aluno o encontro com esse movimento do conceito, buscando os melhores instrumentos mediadores para isso, entrando então em atividade de ensino. Portanto, ensino e aprendizagem estão em constante movimento dialético na formação do professor e do aluno.

Como forma de organizar o ensino e propiciar aos alunos o encontro com o movimento de produção humana do conceito, Moura et al. (1996) sugere a elaboração de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem - SDA. As SDA são

situações problema que buscam, a partir da mediação entre alunos e entre alunos e professor, desencadear a atividade dos sujeitos que são colocados diante de uma necessidade lógico-histórico do conceito e, por isso, permitem ao sujeito aproximar-se dos nexos conceituais (ou da essência) do conceito.

No caso do ensino da Matemática, o desafio que se impõe ao professor é a proposição de problemas que coloquem, para os estudantes, situações que, para serem resolvidas, impliquem na análise e objetivação de elementos essenciais do conceito que se quer ensinar. De modo a manifestar a essência do conceito, o problema desencadeador ou a situação-problema deve impregnar-se da necessidade que levou a humanidade à construção do conceito e favorecer uma generalização que supere a experiência sensorial (MORETTI, 2014, p.34).

Assim, é necessário reforçar que as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem não são somente situações problema contextualizadas, que buscam trazer a realidade social dos alunos. A SDA tem como foco colocar os alunos em movimento, em atividade de aprendizagem, na coletividade com seus colegas e professor, na busca da gênese do conceito considerando o processo lógico-histórico que levou a humanidade à necessidade de produção daquele conhecimento ou conceito.

Dada essa complexidade, criar uma SDA não é tarefa fácil uma vez que, além de ser uma situação desafiadora e nova, deve também objetivar a necessidade lógico-histórica do conceito de modo que, na atividade coletiva e mediada em sala de aula, a solução do problema se constitua como motivo da atividade de aprendizagem dos sujeitos. Podem ser recursos da SDA: a história virtual, o jogo e as situações emergentes do cotidiano (MOURA et al., 1996). A história virtual não é necessariamente a história factual. O importante é que envolva uma situação que traga a necessidade humana de produção do conhecimento e possibilite o movimento dos sujeitos na busca da sua solução. O jogo traz elementos que colocam o aluno diante de uma situação estratégica e envolve a comunicação e o registro das respostas encontradas. As situações emergentes do cotidiano são questões envolvendo o cotidiano do aluno e trazidas para o contexto da aprendizagem.

Compreendemos que a Atividade Orientadora de Ensino propicia ao professor um modo de organizar o ensino de forma consciente, em que busca compreender a

essência de seu trabalho tendo maior autonomia em suas ações e em sua atividade de ensino, ou seja, constituindo-se como “produtor de seu saber” (MOURA et al., 1996, p. 5). A partir dessa consciência do próprio trabalho, o professor não executa somente as técnicas de resolução dos problemas práticos e dos programas curriculares, mas sim, coloca o outro em contato com a cultura e o conhecimento desenvolvido pela humanidade, apropriando, transmitindo e produzindo o conhecimento teórico.

4 O movimento do pensamento teórico de professores mediado pelo conceito de frações equivalentes

O conceito de fração, na sua origem, remete à noção de continuidade. Diferentemente do conjunto dos números naturais, cujas primeiras ideias remetem ao contar e ao registro da contagem, diante da necessidade humana de controle de quantidades, o campo dos números racionais tem que suas primeiras noções no desafio humano da medição de grandezas contínuas. Sendo os números naturais insuficientes para lidarem com a necessidade humana de medir, em situações nas quais a unidade de medida não cabia uma quantidade inteira de vezes na grandeza a ser medida, houve a necessidade de subdividi-la (CARAÇA, 1989). Para fazer a subdivisão da parte inteira, era necessário superar o campo numérico já conhecido para um novo conceito, as frações e depois, o campo dos números racionais.

Apesar da gênese do conceito de fração remeter ao conceito de continuidade, não é raro que no ensino a abordagem de tal conceito fique limitada ao significado de parte-todo, na qual a quantificação discreta é privilegiada. Assim, tarefas envolvendo a divisão do todo em partes iguais, na qual são tomadas algumas partes para representação aritmética da fração, são comuns no cotidiano da escola. Essa forma de abordagem das frações não supera o conhecimento empírico, a aparência da fração, uma vez que para a resolução de tais tarefas basta contar quantas partes o todo foi dividido e quantas partes foram tomadas, colocando esses valores na representação aritmética do denominador e do numerador da fração, respectivamente. Em situações dessa natureza, o conjunto dos números naturais é suficiente para solucionar o problema e a ideia de continuidade é excluída do processo.

A partir dessa problemática, desenvolvemos um experimento formativo que

abordou situações desencadeadoras de aprendizagem que permitissem superar a forma discreta do ensino de fração ao apresentar esse conceito a partir de aspectos de sua gênese histórica relacionados com a necessidade de medição e, de forma decorrente, relacionado com a continuidade. Em particular, a necessidade de pensar teoricamente, num processo mediado pelo conceito de fração equivalente, se deu a partir de situações envolvendo a comparação de grandezas contínuas subdivididas em quantidades diferentes.

O experimento formativo caracteriza-se pela intervenção direta do pesquisador nas ações desenvolvidas durante a investigação experimental (DAVIDOV, 1988) e pela intencionalidade de investigar o movimento de transformação psíquica dos sujeitos. Tais características do experimento formativo permitem compreender o fenômeno em movimento, em transformação, em tensão, em contradição, para além da aparência, observando as relações universais, particulares e singulares em relação dialética. No nosso caso, as ações intencionais deram-se por meio da proposição de SDA e a intencionalidade de pesquisa de processo psíquico caracterizou-se pela análise do desenvolvimento do pensamento teórico dos professores em atividade de ensino e de aprendizagem.

O experimento formativo se deu por meio de um curso de extensão com característica de formação continuada contendo 10 encontros presenciais que ocorreram aos sábados pela manhã, com duração de 4 horas cada encontro, durante os meses de abril, maio e junho de 2016. Os encontros ocorreram na sede da Diretoria de Ensino Guarulhos Norte, na cidade de Guarulhos. Além dos encontros presenciais, foi proposta uma tarefa que poderia ser realizada em local de livre escolha. Participaram da pesquisa 11 professores de matemática que ministravam aulas nos anos finais do Ensino Fundamental da rede pública estadual de São Paulo. Todos os professores assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido e seus nomes foram mantidos em sigilo, assegurando a anonimato dos participantes.

Os dados foram coletados por meio dos seguintes instrumentos: Entrevista Semiestruturada (ES); Observação Direta (OD); Conversas individuais (CI); Encontro Formativo (EF); Registros das propostas de situações desencadeadoras de aprendizagem (RP). Para essa coleta usamos como recursos materiais filmadoras,

gravadores de som (digital ou celular) e diário de campo. Organizamos os dados por meio da seguinte sequência: nome fictício do professor, acompanhado da sigla do instrumento utilizado e o número relativo ao encontro. Assim, por exemplo, SARA, EF, 1 indica a transcrição da fala da professora Sara no Encontro Formativo 1.

Para análise dos dados adotamos o conceito de isolado (CARAÇA, 1989) que pode ser compreendido como um recorte da realidade na qual o fenômeno se manifesta e que mantém as características essenciais do todo. Os isolados foram compostos por episódios que, segundo Moura (2000) é o que exhibe a natureza e a qualidade do isolado.

Sendo nosso objeto de investigação o desenvolvimento do pensamento teórico dos professores mediado pelo conceito de fração e, em particular, pelo conceito fração equivalente, compreendemos que tal objeto não é acessado diretamente pelo pesquisador o que nos levou a buscar na materialidade concreta do fenômeno investigado elementos que pudessem indicar tal desenvolvimento. Tomando a premissa da unidade dialética entre a atividade interna e a atividade externa dos sujeitos, a partir da qual a atividade interna “se origina a partir da atividade prática externa, não se separa dela, mas conserva uma relação fundamental e bilateral com a mesma” (LEONTIEV, 1983, p. 83), buscamos na manifestação da atividade externa pistas que nos permitissem inferir sobre a atividade interna.

Assim, com o objetivo de investigar o desenvolvimento do pensamento teórico, buscamos na análise dos dados indicados indícios desse movimento. Por indícios compreendemos pistas, vestígios, “indicação provável” ou ainda “sinal ou fato que deixa entrever alguma coisa, sem a descobrir completamente, mas constituindo princípio de prova; signo”⁴. Assim, a análise buscou pistas que fossem indicativas desse movimento de desenvolvimento do pensamento teórico na materialidade objetiva da realidade concreta a qual, no caso da pesquisa aqui relatada, se caracterizou pelo conjunto de dados coletados.

Neste artigo apresentamos e discutimos os dados referentes a um episódio do isolado “O movimento do pensamento teórico sobre frações”, que trata do

⁴ Indício. Dicionário Michaelis. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/indicio>.

movimento do pensamento teórico dos professores mediado pelo conceito de frações equivalentes. Nomeamos este episódio como “Jardins Egípcios (frações equivalentes)”, que teve como objetivo desencadear nos professores a necessidade de compreender as frações equivalentes em relação dialética com o espaço geométrico, sua posição na reta real e sua representação aritmética.

4.1 SDA “Jardins Egípcios” e as frações equivalentes

No início do experimento questionamos os professores sobre a introdução do conceito de fração com os alunos. A maior parte dos professores utilizava a contagem, conforme já apresentado, e outros disseram ir diretamente pela definição, como expresso pela professora Gabriela:

Como eu pego os pequenos eu começo sempre pela história, como surgiram os números, que foi da necessidade do homem contar, comercializar, comparando com o dinheiro, começou a ter a base da troca. Depois viu que a troca não era suficiente. Depois ele tinha a necessidade de registrar e aí eu defino o princípio dos números e o conjunto dos naturais. Agora, quando eu vou para frações eu vou mais ou menos à definição direto. Que fração significa dividir, separar em partes. Eu nem me atento muito com os pequenos [...] a estipular conjuntos [...] (GABRIELA, OD, 3).

Entendemos que esta forma de apresentação do conceito, relatada pela professora, pode estar atrelada com o próprio percurso de formação dos professores, incluindo a formação na graduação na qual, em muitos casos, o ensino tem por base a lógica-formal, a valorização da técnica de resolução, dando ênfase à formação do matemático e não à formação do professor de matemática (VIRGENS, 2019).

Nesse momento inicial, a professora Sara apresentou como costumava apresentar conceito frações equivalentes aos alunos em sala de aula:

Eu uso pé para o denominador e cabeça para o numerador. Nas frações equivalentes eu falo: se o pé aumenta a cabeça aumenta; se o pé diminui, a cabeça diminui, [...] se não vai ficar cabeção com pezinho (SARA, OD, 8).

A fala da professora Sara mostra uma forma coloquial, aparente e que valoriza uma regra mecanizada e cristalizada para obter frações equivalentes: o

numerador e o denominador devem ser multiplicados pelo mesmo valor. Porém, esta forma de tratar o conceito não garante uma compreensão completa dos seus aspectos essenciais e lógico-histórico.

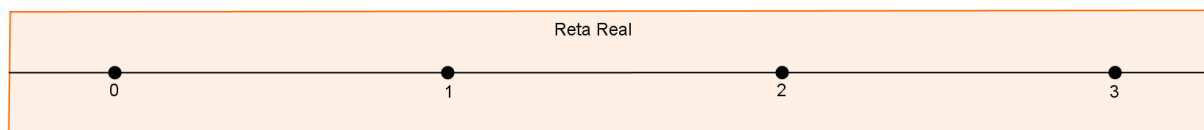
Em um dos encontros seguintes foi proposto que os professores realizassem comparações entre frações (menor, maior, diferente ou igual). Inicialmente, a formadora/pesquisadora solicitou aos professores que localizassem os números 1 (um), 2 (dois), $\frac{6}{5}$ (seis quintos) na reta numérica. Para responder tal tarefa, os professores foram imediatamente transformando a fração em sua representação decimal. A pesquisadora/formadora questionou como esses números poderiam ser encontrados sem tal transformação e a professora Sara relatou a dificuldade que ela e outros professores tinham em localizar números na reta numérica sem fazer a transformação para representação decimal:

A gente quando vai colocar a fração na reta tem essa dificuldade. Até nós professores quando vamos localizar uma fração, intuitivamente a gente faz a divisão. É difícil a gente localizar a fração, saber onde a fração mora. A gente não localiza a fração, a gente localiza o decimal (SARA, EF, 3).

A discussão coletiva entre formadora/pesquisadora e os professores apontou que seria necessário representar a localização da fração na reta numérica sem a transformação para o decimal, pois, alguns números como $\frac{1}{3}$ que representam uma dízima periódica na transformação para o decimal, trariam dificuldade para a compreensão da sua verdadeira posição na reta.

Após essa discussão coletiva e síntese deste movimento, solicitamos que os professores localizassem os números $\frac{5}{4}$ e $\frac{6}{5}$ na reta numérica, e depois comparassem esses dois valores dizendo qual seria a maior fração. Para isso, entregamos uma filipeta, conforme figura 1.

Figura 1 – Segmento de reta real disponibilizada aos professores



Fonte: Romeiro, 2017, p. 115.

Para localizar as frações na reta real o grupo do professor Vitor procurou realizar divisões na reta, por meio de dobras, da seguinte maneira: “Dividimos a distância de 1 e 2 ao meio, depois ao meio novamente e encontramos o $\frac{5}{4}$. Usamos a régua para dividir e achar o $\frac{6}{5}$, e deu exatamente aqui (apontando para o ponto referente a fração)” (VITOR, EF, 3).

A partir da discussão anterior, a professora Gabriela relatou a estratégia usada para realizar a comparação entre as frações: “O número $\frac{5}{4}$ é maior, porque o pedaço [que resulta do inteiro] dividido por 4 são pedaços maiores do que se eu dividir por 5” (GABRIELA, EF, 3).

A partir da fala dos professores, do trabalho coletivo e da forma que realizaram as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, a análise dos dados nos permitiu perceber indícios de mudança no modo de pensar as frações, relacionando sua representação aritmética, algébrica e geométrica em relação dialética, que segundo Rosa (2012) é o que permite o desenvolvimento do pensamento teórico sobre frações. Ou seja, os professores passaram a operar mais com a representação envolvendo a continuidade, própria do conceito lógico-histórico de frações, evitando realizar transformações ou buscando formas na perspectiva da lógica-formal para resolver a tarefa.

Após esse movimento, apresentamos aos professores uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem por meio do recurso de uma história virtual chamada “Jardins Egípcios”⁵ que tinha por objetivo colocá-los diante da necessidade de compreender as frações equivalentes no espaço geométrico e sua posição na reta real, mesmo que a representação aritmética seja diferente, ou seja, compreender o conceito no processo do pensamento teórico. A SDA proposta não trazia explicitamente a relação de fração equivalente pela regra em que numerador e denominador deveriam ser multiplicados ou divididos por um mesmo valor, mas sim, buscou propiciar aos professores a identificação de

⁵ Todas as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem desenvolvidas na pesquisa estão em Romeiro (2017).

relações que envolviam diferentes formas de representação em um mesmo espaço geométrico, um mesmo lugar na reta, e com isso, deduzir a regra geral para identificar ou calcular frações equivalentes.

Quadro 1 – História Virtual: “Jardins Egípcios”

Na maior parte árida e deserta do Egito, as terras férteis do vale do Nilo representava para o povo egípcio um milagre criado pelos deuses. Diz-se que o Egito é uma dádiva do Nilo. O Nilo, o rio mais longo do mundo, tornou possível a criação e cultivo dos primeiros jardins e pomares conhecidos ao longo da história antiga.

Os primeiros jardins da história da humanidade, da qual nós temos alguma documentação na forma de restos arqueológicos, foram construídos no Egito, por meio de desenhos de jardins, pinturas de parede, relevos esculpídos nas paredes de tumbas e templos, modelos jardins encontrados em túmulos e estudos palinológicos (ensaio de sementes) que foram recentemente descobertos. Tudo isso nos dá uma ideia mais ou menos clara do tipo de jardinagem que existia no antigo Egito, do tipo de flora que foram usados e o grande conhecimento e domínio que tinham os egípcios da antiguidade na construção de jardins, folhas, água, árvores e plantas em crescimento.

Na humilde casa do antigo Egito, que tinha um pequeno pátio, representado por K , um agricultor chamado Azibo, queria fazer o seu jardim. Ele dispunha de pedaços de vegetação egípcia típica (parecido com grama), representado por T , e queria começar cobrindo todo pátio com esta vegetação para depois dispor as árvores frutíferas e outras plantas.

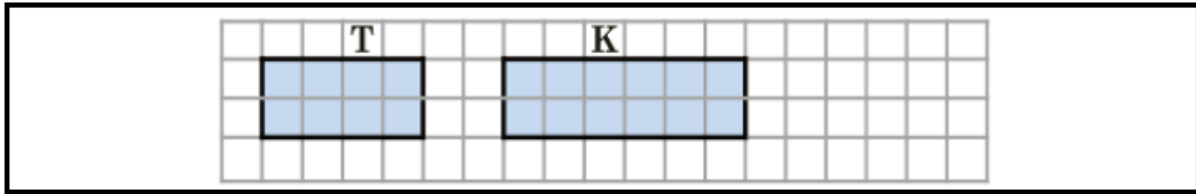
Represente as diferentes formas que este agricultor pode cobrir o seu pátio utilizando a vegetação disponível, ou seja, meça a área de K utilizando T e represente as diferentes frações, representando graficamente o método utilizado.

Fonte: Romeiro, 2017, p. 127-128.

Para representar o tamanho do terreno e o tamanho das placas de grama na qual o terreno deveria ser coberto, foi entregue aos professores a malha

quadriculada, conforme a figura 2.

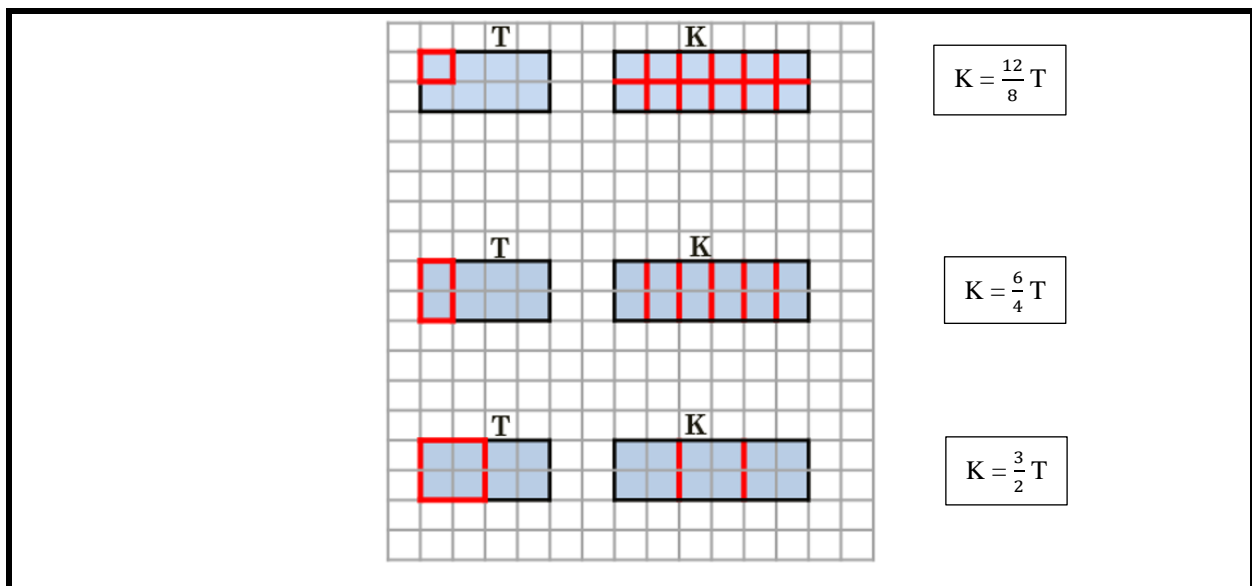
Figura 2 – Representação gráfica da situação desencadeadora “Jardins Egípcios”.



Fonte: GOPBOB et al. apud Freitas, 2016, p. 136.

Inicialmente a situação apareceu para os professores como um concreto sensorial e caótico, pois a grama T não cabia uma quantidade exata de vezes no terreno K. Para resolver essa questão, os professores coletivamente buscaram compreender de que forma poderiam cobrir o terreno. A malha quadriculada serviu para auxiliá-los na busca da solução do problema que a situação trazia. Coletivamente e por meio de hipóteses e análises, buscaram unidades intermediárias de T, de modo a cobrir o terreno K, conforme figura 3:

Figura 3 – Representação da divisão do terreno K utilizando as unidades intermediárias de T



Fonte: Romeiro, 2017, p. 132.

Na socialização, alguns professores encontraram como unidade intermediária para medir o terreno K o valor $\frac{1}{8}T$. Sendo assim, o valor aritmético

para cobrir o terreno K foi de $\frac{12}{8}T$. Encontraram também a unidade intermediária $\frac{1}{4}T$, obtendo como valor aritmético para cobrir o terreno K o valor $\frac{6}{4}T$. Também foi possível identificar a unidade intermediária $\frac{1}{2}T$, obtendo como valor aritmético para cobrir o terreno K o valor $\frac{3}{2}T$.

No momento da socialização, foi questionado aos professores o que estes números encontrados representavam na situação desencadeadora. Os professores relacionaram ao conceito de fração equivalente. Essa forma de cobrir o terreno K por unidades intermediárias de T nos permitiu perceber a equivalência das frações na continuidade, pois, mesmo que as frações usassem unidades intermediárias diferentes, a área coberta seria a mesma. A formadora/pesquisadora solicitou então, de modo colaborativo e conjunto, que conceituassem frações equivalentes a partir do que eles haviam compreendido. Diante da pergunta a professora Sara respondeu: “São escritas diferentes, mas que tem a mesma representação geométrica (SARA, EF, 7)”.

Os professores concordaram com a definição trazida pela professora que definiu um dos aspectos referentes às frações equivalentes usando a própria representação geométrica na malha quadriculada, porém, consideramos que a resposta ainda estava incompleta, pois, ela só observou a representação aritmética e a área, esquecendo-se da localização na reta que compõe um dos fatos importantes na relação geométrica e também de uma forma geral de definir fração equivalente.

Diante dessa constatação, entendemos que seria necessário envolver outros aspectos que compõem o conceito teórico de fração equivalente. Foi então, solicitado aos professores que comparassem os valores aritméticos encontrados: $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{12}{8}$, sua representação gráfica e sua localização na reta numérica. Para a localização dos valores na reta numérica, foi entregue aos professores a reta da figura 1. Diante da resolução destes questionamentos, perguntamos novamente como poderíamos definir o conceito de frações equivalentes e, a professora Sara complementou a definição da seguinte maneira: “São frações que são escritas diferentes, mas representam a mesma

parte do todo, a mesma área do inteiro. Que lá na reta real, representam o mesmo ponto (SARA, EF, 7)”.

Compreendemos que a fala da professora Sara representa a essência do conceito de fração equivalente, conforme descreve Caraça (1989, p. 39): “[...] dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial”. Ou seja, compreendemos neste trecho que os professores reduziram o percurso do concreto para o abstrato, chegando assim, na abstração teórica sobre as frações equivalentes.

Teoricamente frações equivalentes estão relacionadas ao princípio da multiplicidade e da divisibilidade, no qual resulta em um número k qualquer que é o coeficiente de transformação da fração. Assim, multiplicidade e divisibilidade se dão por meio da generalização proporcional, ou seja, dividindo-se o denominador em k partes menores, deve-se multiplicar o numerador na mesma proporção. Diante disso e para que os professores compreendessem essa relação e generalização, realizamos alguns questionamentos:

Formadora/Pesquisadora: De acordo com as frações equivalentes que vocês encontraram, como elas se relacionam? O que aconteceu com a fração quando eu dividi a placa de grama em partes menores? O que aconteceu para conseguir cobrir o todo?

Sara: Aumentou a quantidade de partes usadas para cobrir o todo.

Formadora/Pesquisadora: E se eu diminuir a divisão feita na placa, ou seja, se eu deixar a placa de grama maior?

André: Eu diminuo também a quantidade de placas usadas para cobrir o todo.

Formadora/Pesquisadora: Como posso escrever esta relação entre a quantidade de divisões feitas na placa e a quantidade que utilizo para cobrir o todo?

André: Tenho que usar a mesma letra para representar a divisão da placa e a utilização para cobrir o todo. Tem que ser equivalente. Por exemplo, se eu aumentar a quantidade de divisões feitas na placa, multiplico o denominador por uma letra. A quantidade de partes utilizadas para cobrir o todo também tem que ser multiplicada pela mesma letra.
(EF, 7).

Este trecho demonstra indícios de compreensão da generalização teórica, já no processo de ascensão do abstrato para o concreto. Neste caso, o concreto já aparece com uma nova qualidade, ou seja, o concreto real ou pensado. Comparado à forma inicial de abordar o tema das frações equivalentes, apresentada pela fala da professora Sara, em que ela usa de forma coloquial pé e cabeça para representar numerador e denominador, e o aumentativo ou diminutivo dos sujeitos relativos para representar a transformação dessas frações em frações equivalentes, os dados revelam indícios de apropriação e mudança do pensar, para um pensar teórico mediado por conceito. Isso porque, para tratar do assunto os professores usaram menos o exemplo e mais o próprio conceito generalizado, no movimento concreto-abstrato-concreto.

Na finalização deste movimento de análise e síntese sobre frações equivalentes, a partir da atividade e do trabalho conjunto entre pesquisadora/formadora e os professores, o professor André diz:

O mais legal foi dar significado às frações equivalentes na reta. Os alunos têm muita dificuldade de trabalhar com a reta numérica, então, quando você consegue provar pra ele que uma fração é equivalente a outra, não só pelo desenho, mas porque ela está no mesmo lugar, representa o mesmo espaço, isso é bem bacana (ANDRÉ, EF, 7).

Os dados revelaram que os professores ao longo dos encontros demonstraram indícios do desenvolvimento do pensamento teórico sobre o conceito de fração e fração equivalente. Se no início para apresentar o conceito, os professores fixavam sua atenção apenas à regra e à representação aritmética, foi possível identificar que, no desenvolvimento do experimento formativo a generalização da regra se deu de outra forma, relacionando os aspectos aritméticos, geométricos e algébricos, próprios do pensamento teórico. Este tipo de processo, além de propiciar o desenvolvimento do pensamento teórico sobre o conceito, ainda permite que o professor, em sua atividade de ensino, possa atribuir um sentido envolvendo uma concepção mais teórica naquilo que está ensinando.

5 Considerações finais

O presente texto trouxe um recorte de uma pesquisa realizada com professores que ensinam matemática nos anos finais do Ensino Fundamental na cidade de Guarulhos, cujo objetivo foi de verificar o movimento do pensamento teórico desses professores sobre o conceito de fração e o sentido atribuído na utilização, adequação ou escolha dos instrumentos mediadores. O recorte da pesquisa, apresentado neste texto, refere-se ao movimento do pensamento teórico dos professores sobre o conceito de fração equivalente. O sistema Elkonin-Davidov-Repikin deu base e sustentação teórica e metodológica para o desenvolvimento do experimento formativo e compreensão do fenômeno em movimento, por meio da coleta e análise dos dados da pesquisa.

Dentro desse Sistema, e a partir da Teoria Desenvolvimental, compreendemos que o pensamento teórico, segue o percurso concreto-abstrato-concreto, em que o ponto de partida e de chegada é o concreto, porém, com uma qualidade diferente, sendo o ponto de partida o concreto sensorial, caótico, e o ponto de chegada um concreto pensado, generalizado.

Para que pudéssemos acompanhar o movimento de desenvolvimento do pensamento teórico dos professores, propusemos um experimento formativo no qual buscamos desencadear a atividade dos professores nos utilizando do recurso teórico-metodológico da Atividade Orientadora de Ensino. Assim, foram organizadas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem que buscaram no movimento, na atividade, na coletividade, colocar os professores diante da necessidade lógico-histórica do conceito desvelando sua essência.

Na análise dos dados da pesquisa, que se baseou nos conceitos de Isolado e episódios, trouxemos dados do Episódio “Jardins Egípcios” que está inserido no isolado “Movimento do pensamento teórico sobre frações”. Apesar de trazermos mais dados deste episódio, outros também foram referenciados, de modo que fosse possível acompanhar o movimento, pois, estão em íntima relação dialética.

Na análise dos dados que apresentamos neste artigo evidenciamos indícios do movimento do pensamento teórico dos professores mediado pelo

conceito de fração, em particular de fração equivalente. Se, no início, para apresentar o conceito de fração equivalente os professores se limitavam à regra mecanizada e cristalizada: multiplica numerador e denominador pelo mesmo valor; após o experimento, os professores identificaram a importância de apresentar o conceito com todas as relações aparentes e as não aparentes, externas e internas, envolvendo principalmente a relação dialética entre a representação aritmética, algébrica e geométrica usando os princípios da multiplicidade e divisibilidade.

Pelos dados analisados foi possível perceber mudanças na forma como os professores passaram a definir o conceito de fração equivalente: não recorrendo mais a exemplos, fossem gráficos ou por meio de modelos pré-definidos, mas sim, fazendo referência a aspectos essenciais conceito, como multiplicidade e divisibilidade, perpassando a generalização proporcional. Assim, os professores demonstraram que passar a pensar sobre situações envolvendo frações equivalentes não mais por meio de ações empíricas ou métodos cristalizados, mas mediados pelo conceito, próprio do pensamento teórico.

Nesse processo, ao longo do experimento formativo, os professores puderam seguir o percurso concreto-abstrato-concreto, em que o ponto de partida é o concreto sensorial aparente e caótico, e o ponto de chegada é o concreto real e pensado. O concreto sensorial se deu no momento em que os professores procuravam cobrir o terreno com a parte inteira da grama, e perceberam não ser possível. No movimento de redução, do concreto ao abstrato, os professores, em atividade, buscaram medidas intermediárias de área da grama, de modo que fosse possível cobrir o terreno com uma quantidade exata. A abstração se deu quando os professores perceberam que existiam diferentes formas de representar a relação entre as grandezas (grama e terreno), por meio de unidades k intermediárias. Mediante a abstração e pela inter-relação da representação aritmética, algébrica e geométrica, generalizaram o conceito, conforme descrito por Caraça (1989). Por fim, já no movimento de ascensão, mediada pela generalização, retornaram ao concreto compreendendo as relações de divisibilidade e multiplicidade e, reconhecendo

k como unidade de transformação das frações equivalentes.

A análise do movimento de desenvolvimento do pensamento teórico, apresentada nesse artigo, reforça a importância de que a formação de professores, inicial e/ou continuada, viabilize aos docentes a compreensão da necessidade de se entender o conceito a ser ensinado na sua gênese, na sua essência. Neste contexto, os professores, munidos do pensamento teórico, conseguem escolher instrumentos mediadores coerentes com uma organização do ensino que promova a superação de formas cristalizadas de uso de algoritmos o que permite a produção de um conhecimento teórico e significado junto aos seus alunos.

6 Referências

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

DAMAZIO, A; ROSA, J. E; CARDOSO, E. F. M. Processo de apropriação do conceito de número por estudantes do segundo ano do Ensino Fundamental com base no Ensino Desenvolvimental. *Teoria da Atividade de estudos: Livro II: contribuições de pesquisadores brasileiros e estrangeiros*. Uberlândia-MG: EDUFU. 2019. p. 97-127. DOI: <https://doi.org/10.14393/EDUFU-978-85-7078-506-0>.

DAVÍDOV, V. V. *Tipos de generalización em la enseñanza*. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo Y Educación, 1982.

DAVIDOV, V.V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscu: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V; MÁRKOVA, A. La concepcion de la actividad de estudio de los escolares. In: DAVÍDOV, V. V; SHUARE, M. *La psicología evolutiva y pedagogía en la URSS: Antología*. Moscú: Editorial Progreso, 1987. p. 316-336.

DIAS, M. S. *Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva histórico-cultural*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2007. <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10102007-145627/pt-br.php>.

FREITAS, D. *O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração*. Dissertação (Mestrado). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma. Santa Catarina, 2016. <http://repositorio.unesc.net/handle/1/3957>.

KOPNIN, P. V. *Lógica Dialética*. México: Editorial Grijalbo S.A., 1978.

LEONTIEV, A. *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte, 1978. P. 261-284.

LEONTIEV, A. N. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VIGOTSKII, L. S; LURIA, A. R; LEONTIEV, A.N. *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo, 1988. Página: 59-83.

LEONTIEV, A. N. *Actividad, Conciencia, Personalidad*. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo Y Educación, 1983.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. The learning process in the school and the formation of teachers in the perspective of. *Educar em Revista*, n. 24, p. 113-147, 2004. <https://www.scielo.br/pdf/er/n24/n24a06.pdf>.

MORETTI, V. D. *Professores de matemática em atividade de ensino: Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente*. 2007. 206 f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo, SP, 2007. <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05102007-153534/pt-br.php>.

MORETTI, V. D. *O problema lógico-histórico: aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática*. Poiésis, Tubarão, número especial, p.29-44, jan./jun. 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.19177/prppge.v8e0201429-44>.

MOURA, M. O. et al. *Controle da variação de quantidades: atividades de ensino*. São Paulo: Feusp, 1996.

MOURA, M. O. *O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública*. Tese (Livre Docência em Metodologia do Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOURA, M. O. et al. *Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem*. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 81-109, jan/abr. 2010. DOI: <http://dx.doi.org/10.7213/rde.v10i29.3094>.

PUENTES, R. V; LONGAREZI, A. M. Sistemas didáticos desenvolvimentais: precisões conceituais, metodológicas e tipológicas. *Obutchénie*. Revista de didática e psicologia pedagógica. Uberlândia-MG, vol. 4, n. 1, p. 201-242, jan./abr., 2020. DOI: <https://doi.org/10.14393/OBv4n1.a2020-57369>.

ROSA, J. E. *Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas*. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012. URI: <https://hdl.handle.net/1884/27054>.

ROSA, J. E. et al. Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural. *REVEMAT*. Florianópolis (SC), v. 08, Ed. Especial (dez.), p. 227-245, 2013. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp227>.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. 2ª ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2010.

VIRGENS, W. P. das. *Problemas Desencadeadores de Aprendizagem na Organização do Ensino: sentidos em movimento na formação de professores de matemática*. Tese [Doutorado]. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019. DOI: <https://doi.org/10.11606/T.48.2019.tde-03102019-120541>.

Recebido em fevereiro de 2021
Aprovado em abril de 2021