DAVID HILBERT E O AXIOMA DE ARQUIMEDES: ENTRE A GEOMETRIA E A FÍSICA

*Carlos Gustavo González**

Resumo

A relação entre geometria e física na obra de Hilbert é analisada através do caso do Axioma de Arquimedes. Começando com as questões geométricas e as formais, em particular a definição de modelos não arquimedeanos para provar a independência, passa-se logo à concepção de Hilbert da geometria como uma ciência empírica, para depois estudar a afirmação de Hilbert de que o Axioma de Arquimedes deve ser testado empiricamente. Nesse sentido, esse autor enuncia uma *formulação empírica* do axioma, a qual, segundo afirma, deveria ser submetida à experimentação. Tal enunciado coloca três tipos de questões. Primeiro, se é realmente um enunciado empírico ou se é um princípio metodológico que não pode ser testado. Segundo, se é uma interpretação adequada desse axioma. Por último, como poderiam ser idealizados testes a partir desse enunciado. Sendo as primeiras questões problemáticas, pior é o caso da terceira, pois resulta difícil conceber experimentos bem definidos nos quais a formulação empírica possa ser testada, diferente, por exemplo, do caso da medição dos ângulos de um triângulo entre três picos encomendada por Gauss. Na estudo da formulação empírica também são analisados os comentários de Leo Corry e de Michael Stöltzer sobre o assunto, resultando em questionamentos sobre sua adequação e verificabilidade. Além disso, é salientada a importância de diferenciar os conceitos de mensuração, próprio do Axioma de Arquimedes, e de continuidade no sentido definido por Dedekind, baseado fundamentalmente na crítica que Sommer faz a Hilbert.

Palavras-chave: Hilbert. Axioma de Arquimedes. Geometria. Física.

Abstract

The relationship between geometry and physics in the work of Hilbert is analyzed through the case of the axiom of Archimedes. Starting with geometrical and formal issues (in particular, the definition of non-Archimedean models used for proving

---

* Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência pela Unicamp. Professor no Instituto de Filosofia da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). *E-mail*: gonzalcg@gmail.com

its independence), following with Hilbert conception that the physics is an empirical science, finally it is studied the Hilbertian statement that the axiom must be empirically confirmed. In this sense, he conceives an *empirical statement* of the axiom which must be confirmed by experiment. This statement arises three kind of questions. First, whether it actually is an empirical statement or a methodological rule which is not able to test. Second, whether it is a suitable interpretation of the axiom. Third, how can be created tests in relation to the empirical statement. Besides the fact that the two initial questions are difficult, the case of the third is worst, because, as far as I know, nobody proposed such a test, i.e. how can be designed well defined experiments to confirm the empirical statement (different, for example, of the case of the measurement of the sum of the angles of a triangle, performed by Gauss). The criticisms of Leo Corry and Michael Stöltzer are analyzed too, in particular the questions about adequacy and verification of the empirical statement. Furthermore, it is emphasized the relevance of the distinction between the concepts of measurement, inherent to the Archimedean axiom, and the one of the continuity (in Dedekind's sense), based upon the criticism of Sommer on the *Foundations of Geometry* of Hilbert.

Keywords: Hilbert. Axiom of Archimedes. Geometry. Physics.

> O matemático viu-se assim compelido a ser um filósofo,
> pois de outra maneira deixaria de ser matemático.
> (DAVID HILBERT)

Introdução

David Hilbert foi um dos matemáticos mais importantes do final do século XIX e início do XX, visto frequentemente como a figura mais influente nesse campo entre 1900 e a ascensão do nazismo. O reconhecimento como protagonista da matemática mundial começa com a publicação da primeira edição do livro *Fundamentos da Geometria*, de 1899[1], no qual essa ciência é apresentada de maneira axiomática.

O trabalho de Hilbert não se limitou à matemática, pois também realizou importantes contribuições na física e na lógica. Além disso, por se ocupar com questões dos fundamentos das matemáticas, devido principalmente aos problemas decorrentes do surgimento de paradoxos, desenvolveu pesquisas

[1] HILBERT, 1899.

na filosofia da matemática. Por causa dessa diversidade de interesses, em vários casos podemos conceber um quadro geral de alguns problemas, não limitado a uma disciplina em particular. Nesse sentido, um dos axiomas que figuram no livro citado é discutido não somente no contexto puramente geométrico, mas segundo as suas implicações físicas e filosóficas.

A finalidade deste artigo é a análise do Axioma de Arquimedes na obra de Hilbert, abrangendo diversos tipos de problemas e tentando mostrar como, através do estudo desse tópico em particular, pode ser visto o desenvolvimento de alguns aspetos do pensamento desse autor com relação aos fundamentos da geometria e da física.

Na seção 1 são apresentadas as questões matemáticas básicas. Na seção 2, alguns problemas lógicos e conceituais. As relações entre geometria e física, segundo a concepção de Hilbert, aparecem nas seções 3 e 4, contendo essa última uma formulação empírica do Axioma de Arquimedes feita por Hilbert, a qual é avaliada na seção 5. O caminho da física-matemática e das físicas não-arquimedeanas é assinalado brevemente na seção 6, finalizando com as conclusões da seção 7.

1. Geometria e axiomas

Os sistemas axiomáticos da geometria

A apresentação axiomática da geometria começou 2300 anos atrás, quando um matemático de nome Euclides escreveu um dos livros mais publicados na história da humanidade, que leva por nome *Elementos*[2]. Nesse livro Euclides coloca uma série de princípios com a intenção de fazer um sistema dedutivo no qual todas as outras proposições deveriam ser dedutíveis a partir dos axiomas. Esses princípios estão divididos em dois grupos: os gerais, denominados "noções comuns" (κοιναὶ ἔννοιαι), e cinco enunciados específicos da geometria, chamados "postulados" (ἀιτήματα)[3]. Pretendia-se que esses enunciados fossem vistos imediatamente como verdadeiros e que os outros enunciados deduzidos deles herdariam essa verdade devido à correção dos métodos dedutivos.

---

[2] HEATH; HEIBERG, 1908.

[3] Cf. EUCLID. Hoje em dia o termo "axioma" é preferido pela maioria dos matemáticos, sendo usado "postulado" fundamentalmente por razões históricas.

O segundo postulado dos *Elementos* de Euclides expressa:

- Estender uma linha reta finita na mesma reta[4].

Ou seja, um segmento de reta pode ser estendido indefinidamente. A primeira noção intuitiva, porém incorreta, que podemos ter quando lemos o segundo postulado é que a reta é infinita e ilimitada, ou seja, que não podemos colocar um ponto na mesma direção que não possa ser alcançado pela prolongação do segmento. Já os antigos geômetras gregos perceberam que o segundo postulado de Euclides é insuficiente para estabelecer as propriedades métricas dos segmentos de reta, pois uma coisa é não poder alcançar um limite e uma outra coisa é poder ter uma medida tão grande como quisermos.

Para ver isso, suponha que nosso universo geométrico, onde nós podemos atuar, fica limitado ao intervalo aberto (0;1), não podendo chegar nunca nem ao 0 nem ao 1, sendo esses números limites que não podem ser alcançados dentro do intervalo. Nesse sentido, poderíamos sempre estender um segmento sobre a mesma linha reta sem alcançar nunca o extremo. Por exemplo, pensemos na sequência (1/2), (2/3), (3/4),... na qual os termos da forma ($n/(n+1)$) (para $n \in N$) estão tão próximos do 1 como quisermos, mas sem nunca alcançá-lo. De maneira metafórica podemos dizer que, para alguém que vive no universo do intervalo aberto (0;1), tanto o 0 como o 1 seriam limites inalcançáveis, de modo que qualquer segmento sempre poderia ser prolongado no sentido do 1 ou do 0. Com efeito, suponha que temos o segmento $[a,b] \subseteq (0;1)$. Então $[a,b]$ pode ser prolongado até $[(a,(b+1)/2]$, usando a média aritmética para obter um ponto intermediário entre b e 1. Entretanto, as medidas possíveis dentro desse intervalo são claramente menores que 1 e, portanto, nunca teríamos segmentos de medida 2 ou 3,5.

Nos *Fundamentos da geometria*[5], Hilbert recolhe o trabalho disperso de vários autores realizado durante o século XIX. Ele procede com maior rigor formal que Euclides e pretende eliminar totalmente as suposições implícitas, substituindo-as por axiomas específicos, divididos em cinco grupos. Para tanto, enuncia novos axiomas de ordem utilizando a relação “estar entre”,

---

[4] Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ› εὐθείας ἐκβαλῖεν. (EUCLID, 2007, p. 8).

[5] HILBERT, 1899

no grupo dois. Além disso, acrescenta todo um grupo de axiomas, o quarto, denominando-os "axiomas de congruência", com os quais estabelece várias propriedades métricas do espaço euclidiano. Por último, no grupo cinco, enuncia uma forma geométrica do Axioma de Arquimedes[6], o tema deste estudo.

1.2 Axioma de Arquimedes: forma geométrica

Na obra citada de Hilbert, o último grupo de axiomas da edição de 1899 está formado somente pelo Axioma de Arquimedes expressado nos seguintes termos:

***Axioma de Arquimedes* (versão geométrica):** Seja A_1 um ponto qualquer sobre uma linha reta entre dois pontos A e B escolhidos arbitrariamente. Considere agora os pontos $A_2, A_3, A_4, \ldots$ de modo que A_1 fica entre A e A_2, A_2 fica entre A_1 e A_3, A_3 fica entre A_2 e A_4 etc. Além disso, sejam os segmentos

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$$

todos congruentes entre si. Então, entre esta série de pontos, existe sempre um certo ponto An, tal que B fica entre A e A_n.

Em outras palavras, dados A,B e A_1:

Sempre podemos transladar o segmento AA_1 para ir além de B:

Ou seja, o ponto B fica entre A e A_5, o que também pode ser pensado como transladando consecutivamente o segmento AA_1 até superar o ponto B.

Se voltarmos a considerar o intervalo (0;1) como o nosso universo, vemos

---

[6] A denominação "Axioma de Arquimedes" é a mais usual hoje, mas, segundo (BOYER; MERZBACH, 1991, p. 90), "According to Archimedes, it was Eudoxus who provided the lemma that now bears Archimedes' name".

que o Axioma de Arquimedes é falso nele. Nesse sentido, suponhamos que o ponto *A* do enunciado do axioma é o 0,5, o *B* o 0,99 e o A_1 é 0,75. Então, o segmento tem uma medida de 0,25, de modo que não poderíamos desenhar porque ficaria fora do intervalo (0;1), já que 0,75+0,25=1 e o ponto 1 não pertence ao intervalo. Em outras palavras, as medidas habituais do universo (0;1) não são arquimedeanas[7].

1.3 Corpos ordenados e densidade

A estrutura algébrica típica que representa as propriedades das quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) no conjunto dos números racionais, Q, é o corpo ordenado[8], mas os números reais, R, e alguns outros conjuntos também podem servir de base para essa estrutura. Em qualquer corpo ordenado, entre dois elementos x e y, tais que $x<y$, existe sempre um outro elemento z tal que $x<z<y$. Essa propriedade foi estudada por Cantor, que usou a expressão "denso em si mesmo" para nomeá-la[9], apesar de conceitos intuitivos de densidade existirem praticamente desde o início da geometria. Em tal sentido, tanto Q como R são densos em si mesmos.

Além disso, Cantor estudou a propriedade Q ser denso em R: sejam $x,y \in R$, $x<y$: existe sempre um $q \in Q$ tal que $x<q<y$[10]. Para ter uma ideia intuitiva disso, consideremos o desenvolvimento decimal[11] de x e y: comparando os dígitos do desenvolvimento decimal de esquerda a direita, em alguma casa eles devem diferir, pois senão seriam o mesmo número. Então usamos a casa na qual eles diferem para inserir um número com um desenvolvimento decimal finito, ou seja, um racional. Como exemplo, suponha que temos 0,123457879… e 0,123467311…: eles diferem na quinta casa decimal. Qualquer número entre 57 e 67 fornece o intermediário procurado:

---

7 Tecnicamente falando, como o intervalo (0;1) é isomorfo a *R*, é possível redefinir as medidas para que sejam arquimedeanas.

8 BIRKHOFF .MACLANE, 1965, capítulo II.

9 O conceito "denso em si mesmo" é definido num contexto topológico (CANTOR, 1932, p. 228), mas depois aplicado aos racionais (DAUBEN, 1990, p. 190), relacionado ao conceito de "denso em todo lugar" (CANTOR, 1932, p. 304).

10 CANTOR, 1932, p. 310.

11 Para transformar essa ideia num argumento rigoroso, deveríamos considerar que um número real pode ter desenvolvimentos decimais diferentes.

por exemplo, 0,123460 sem mais dígitos está entre ambos. Curiosamente, essa propriedade de Q ser denso em R não se segue do fato de cada um desses conjuntos ser denso em si mesmo, mas ela é uma propriedade de R independente daquelas. Para poder discutir isso precisamos enunciar o Axioma de Arquimedes para corpos ordenados:

Axioma de Arquimedes **(versão para corpos ordenados):** Seja K um corpo ordenado e $x,y \in K$, $x,y>0$. Além disso, seja $Z \subseteq K$ o conjunto dos "inteiros de K". Então existe um $z \in Z$ tal que $z \cdot x > y$.[12]

A expressão Z são "os inteiros de K" significa que Z é um conjunto enumerável[13] previamente determinado, sem primeiro nem último elemento, $0 \in Z, 1 \in Z$ e discreto no sentido de que não existe elemento de Z entre z e $z+1$, para todo $z \in Z$. Em outras palavras, Z é um conjunto isomorfo aos inteiros que contém o 0 e o 1.

A partir daqui abreviaremos "Axioma de Arquimedes" como AA.

Comparando as duas versões do AA, vemos que o produto faz às vezes das translações sucessivas do segmento, como mostra a figura 1.

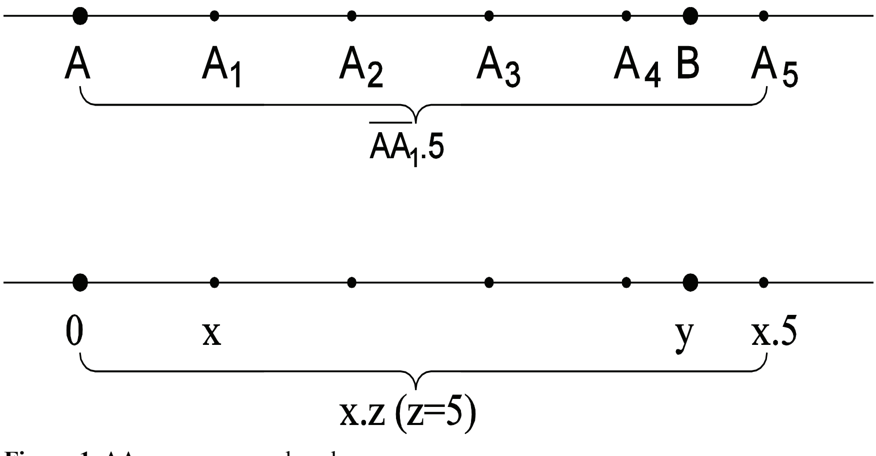

Figura 1: AA para corpos ordenados.

Se um corpo ordenado satisfaz o AA, é denominado arquimedeano e tem um subconjunto enumerável denso Q, ou seja, um conjunto Q isomorfo

[12] BIRKHOFF; MACLANE, 1965, p. 99.

[13] "Enumerável" significa que pode ser colocado em bijeção com N. Para os conceitos de teoria de conjuntos, (HRBACEK; JECH, 1999).

aos racionais Q, que é denso no corpo. De maneira geral, suponha que K é num corpo ordenado e que Z são os inteiros de K. Então temos a operação produto e para cada elemento $r \in K$, $r \neq 0$, temos o inverso multiplicativo. Suponha, além disso, que vale o seguinte:

Se $0 < r < s$, então $r^{-1} > s^{-1}$ (1)

Seja $r>0$. Pelo AA, para todo $r \in K$, existe $z \in Z$ tal que $z>r$ e, pela proposição (1). Usando isto, para cada $r \in K$, $r \neq 0$, podemos encontrar um "racional q de K" (ou seja, existem $z,z' \in Z$ tais que) entre 0 e r. Baseado nessa ideia, é geralmente demonstrado que entre dois números reais existe um racional (a densidade de Q em R), sob as mesmas hipóteses[14].

Suponha que consideramos um corpo ordenado K que não tem subconjunto enumerável denso. Então o AA não vale no modelo, com o qual são afetadas suas propriedades métricas do mesmo. Curiosamente, a existência de subconjunto enumerável denso está intimamente ligada às propriedades métricas.

1.4 Densidade, continuidade e o axioma de Arquimedes

Ao longo de várias edições, o corpo fundamental de axiomas dos *Fundamentos da geometria* teve poucas modificações[15]. Quando comparamos as edições de 1899 e a de 1903[16], percebemos duas diferenças significativas. A primeira é que o Teorema de Pasch, um dos axiomas de ordem, foi eliminado, pois pode ser deduzido a partir dos outros, fato que não altera o conjunto de teoremas deduzidos no sistema. A segunda é a adição do renomado Axioma de Completude. O problema que leva à adição do Axioma de Completude é mais sério. Segundo Rowe:

> the initial system of axioms that Hilbert presented in the 1899 edition of *Grundlagen der Geometrie* actually fails to characterize Euclidean geometry. The problem resides in the continuity axioms, or rather axiom, since initially Hilbert identified continuity with the axiom of Archimedes alone.[17]

---

[14] RUDIN, 1976, p. 9.
[15] TOEPELL, 2000.
[16] HILBERT, 1899, HILBERT, 1903.
[17] ROWE, 2000, p. 69.

Rowe tem como referência principal a crítica de Sommer. Com relação ao AA, Sommer afirma:

> While this formulation of the axiom enables us to define the equality of segments in the sense of general projective measurement, it does not involve the continuity of the straight line in the ordinary sense.[18]

Em outras palavras, a continuidade da linha reta, intuitivamente pensada com a ausência de buracos, não está implicada pelo AA. Nesse caso, Hilbert não teria cometido simplesmente um abuso da linguagem, por usar o termo "continuidade" de maneira imprópria (*It would be best to avoid in this connection the use of the term continuity altogether*[19]), mas teria pensado que o AA implicava a continuidade da linha reta, coisa que, segundo Sommer, não acontece:

> indeed, the axiom of Archimedes does not relieve us from the necessity of introducing explicitly an axiom of continuity.[20]

Para mostrar que o sistema de Hilbert de 1899 falha em caraterizar a continuidade, Sommer fornece um exemplo concreto:

> it would be impossible to decide geometrically whether a straight line that has some of its points within and some outside a circle will meet the circle; in other words, it remains undecided whether or not the circle is a closed figure.[21]

Para compreender essas modificações, devemos analisar algumas questões gerais envolvendo o conceito de continuidade.

Em primeiro lugar, se o conjunto dos números racionais Q é um conjunto denso e pode ser a base de um corpo ordenado: por que Q não é suficiente para ser a base da geometria? Por exemplo, por que o plano racional $Q \times Q$ não é suficiente para representar a geometria plana? Ou seja, por que $Q \times Q$ não é um modelo da geometria plana?

---

[18] SOMMER, 1900, p. 291.
[19] SOMMER, p. 291.
[20] SOMMER, p. 291.
[21] SOMMER, 1900, p. 291.

A resposta é bem conhecida desde a antiguidade, quando foi colocada na escola pitagórica a questão da "incomensurabilidade da diagonal e o lado do quadrado"[22]. Suponha que estamos fazendo geometria da maneira mais básica, usando somente compasso e régua sem marcas. Trabalhemos no plano $Q \times Q$ e com os instrumentos assinalados construamos um quadrado de lado 1. Colocamos a ponta fixa do compasso nas coordenadas (0;0) e a outra ponta no extremo da diagonal do quadrado, de modo que a medida do compasso seja a medida da diagonal. Com essa medida traçamos uma circunferência com raio r da medida da diagonal (ver figura 2). Pelo Teorema de Pitágoras $r^2 = 1^2 + 1^2$, e a circunferência tem raio $\sqrt{2}$ (raiz de dois), atravessando o eixo das abscissas nesse valor. Como $\sqrt{2}$ não é racional, o ponto $(\sqrt{2};0)$ não pertence ao plano $Q \times Q$, de modo que a circunferência atravessou o eixo das abscissas por um buraco. Esse fato é tradicionalmente visto como uma falha da continuidade dos racionais.

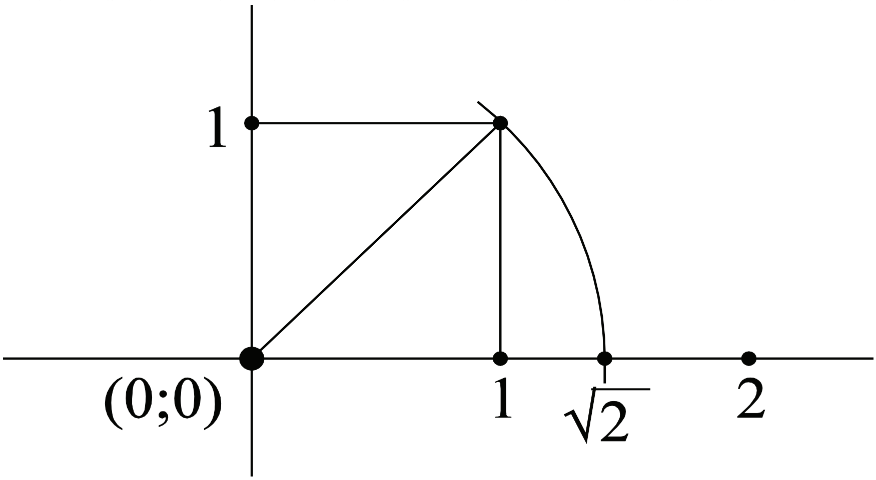

Figura 2: A diagonal do quadrado e a raiz de dois.

Voltando à crítica de Sommer, existe um modelo no qual todos os axiomas de 1899 são verdadeiros, mas que não tem o ponto $(\sqrt{2};0)$, de modo que, no exemplo acima, o arco de circunferência e o eixo das abscisas não tem um ponto em comum. Sommer conclui: "*Hilbert's system of axioms is not sufficient*." [23]

[22] BOYER; MERZBACH, 1991, p. 72-73.
[23] SOMMER, 1900, p. 291.

Sendo consciente de que o seu sistema geométrico falha ao tentar caracterizar a geometria euclidiana, Hilbert acrescenta na edição de 1903 o "Axioma de Completude", que estabelece que o domínio de interpretação deve ser o maior permitido pelos demais axiomas, colocado como último axioma do sistema, depois do AA, no grupo cinco. Esse axioma é "metateórico" no sentido que fala do sistema, e não dos objetos próprios da geometria, como pontos, retas ou planos. Uma alternativa é apresentada por Enriques, que coloca o axioma de continuidade de Cantor, o que resulta numa teoria equivalente[24].

Na realidade, para atender a crítica de Sommer e fazer que o sistema seja suficiente para o desenvolvimento da geometria euclidiana de régua e compasso, não são necessários axiomas tão fortes, como o de Completude ou o de continuidade de Cantor, que forçam que o domínio seja isomorfo aos números reais, pois seria suficiente o fechamento de Q para raízes quadradas[25]. O motivo para os *Fundamentos da geometria* incorporar uma noção forte de continuidade está na intenção de caracterizar também a geometria analítica: é a análise matemática a que precisa da totalidade do conjunto dos números reais e não a geometria básica da régua e o compasso.

Apesar da crítica de Sommer sobre o uso inadequado do termo "continuidade", Hilbert segue denominando o AA como um axioma de continuidade durante um longo período[26]. Como bem assinala Sommer acima, o AA não fala de continuidade. A confusão terminológica continua até hoje. Por exemplo, em muitos livros de texto é comum encontrar a oposição entre o discreto e o contínuo[27]. Se entendermos o termo "contínuo" no seu sentido próprio, essa oposição não é totalmente correta, pois o oposto do discreto é o denso. Nesse sentido, tanto R como Q (e muitos outros conjuntos) são densos. Por exemplo, o fato de que em R sempre existe um valor intermediário entre dois números quaisquer x e y não pressupõe necessariamente a continuidade de

---

[24] ENRIQUES, 1907, p. 36.

[25] O Teorema 7-1, p. 283, de Moise (1990) implica essa afirmação. Na página 271 é mostrado o que pode ser feito com régua e compasso.

[26] Por exemplo, no artigo *Nova fundamentação da matemática* (*Neubegründung der Mathematik*) de 1922 concebe como "os dois axiomas de continuidade" o AA e o de Completude: "die zwei Stetigkeitsaxiome, nämlich das Archimedische Axiom und das sogenannte Vollständigkeitsaxiom" (HILBERT, 1935b, p. 159).

[27] SCHEINERMAN, 2006.

R, mas simplesmente a densidade e coisas tão elementais como (x+y)/2, bem longe de conceitos como limites de sequências infinitas.

Entretanto, cabe assinalar que o AA tem uma relação formal com a continuidade, pois se no sistema dos *Fundamentos de Geometria* de 1899 for acrescentado um axioma forte de continuidade, por exemplo, expressando a continuidade em termos de cortes de Dedekind, então o AA torna-se desnecessário, pois pode ser deduzido.

Quando expressados em termos de sequências infinitas, a continuidade no sentido dedekindiano e a mensuração arquimedeana têm um certo sentido complementar. Para ver o problema da continuidade, suponha que temos uma sequência infinita $S = s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ crescente[28] e limitada no sentido de que nenhum elemento de *S* ultrapassa um certo valor fixo. Por exemplo, $S =$ (1/2), (2/3), (3/4), ..., $n/(n-1)$, ... Se *S* não fosse convergente (ou seja, se *S* não converge a um limite), então estaria faltando o limite da sequência. Podemos definir sequências de números racionais com as características acima que convergirem para √2 ou para π, de modo que, com a discussão anterior, essas sequências convergiriam para buracos de *Q*. Como no cálculo diferencial e integral as derivadas, integrais e muitas funções são definidas com o uso do limite, a inexistência de limites deixaria valores indefinidos em muitos casos. Por isso é que o cálculo precisa que toda sequência crescente e limitada seja convergente, tenha um valor no limite. Nesses termos, a continuidade pode ser expressada como "toda sequência enumerável crescente e limitada de racionais converge".

No outro sentido, o da mensurabilidade arquimedeana, em lugar de sequências definirem valores, todo número real deve poder ser definido por uma sequência enumerável de racionais. Ou seja, todo número real é o limite de uma sequência enumerável de racionais. Essa formulação expressa a essência da mensuração. Suponha que temos um segmento de comprimento π e queremos medi-lo. Dizer somente que o seu comprimento é π não diz nada sobre o seu valor, pois π é somente um nome (uma constante, do ponto de vista lógico). Entretanto, podemos nos aproximar por uma sequência de racionais: 3;3,1;3,14;3,141;3,1415;… Dessa maneira, a mensurabilidade arquimedeana pode ser expressa como: "todo número real é o limite de uma sequência enumerável de racionais".

---

[28] Ou seja: $s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n < ...$

2. Axioma de arquimedes: as questões formais

2.1 Independência do axioma de Arquimedes

Se estabelecermos o critério de que a apresentação axiomática de uma teoria deve ser o mais simples possível, então eliminar axiomas desnecessários resulta uma tarefa importante. Se um axioma é necessário, então não pode ser deduzido dos demais, fato que na terminologia técnica é expressado como *independência* do axioma com relação aos demais, dado um certo sistema axiomático. Nesse sentido, nos *Fundamentos da geometria,* Hilbert não se limita a deduzir enunciados geométricos, mas ocupa-se também com questões metateóricas. Em particular, a questão da independência dos axiomas foi cuidadosamente analisada. Em tal sentido, Majer afirma:

> First the question how to proof the dependence or independence of axioms and sentences from a given system of axioms was a logical mess before Hilbert had published *Grundlagen der Geometrie*. At least there existed no *systematic* treatment of the whole issue.[29]

No início do século XVII Descartes e Fermat deram origem à *geometria analítica*, estabelecendo uma ponte entre a geometria e a álgebra: curvas foram relacionadas a equações algébricas (e.g. a parábola e a equação de segundo grau), enunciados geométricos adquiriam uma forma algébrica etc.[30] Nos seus *Fundamentos da Geometria*, Hilbert vai mais longe, apresentando modelos de diferentes conjuntos de axiomas geométricos, utilizando principalmente corpos numéricos ordenados como base das interpretações. Como continua Majer, essa tarefa resultou num sistema axiomático muito mais elaborado:

> Second, once the issue of independence-proofs by *number field*s had been clarified sufficiently Hilbert could use the technique to improve the axiomatic representation of geometry step by step according to

[29] MAJER, 2006, p. 161.

[30] Entretanto, as apresentações da geometria que utilizam conceitos do conjunto dos números reais na exposição do sistema não acontece antes do trabalho de George David Birkhoff (não confundir com o seu filho Garrett).

> the three aims of simplicity, distinctness and completeness until an 'optimal' axiomatic presentation of geometry (relative to the criteria) had been found.[31]

Dessa maneira, Hilbert coloca como uma tarefa necessária a prova de independência do AA. Nesse sentido, Giuseppe Veronese já havia demonstrado a existência de corpos não arquimedeanos[32], mas Hilbert precisava de um trabalho mais prolixo e sistemático:

> Of course, he paid special attention to the role of continuity considerations and the possibility of proving that continuity is not a necessary feature of geometry. This latter fact was previously known, of course, from the works of Veronese, but Hilbert's study of non-Archimedean geometries appeared here as part of a more systematic and thorough approach.[33]

Hilbert apresenta uma prova de independência do AA. O modelo utilizado baseia-se num corpo ordenado não-arquimedeano[34] diferente do usado por Veronese.

Do ponto de vista epistemológico resulta curioso que para avaliar um axioma devamos determinar sua independência, a qual é estabelecida mostrando modelos nos quais *não vale* o axioma. Em nosso caso, a independência do AA levou à construção de certos corpos não-arquimedeanos. Se estabelecermos uma analogia com o axioma das paralelas de Euclides, o famoso quinto postulado, então percebemos o fato de que a investigação sobre esse axioma levou às geometrias não-euclidianas, nas quais ele não vale, geometrias que depois adquiriram um valor próprio e aplicações.

2.2 Densidade, infinitesimais e o axioma de Arquimedes

O conceito intuitivo de infinitesimal como algo "infinitamente pequeno" aparece no início do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, na própria obra de Newton. Entretanto, logo recebeu duras críticas como um

---

31 MAJER, 2006, p. 161.
32 VERONESE, 1894, p. 630.
33 CORRY, 2006, p. 143
34 HILBERT, 1899, p. 24-25.

conceito impreciso e até contraditório[35]. Com o processo denominado "aritmetização da análise", realizado fundamentalmente por Cauchy e Weierstrass no século XIX, esse conceito de infinitesimal foi eliminado, reconstruindo a análise matemática com o uso fundamental do conceito de limite.

Entretanto, no final do século XIX, o modelo não-arquimedeano de Veronese e o sistema dos número *p*-ádicos introduzidos por Hensel (HENSEL, 1897) geraram um novo conceito de infinitesimal. Em termos simples, uma negação do AA implica a existência de um elemento ω do corpo que não pode ser alcançado pela nossa medida. Por exemplo, nenhum número finito de translações do segmento medida pode superar ω, pelo qual poderíamos pensar ω como um "ponto no infinito", por mais que isso não seja totalmente correto porque poderia ser simplesmente alguma coisa muito parecida com um número real (e muito diferente, por exemplo, dos números infinitos de Cantor). Quando considerarmos conjuntamente esse número ω com o enunciado 1 da seção 1.3, temos que, para todo natural *n*:

Se $0 < n < \omega$, então $0 < \frac{1}{\omega} < \frac{1}{n}$

Em outras palavras, será maior que 0, mas menor que para qualquer natural *n*, pelo qual pode ser associado a algum sentido intuitivo de infinitesimal, enquanto ω seja associado a algum sentido intuitivo de infinito. Observemos também que entre 0 e não existe nenhum racional, perdendo a existência do subconjunto enumerável denso, uma outra maneira de dizer que não é arquimedeano. Entretanto, por ser um corpo ordenado temos:

$0 < \frac{1}{2\omega} < \frac{1}{\omega}$

obtendo dessa maneira uma quantidade infinita de tais infinitesimais.

O inverso do argumento também pode ser desenvolvido. Se existir um infinitesimal ε, tal que para todo natural *n*, $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$, então existe um elemento "no infinito" $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$, pois $\omega > n$ para todo natural *n*.

---

[35] Ver a famosa crítica de Berkeley em Berkeley (2004).

A análise não padrão de A. Robinson introduz infinitesimais usando o Teorema de Compacidade (ROBINSON, 1996). Gödel elogiou esse desenvolvimento como "a primeira teoria exata dos infinitesimais"[36]. O resultado é também um corpo não-arquimedeano.

Em síntese, a existência de objetos relacionados ao conceito de infinitesimal num corpo ordenado parece estar intimamente ligada ao conceito de corpo não-arquimedeano. A completação baseada nos racionais *p*-ádicos e outros corpos não-arquimedeanos também poderiam ser interpretados nesse sentido.

3. Geometria, física e o axioma de Arquimedes em Hilbert

3.1 Geometria e experiência

Para Hilbert, em 1881, a situação da matemática pura e da geometria são muito diferentes. Em particular, a geometria tem um fundamento empírico que não é compartilhado por algumas outras áreas das matemáticas:

> Geometry is the science that deals with the properties of space. It differs essentially from pure mathematical domains such as the theory of numbers, algebra, or the theory of functions. The results of the latter are obtained through pure thinking ... The situation is completely different in the case of geometry. I can never penetrate the properties of space by pure reflection, much as I can never recognize the basic laws of mechanics, the law of gravitation or any other physical law in this way. Space is not a product of my reflections. Rather, it is given to me through the senses.[37]

Portanto, Hilbert não considera que a geometria seja uma disciplina inteiramente formal, por mais que as questões lógicas e dedutivas ocupem um lugar de destaque nas pesquisas geométricas:

[36] "I think incoming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after the invention of the differential calculus". (GÖDEL, 1990, p. 311).

[37] CORRY, 2004, p. 84.

> Hilbert was deeply convinced (from the very beginning of his occupation with geometry) that geometry is a 'natural science', indeed the most fundamental of all natural sciences.[38]

3.2 Unidade metodológica da física e a geometria

Nas lições posteriores de Hilbert, realizadas em 1916-1917, a unidade das pesquisas físicas e geométricas é expressada claramente:

> In the past, physics adopted the conclusions of geometry without further ado. This was justified insofar as not only the rough, but also the finest physical facts confirmed those conclusions. This was also the case when Gauss measured the sum of angles in a triangle and found that it equals two right ones. That is no longer the case for the new physics. *Modern physics must draw geometry into the realm of its investigations.* This is logical and natural: every science grows like a tree, of which not only the branches continually expand, but also the roots penetrate deeper.[39]

Geometria e física não são mais domínios independentes, no sentido: o que o matemático faz, o físico aplica. O desenvolvimento da ciência criou novas condições, nas quais os fundamentos ("as raízes") matemáticas e lógicas devem ser considerados em conjunto com a folhagem da nova física.

O caso de Dedekind, que Hilbert cita, é uma analogia muito significativa. Depois da aritmetização da análise, devia ser colocado num novo contexto o conceito de continuidade. Assim como integrais e derivadas podiam ser agora expressas em termos de sequências, e por Cantor ter esclarecido o conceito de conjunto e as operações conjuntistas, agora os números reais podiam ser definidos como cortes num contexto de conjuntos de números ou como limites de sequências. Para realizar essa tarefa, Dedekind precisou analisar o conceito de continuidade à maneira de um filósofo, para depois poder realizar a definição matemática[40]. Nas palavras de Hilbert:

---

[38] MAJER, 2006, p. 164.
[39] CORRY, 2004, p. 379.
[40] DEDEKIND, 1932.

> Some decades ago [...]. The mathematician was thus compelled to become a philosopher, for otherwise he ceased to be a mathematician.[41]

Os fundamentos matemáticos da física estão agora em questão. A geometria e a física constituem uma unidade, sendo sua diferenciação "uma questão antropológica":

> The same happens now: *the physicist must become a geometer*, for otherwise he runs the risk of ceasing to be a physicist and vice versa. The separation of the sciences into professions and faculties is an anthropological one, and it is thus foreign to reality as such. For a natural phenomenon does not ask about itself whether it is the business of a physicist or of a mathematician. On these grounds we should not be allowed to simply accept the axioms of geometry. The latter might be the expression of certain facts of experience that further experiments would contradict.[42]

Nesse contexto, o problema da adequação empírica do AA adquire um novo caráter: não se trata de compatibilizá-lo com o espaço físico de maneira ingênua, mas de investigar os fundamentos geométricos da física. O trabalho do físico deve incluir a geometria, não como uma disciplina independente, à maneira que um físico estuda cálculo para depois aplicá-lo à física, mas de uma maneira integrada, como um *físico-matemático*, capaz de avaliar conjuntamente a física e a matemática das suas teorias.

3.3 A pesquisa empírica e o axioma de Arquimedes

O caráter empírico atribuído por Hilbert à geometria ainda está presente em 1918, pois no seu artigo *Pensamento axiomático* afirma que os axiomas matemáticos têm um sentido empírico. No caso do AA:

> O fato de que por composição de medidas terrestres podemos alcançar as dimensões e as medidas dos corpos do espaço cósmico, ou seja,

[41] CORRY, 2004, p. 379. Em HILBERT (2006, p. 167-168): Vor einigen Jahrzehnten […] Der Mathematiker wurde also gezwungen, Philosoph zu werden, weil er sonst aufhörte, Mathematiker zu sein.

[42] CORRY, 2004, p. 379.

> que com medidas terrestres resultem mensuráveis os corpos celestes, e também o fato de que as distâncias do interior do átomo possam ser expressadas em termos de metros, não é uma mera consequência de congruências de triângulos ou configurações geométricas, senão que é um resultado de pesquisas empíricas[43].

Como vimos, o AA estabelece que dado um segmento numa reta e um ponto positivo da mesma, por sucessivas translações do segmento, podemos ir além desse ponto. Pensando esse segmento como uma medida, uma régua unidade, então nenhum ponto estaria "longe demais" para ser alcançado pela nossa medida. Assim, por pequeno que for o nosso segmento (a nossa medida), ele seria suficiente para medir as maiores distâncias, como no exemplo das distâncias cosmológicas. Por outro lado, se pensarmos na proposição 1 da seção 1.3, usando o inverso multiplicativo, assim como podemos ter medidas m tão grandes como quisermos, teremos medidas tão pequenas como quisermos.

Do ponto de vista métrico, o espaço arquimedeano parece "bem comportado", no sentido de que não altera as medidas cada vez que é efetuada uma translação. Isso é o que acontece com o espaço euclidiano: por exemplo, transladando um quadrado os comprimentos dos lados, a área etc. permanecem invariantes. Noutras palavras, o quadrado original é congruente com o quadrado transladado. De maneira análoga ao famoso exemplo de Poincaré[44], se, pelo contrário, o espaço for "mal comportado", então poderia acontecer que a nossa medida física diminuísse por translações, sendo cada vez menor e tornando impossível medir objetos suficientemente distantes.

Uma ilustração imaginária pode esclarecer esse ponto. Suponha um pedreiro fazendo um piso num espaço arquimedeano como o euclidiano: ele tiraria uma peça quadrada da caixa e ela não mudaria de tamanho quando colocada no seu lugar definitivo. Imaginemos uma situação na qual isso não aconteça, ou seja, um espaço no qual as translações alteram as medidas: movimentando um segmento para uma das paredes, digamos a que fica no norte, ele diminuirá de tamanho: se um segmento tiver 20 cm quando estiver a uma distância de 1 m, ele terá 10 cm quando estiver a 0,5 m, 5 cm a 0,25

---

43 HILBERT, 1935a, p. 149.
44 POINCARÉ, 1905, p. 64-68.

m e assim proporcionalmente. Tirando uma peça da caixa e movimentando para essa parede, ela é deformada e fica menor, de modo que o pedreiro jamais terminaria seu trabalho. Se essa peça fosse a nossa medida, a nossa régua unidade, então nunca poderíamos medir a distância a essa parede. Se o espaço físico fosse assim, então poderia existir uma estrela na situação de nossa parede imaginária, de modo que a nossa medida não serviria para as distâncias estelares. Uma situação análoga poderia acontecer no sentido inverso: quando aproximamos coisas da parede sul, elas ficam maiores, de modo que nunca conseguiríamos medidas atômicas perto da parede sul: por pequena que seja nossa régua na origem, quando chegarmos à parede sul ela sempre seria grande demais e também seria grande demais qualquer subdivisão ou escala da régua.

Podemos agora interpretar a afirmação de Hilbert: as propriedades métricas da geometria e do corpo dos números reais não são consequências da congruência de triângulos ou as definições de figuras geométricas, mas são uma consequência de pesquisas empíricas que determinaram quais são as propriedades métricas do espaço físico. Dessa maneira, as considerações lógicas, como a independência, apesar de importantes, não são suficientes, pois, por tentar esta unificação metodológica da geometria e da física, Hilbert coloca um critério empírico valendo para ambas. Por essa razão, o AA também precisa de uma confirmação empírica:

> A validade do AA requer também uma confirmação experimental, da mesma maneira que a requer a proposição sobre a soma dos ângulos de um triângulo, no sentido conhecido.[45]

Pedir uma confirmação empírica de um axioma geométrico, ou seja, pesquisar se um axioma geométrico é verdadeiro ou falso, implica investigar *propriedades geométricas do espaço físico*, para determinar qual de diferentes opções geométricas coincide com a realidade física: nesse caso o problema consiste em pesquisar se o espaço físico é ou não arquimedeano. Esse tipo de questões começou no século XIX pelos desenvolvimentos das geometrias não-euclidianas:

[45] HILBERT, 1935a, p. 149.

> Non-Euclidean geometry in general and Riemann's work in particular brought an entirely new question in its train; the question, namely, which one of the abstractly conceivable geometries is actually realized in physical space.[46]

Na literatura é discutido o fato de Gauss encomendar a medição dos ângulos de um triângulo formado por três picos perto de Hanôver[47], para tentar determinar a verdade ou falsidade do quinto postulado. Hilbert colocou esse tipo de questão sobre o AA ao mesmo nível que o problema das geometrias não-euclidianas, quando fez referência à soma dos ângulos de um triângulo.

4 A formulação empírica do axioma de Arquimedes

4.1 O enunciado da formulação empírica

O problema consiste, então, em como dar um sentido empírico ao AA. Contudo, esse axioma parece fazer um apelo intuitivo ao infinito, de modo que deveria ser reformulado para estabelecer de maneira empírica essa constância da medida. Pelo raciocínio envolvido na proposição 1 da seção 1.3, enquanto o AA nos permite alcançar qualquer ponto da reta transladando o segmento medida, também nos permite determinar medidas suficientemente pequenas como para caber em qualquer intervalo. Num corpo ordenado que não vale o AA poderia acontecer de existir um intervalo $[x, y]$ tal que não poderíamos medir no seu interior, pois a nossa medida seria grande demais para isso. Com o AA, entre dois números reais quaisquer, não somente existe *um* número racional, mas *uma infinidade* deles. Sem o axioma, pode existir um intervalo de modo que não exista nenhum racional q tal que $x < q < y$. Enquanto o axioma possibilita criar distâncias tão grandes como quisermos com n repetições da medida, podemos usar o inverso multiplicativo para definir distâncias tão pequenas quanto quisermos, de modo que dado qualquer intervalo $[x, y]$ podemos encontrar um segmento fração da medida suficientemente pequeno $[r, s]$ de modo que $x < r < s < y$. Provavelmente, Hilbert refere-se a esses intervalos $[r, s]$ quando fala de "pequenas regiões":

[46] CARRIER, 1994, p. 277.
[47] GRAY, 2006.

> Em geral, eu poderia formular o Axioma de Continuidade na física como segue: "Se para a validade de um enunciado físico é prescrito um grau qualquer de precisão (*Genauigkeitsgrad*) podem ser determinadas pequenas regiões dentro das quais as pressuposições feitas para esse enunciado podem variar livremente, sem que o desvio do enunciado exceda o grau de precisão prescrito."[48]

O enunciado acima será denominado "formulação empírica" do AA.

4.2 Questões colocadas pela formulação empírica

De maneira geral, a formulação empírica coloca três questões:

1. É uma proposição empírica ou é um princípio metodológico que não pode ser testado?
2. É uma reformulação aceitável do AA?
3. É um enunciado empiricamente verdadeiro ou confirmado empiricamente?

A primeira questão implica duas interpretações possíveis. Na interpretação metodológica, a formulação empírica conduziria a uma prescrição do tipo: "faça as coisas de tal e tal maneira". Na segunda interpretação, esse enunciado deveria ter consequências que pudessem ser testadas na base da experiência, tendo como resultado a sua verdade ou a sua falsidade. Os dois caminhos são divergentes, pois enquanto o ponto de vista metodológico derivaria numa discussão epistemológica e lógica sobre se na ciência as coisas devem ser feitas de tal ou de tal outra maneira, a segunda interpretação nos levaria diretamente à questão 3, a qual não faz sentido se adotarmos a interpretação metodológica.

A segunda questão implica uma certa exegese do texto hilbertiano para poder estabelecer correspondências entre o axioma geométrico e a reformulação empírica. Se compararmos com o quinto postulado, as versões comuns falam de paralelas e de retas que são estendidas indefinidamente, o que é difícil de fazer corresponder a situações empíricas. Entretanto, como o resultado da soma dos ângulos de um triângulo depende do quinto postulado, existem enunciados do tipo "a soma dos ângulos interiores de

48 HILBERT, 1935a, p. 150.

um triângulo é igual a 180 graus" com os quais parece fácil estabelecer correspondentes empíricos.

A terceira questão implica que temos as respostas convenientes das questões 1 e 2: a formulação empírica é um enunciado empírico e uma reformulação aceitável do AA na física. Deveríamos, na base disso, idealizar um procedimento de teste que produza enunciados observacionais que possam ser verificados ou falsificados.

4.3 Considerações metodológicas

Analisemos agora a primeira das questões: se a formulação empírica é ou não uma prescrição metodológica e, como tal, não passível de confirmação empírica, pois seria somente uma série de regras a serem seguidas.

Esse sentido estaria mais perto da afirmação de Hilbert:

> Este axioma fundamentalmente expressa somente algo que está imediatamente na essência do experimento e que é constantemente pressuposto pelos físicos, apesar de que até agora não foi especificamente formulado.[49]

O termo "pressuposto" (*angenommen*) herda a ambiguidade discutida: se a formulação empírica é simplesmente uma hipótese, então deveria ser testada como qualquer outra hipótese de uma teoria física. Entretanto, a expressão "está imediatamente na essência do experimento" pode ser interpretada numa outra direção, no sentido de que, ao abandonarmos esse enunciado, enfrentaríamos o conceito de experimento e os seus pressupostos metodológicos, estando em contradição com pretender que tenha "confirmação experimental" (*Bestätigung durch das Experiment*[50]), como na citação da seção 3.3.

---

[49] This axiom basically does nothing more than express something that already lies in the essence of experiment; it is constantly presupposed by the physicists, although it has not previously been formulated., (EWALD, 1996, p. 1110). Dies Axiom bringt im Grunde nur zum Ausdruck, was unmittelbar im Wesen des Experimentes liegt; es ist stets von den Physikern angenommen worden, ohne daß es bisher besonders formuliert worden ist. (HILBERT, 1935a, p. 150).

[50] Ver nota 44.

Num sentido mais geral, testar qualquer enunciado no qual o conceito de mensuração tenha um papel essencial, ou incluso no caso que esse conceito seja questionado, implica fazer uma clara distinção entre as questões metodológicas envolvidas e os resultados empíricos esperados, sob pena de elaborar um discurso confuso e enunciados ambíguos se esse tipo de distinção não for feito.

5. Avaliação da formulação empírica

5.1 Comparação do axioma de Arquimedes com a formulação empírica

A segunda questão, se a formulação empírica é ou não uma versão aceitável do AA, precisa de uma interpretação minuciosa do texto.

A correspondência das formas geométrica e empírica é questionada por Leo Corry:

> Of course there are many important differences between the Archimedean axiom and the one formulated here for physical theories, but Hilbert seems to have preferred stressing the similarity rather than sharpening these differences.[51]

Numa primeira tentativa nesse sentido, a interpretação empírica pode significar que o grau de precisão seja entendido como um intervalo real. Se não valer o AA, então poderia acontecer de não termos medidas tão pequenas que caiba nesse intervalo, de modo que, ao mudar alguma variável (*pressuposição*) dentro da precisão prescrita, o enunciado ficaria fora do intervalo. Por outro lado, se valer o Axioma, então teríamos medidas tão pequenas (como o acima) que o desvio do enunciado ficaria sempre dentro do grau de precisão. Essa interpretação não parece facilmente relacionável com o AA.

Uma segunda tentativa de interpretação é considerar que o AA (junto com outras suposições) tem como consequência que todo número real é o limite de uma sequência enumerável de racionais. Se assumirmos que as nossas medidas correspondem a um conjunto finito de números racionais, então elas podem se aproximar sucessivamente a um valor que seja um

[51] CORRY, 2004, p. 141.

número real, que seria o limite de uma sequência *infinita* de racionais, mas cujos valores iniciais são fornecidos pelas mensurações. Essa interpretação está de alguma maneira relacionada com a mensuração arquimedeana expressada em termos de sequências[52], pois estaria afirmando que não existem valores que não sejam limites de sequências de racionais.

5.2 O problema da avaliação empírica

A terceira questão colocada, se a formulação empírica é ou não verificada empiricamente, tem como pressuposto considerar se ela tem ou não consequências que podem ser determinadas verdadeiras ou falsas observacionalmente.

Analisando esse problema com um pouco mais de detalhe, pode acontecer que, em determinadas circunstâncias e do ponto de vista prático, ele não tenha uma grande importância. Num corpo ordenado no qual não valha o AA, poderia acontecer de haver um elemento cuja aproximação não possa ser tão pequena como quisermos. Denominemos esse limite de ε, pensado como um infinitesimal. Então temos um elemento x tal que nossas medidas não podem se aproximar dentro do intervalo, ou seja, não existem racionais nesse intervalo. Esse fato estaria de acordo com a formulação empírica. Entretanto, como nossas mensurações empregam somente um conjunto *finito* de racionais, os valores que aproximam efetivamente x e os valores que aproximam o intervalo seriam os mesmos, de modo que não teríamos teste empírico para determinar a diferença.

Lembremos que um questionamento para a expressão "um grau arbitrário de precisão" era que as medições efetivamente realizadas baseiam-se sempre num conjunto finito de racionais e não vão além do limite de precisão dos instrumentos. Entretanto, se extrapolarmos esse procedimento ao limite, temos então duas possibilidades. A primeira, que a precisão não tenha nenhum limite pré-estabelecido e sempre possa ser alcançada uma maior precisão. Em tal caso, teríamos um limite de uma sequência enumerável, ou seja, uma aplicação do AA. Na segunda, a precisão teria um limite pré-estabelecido além do qual não poderia avançar, parando sempre num número finito de racionais.

Entretanto, ainda no caso de que a sequência de medições sucessivas

---

52 Ver seção 1.4.

seja a parte inicial de uma sequência infinita que tem limite, podemos nos perguntar qual é a importância da existência desse limite. Nesse sentido, a posição de alguns físicos é que esse limite é uma espécie de elemento ideal, sem interesse na física:

> Zel'dovich answered in this way: We are always interested only in ratios of finite increments, and never in any abstract mathematical limit.[53]

5.3 Continuidade e mensuração arquimedeana

O fato de Hilbert ter denominado em conjunto os axiomas de Arquimedes e de Completude como "axiomas de continuidade" gera problemas quando realizamos interpretações históricas que tenham como finalidade diferenciar claramente os dois procedimentos.

Por exemplo, com relação às lições de Hilbert de 1905, Corry afirma:

> The sixth axiom, the axiom of continuity, plays a very central role in Hilbert's overall conception of the axiomatization of natural science — geometry, of course, included. It is part of the essence of things — Hilbert said in his lecture — that the axiom of continuity should appear in every geometrical or physical system. Therefore it can be formulated not just with reference to a specific domain, as was the case here for vector addition, but in a much more general way. A very similar opinion had been advanced by Hertz, as we saw, who described continuity as "an experience of the most general kind," and who saw it as a very basic assumption of all physical science. Boltzmann, in his 1897 textbook, had also pointed out the continuity of motion as the first basic assumption of mechanics, which in turn should provide the basis for all of physical science.[54]

A "continuidade do movimento" pode ser entendida em termos simples de densidade, como um movimento suave. Também pode ser entendida como continuidade no sentido estrito, de não ter buracos com valores indefinidos.

---

[53] ARNOLD, 2005, p. 226.
[54] CORRY, 2004, p. 140.

Por outro lado, a expressão "uma suposição muito básica de toda a ciência física" parece indicar um pressuposto que não pode ser testado, talvez funcionando como um princípio metodológico.

5.4 A crítica de Michael Stöltzner

No seu artigo Stöltzner analisa a terceira questão:

> Unfortunately, Hilbert's axiom of measurement is at the same time too deep to be suitable for any specific physical theory and too restrictive because it *a priori* excludes chaotic systems.[55]

E continua analisando duas possíveis interpretações. Em primeiro lugar:

> If we interpret the term proposition as the value ascription in a measurement "*F* has value *f*" the axiom is just fine and expresses the continuity presupposed when reading the pointer of a measurement device.[56]

A primeira interpretação de Stöltzner refere-se à existência do valor. Naturalmente, se supussermos continuidade no sentido estrito do termo, então toda sequência limitada de racionais tem limite[57], o que determina a existência, para a função matemática *F*, do valor numérico *f*. Contudo, aqui pode existir uma confusão terminológica causada pelo uso de Hilbert do termo "continuidade" com referência ao AA. Com efeito, não parece que Stöltzner está falando de aproximações, mas de existência de valores os quais, por serem limites, têm muito mais a ver com a continuidade no sentido estrito que com a mensuração arquimedeana.

Além disso, notemos que essa continuidade está *pressuposta* no texto. Em tal sentido, nos caberia perguntar se ela tem sentido empírico, ou se é um pressuposto metodológico, ou ainda um pressuposto metafísico, como foi especificado acima. Em princípio, se esse enunciado tem sentido empírico, caberia esperar que alguma possível observação o refutasse, mas é

---

[55] STÖLTZNER, 2002, p. 259.
[56] *Ibidem*, p. 259.
[57] Ver seção 1.4.

difícil especificar alguma observação do tipo: será que o ponteiro comete saltos inexplicáveis? Será que o ponteiro fica impossibilitado de se mover? Incluso no caso que alguma coisa dê indiscutivelmente errada: Por que questionaríamos a continuidade e não as teorias físicas envolvidas? Temos aqui complexos problemas da relação entre ciência empírica e matemática.

Analisando o texto num outro sentido, devemos voltar à diferença entre continuidade e densidade. Se a referência for somente à existência de valores intermediários, a um deslocamento "suave" (*smooth*) do ponteiro, coisas tão sofisticadas como limites de sequências poderão ser substituídas pelo elementar da densidade para encontrar valores intermediários entre x e y.

Contudo, não parece que sejam necessárias pressuposições tão fortes como densidade ou continuidade para determinar a situação descrita por Stöltzner. Com efeito, toda medição implica um número máximo de algarismos significativos e, portanto um conjunto finito de racionais, de modo que a medição está longe de pressupor densidade ou continuidade. No máximo, implicaria uma forma finita de densidade, no sentido de que podemos nos aproximar da precisão dentro de certos limites.

Stöltzner continua:

> but if we are interested in propositions like "*F* remains within the range *for all times*" the axiom excludes chaotic systems for which there exists a time at which they leave any region even for the slightest variation of the "presuppositions."[58]

Na segunda interpretação, Stöltzner está mais perto de conceber a formulação física de Hilbert com relação à mensuração, ou seja, com o AA em sentido estrito, pois esse axioma é o que garante a existência de um valor dentro de um intervalo pré-estabelecido, como o intervalo acima (ver seção 4.1), ou seja, a existência de valores mensuráveis suficientemente pequenos como para ficar dentro do intervalo pré-estabelecido. No contexto desta discussão, o recurso à teoria do caos é, de uma certa maneira, inesperado. Stöltzner parece ser consciente disso, quando afirma:

---

[58] STÖLTZNER, 2002, p. 259.

> To be sure, experiments with chaotic systems have their peculiarities, but it appears to me unwise to exclude them *a priori*.[59]

Entretanto, em muitos desenvolvimentos epistemológicos atuais[60], um único experimento falho está longe de acabar de vez com a teoria que está testando, sem a necessidade de recorrer à teoria do caos. Dessa maneira, se acontecer o evento extremamente improvável de uma mensuração ficar fora da escala pré-estabelecida, ele é um bom candidato a ser simplesmente desconsiderado. A outra alternativa usual terminaria com a rejeição da teoria física.

Como conclusão da análise de Stöltzner, temos que, por um lado, a primeira interpretação da formulação empírica de Hilbert é um pressuposto e, como tal, não pode ter uma validação empírica. Por outro lado, na segunda interpretação, essa formulação pode ser rejeitada na base da evidência empírica, se consideramos a teoria do caos.

5.5 Síntese dos resultados da avaliação empírica

Ainda se deixarmos de lado as interpretações que resultam na consideração de que a formulação empírica é um princípio metodológico, não fica claro de que maneira possa ser deduzida do seu enunciado uma proposição de observação que possa ser imediatamente contrastada na experiência. Além disso, o autor desconhece proposições de observação deduzidas da formulação empírica existentes na literatura.

Nesse caminho, a proposta de Hilbert de avaliação empírica dificilmente será concretizada. Historicamente, a formulação empírica não deu lugar a testes, ao contrário do que aconteceu, por exemplo, com as interpretações empíricas do postulado das paralelas.

Também não fica nada claro como poderíamos elaborar alternativas à proposta hilbertiana. O conceito de repetir um número finito, mas não previamente limitado, de vezes dificulta a invenção de procedimentos de testes. Por outra parte, a negação do axioma parece ter implícita alguma noção de infinito. Tampouco foi assinalado pelos autores estudados nenhum

---

[59] STÖLTZNER, 2002, p. 259.

[60] Poderíamos citar autores com Thomas Kuhn e Imre Lakatos.

teorema que não possa ser deduzido dos outros axiomas e que seja passível de contrastação empírica, ao contrário do teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo com relação ao quinto postulado.

Em geral, podemos considerar que não temos uma resposta satisfatória com relação à avaliação empírica do AA.

6. Além do axioma de Arquimedes

A posição de Hilbert, como visto acima, é que a geometria Euclidiana, incluindo o quinto postulado e o AA, corresponde com à nossa experiência:

> Hilbert plainly declared that Euclidean geometry – as defined by his systems of axioms – is the one and only geometry that fits our spatial experience, though in his opinion, it would not be the role of mathematics or logic to explain why this is so.[61]

Entretanto, Hilbert está longe de rejeitar de maneira absoluta geometrias que negarem o AA.

6.1 Geometrias e teorias físicas não arquimedeanas

O fato de Hilbert considerar que a geometria euclidiana-arquimedeana corresponde à estrutura do espaço físico e que, por esse motivo, deva aparecer em toda teoria que possua uma visão geral do espaço físico, não impede outros usos da teoria. Axiomatizar uma teoria matemática consiste em esclarecer as relações dedutivas pelo uso de uma concepção mais abstrata. Dessa maneira, todo "domínio de objetos" que satisfizer as relações descritas pelos axiomas, deverá também satisfazer os teoremas. Nesse sentido, Corry afirma:

> Hilbert also referred explicitly to the status of those theories that, like non-Euclidean and non-Archimedean geometries, are created arbitrarily through the purely logical procedure of setting down a system of independent and consistent axioms. These theories, he

[61] CORRY, 2007, p. 782.

> said, can be applied to any objects that satisfy the axioms. For instance, non-Euclidean geometries are useful to describe the paths of light in the atmosphere under the influence of varying densities and diffraction coefficients.[62]

Um outro problema já fora assinalado por Riemann como um limite para a aplicação de uma correspondência entre física e geometria:

> La idea de que la geometría del espacio físico pudiera depender de las fuerzas de la naturaleza ya había sido expresada por Riemann. Como agudamente señala: “Los conceptos empíricos en que se fundan las determinaciones métricas del espacio, a saber, los conceptos de cuerpo sólido y de rayo de luz, pierden aparentemente su validez en lo infinitamente pequeño. Cabe pensar por lo tanto que las relaciones métricas del espacio en lo infinitamente pequeño no se ajustan a los supuestos de la geometría [tradicional], y esto es algo que, en efecto, habría que admitir si ello permitiese explicar los fenómenos de manera más simple”.[63]

Na realidade, não é preciso ir até o “infinitamente pequeno” para que a geometria não possa ser aplicada da maneira tradicional a corpos sólidos e raios de luz, pois na escala subatômica essas correspondências perdem a sua validade. Poderíamos atualizar a afirmação de Riemann simplesmente dizendo que numa escala suficientemente pequena, já não estamos mais amarrados às interpretações da geometria convencional, arquimedeana, de modo que, se encontrarmos uma outra geometria que sirva de base para uma física que possa explicar melhor os fenômenos, devemos aceitar essa geometria, da mesma maneira que a Teoria Geral da Relatividade aceitou a geometria do próprio Riemann. Do ponto de vista matemático, ao perder o caráter arquimedeano

[62] CORRY, 2007, p. 783.

[63] TORRETTI, 1994, p.165. O texto original de Riemann é: *Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Korpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der that annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen*. DEDEKIND; WEBER, 1876, p. 267.

realizamos uma modificação substancial no sistema de medidas, pela qual elas já não podem ser entendidas no sentido clássico. Entretanto, fica em aberto a possibilidade de outros tipos de medidas.

Voltando para a análise de Leo Corry, vemos que Hilbert considera a possibilidade de uma "física não arquimedeana":

> As a point of interest, he [Hilbert] suggested that from a strictly mathematical point of view, it would be possible to conceive interesting systems of physical axioms that do without continuity, that is, axioms that define a kind of "non-Archimedean physics." He did not consider such systems here, however, since the task was to see how the ideas and methods of axiomatics can be fruitfully applied to physics.[64]

Em consistência com essa visão, David Rowe propôs que as pesquisas geométricas realizadas por Hilbert sobre o AA vão além das questões puramente formais:

> Thus, Hilbert's main objective in *Grundlagen der Geometrie* had nothing to do with proving the consistency of the standard Euclidean geometry based on the real number continuum since that particular geometry plays no direct role in his theory. His aim was rather to explore the possibilities for building up various geometries on foundations that did not require the axiom of Archimedes. He wanted to show how such geometries could be arithmetized rigorously; consistency was just one of the payoffs, an immediate consequence of arithmetization. Presumably, he attached far more significance to showing the relative independence of his various groups of axioms, thereby establishing the logical status of the axioms for congruence, continuity, and parallelism.[65]

Esse poderia ser o motivo pelo qual o desenvolvimento cuidadoso da geometria e das demonstrações de independência parecem ir além do requerido por um interesse puramente geométrico.

---

[64] CORRY, 2004, p. 141.
[65] ROWE, 2000, p.70.

Hilbert não aplica o método axiomático para obter físicas não-arquimedeanas, porque está interessado na axiomatização das teorias físicas existentes[66]. Entretanto, o método axiomático em física, somado à existência de modelos geométricos não arquimedeanos, abre a possibilidade de um estudo de físicas não-arquimedeanas:

> But the possibility suggested here, of examining model of theories that preserve the basic logical structure of classical physics, except for a particular feature, opens the way to the introduction and systematic analysis of alternative theories, close enough to the existing ones in relevant respects. Hilbert's future works on physics, and in particular his work on general relativity, would rely on the actualization of this possibility.[67]

Os estudos de Hilbert sobre a Teoria Geral da Relatividade seguramente influenciaram uma posição mais abstrata dos possíveis usos da geometria, que parece incrivelmente moderna, pois a pesquisa física atual pensa em grande parte dessa maneira: diversas estruturas matemáticas, grupos, espaços ultramétricos, cálculo de variedades etc. e até corpos não-arquimedeanos são aplicados em diferentes pesquisas da física atual.

Os desenvolvimentos da geometria não-arquimedeana levaram a pesquisas sobre análise não-arquimedeana. Como exemplo dessas investigações, a norma que resulta numa métrica no cálculo arquimedeano é uma *ultramétrica* no caso não-arquimedeano. Tanto a análise não-arquimedeana, como os espaços ultramétricos[68] estão sendo aplicados em pesquisas físicas, em pequena medida comparados com as técnicas padrões, mas com sucesso.

Conclusões

Nas três primeiras décadas do século XX não aconteceu somente um desenvolvimento extraordinário tanto da matemática como da física, mas também uma reconsideração das relações entre ambas as disciplinas. Nesse sentido, a análise das pesquisas e posições em torno do AA mostram um caso

---

[66] When speaking of applying axiomatic ideas and methods to these theories, Hilbert meant in this case existing physical theories. (CORRY, 2004, p. 141).

[67] CORRY, 2004, p. 141.

[68] RAMAL *et al.*, 1986.

concreto desse desenvolvimento. Hilbert realiza a sua formulação empírica desse axioma como um primeiro passo para esclarecer as relações entre geometria e espaço físico. Entretanto, a interpretação dessa formulação está longe de ser simples e unívoca, não provocando na comunidade científica nenhum resultado concreto ou proposta de teste, como aconteceu em outros casos, por exemplo, com o postulado das paralelas e o seu teste baseado as medidas físicas dos ângulos interiores de um triângulo.

No seu estudo do AA, Hilbert começa colocando questões matemáticas e formais, mas logo passa a propor um caminho de maior abstração que leva a uma visão unificada da matemática e da física. O pouco sucesso que teve a sua proposta de interpretação empírica do AA deve ser entendido como um passo nesse percurso, pois, não se estancando nele, o problema da verdade ou falsidade empírica do AA deixa de ser visto de uma maneira isolada por Hilbert, para passar a serem considerados os problemas relativos a físicas arquimedeanas e não-arquimedeanas.

Com o amadurecimento dos métodos formais e a constante insistência na importância deles, não somente na matemática, mas também na física, Hilbert assinalou um caminho que conduz a uma maior abstração dos conceitos e dos contextos teóricos das teorias físicas. A partir disso, abre-se um panorama muito diferente das relações entre matemática e física, no qual o físico-matemático abandona uma amarração ingênua da matemática e a realidade, para pensar de maneira abstrata nas relações entre estruturas matemáticas e teorias físicas, de modo que a aplicação de, por exemplo, espaços ultramétricos ou corpos não-arquimedeanos não é mais pensada em termos de se a realidade física é ou não ultramétrica ou arquimedeana, mas na avaliação da teoria físico-matemática como um todo.

Esse caminho maravilhoso de desenvolvimento da abstração e das potencialidades das teorias físico-matemáticas tem, sem dúvida, uma dívida com Hilbert tanto pelo seu trabalho concreto como pelos seus ideais.

Referências

ARNOLD, V. I. Mathematics and physics. In: BONIOLO, G.; BUDINICH, P.; TROBOK, M. (Ed.). *The role of mathematics in physical sciences*, Dordrecht: Springer, p. 225-233, 2005. crossref <<http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1300-2>>

BERKELEY, G. *The analyst: a discourse addressed to an infidel mathematician*. Whitefish: Kessinger, 2004.

BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. *A survey of modern algebra*. New York: MacMillan, 1965.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A history of mathematics*. 2. ed., New York: John Wiley & Son, 1991.

CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer, 1932.

CARRIER, M. *Geometric facts and geometrie theory: Helmholtz and 20th-century philosophy of physical geometry*. Berlin: Akademie Verlag, p.276-291, 1994.

CORRY, L. *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898-1918):* from Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik. Dordrecht: Kluwer, 2004. crossref <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-2778-9>>

______. Axiomatics, empiricism, and anschauung in Hilbert's conception of geometry: Between arithmetic and general relativity. In: FERREIRÓS, J.; GRAY, J. J. (Ed.). *The architecture of modern mathematics.* Essays in History and Philosophy, p. 133-156, Oxford: Oxford University Press, 2006.

______. The origin of Hilberts axiomatic method. In: RENN, J.; SCHEMMEL, M. (Ed.). *Theories of gravitation in the twilight of classical physics:* the promise of mathematics and the dream of a unified theory, n.4, p. 759-855, Dordrecht: Springer, 2007.

DAUBEN, J. W. *Georg Cantor*: his mathematics and philosophy of the infinite. Princeton: Princeton University Press, 1990.

DEDEKIND, R. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, v. 3, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, p. 315-334, 1932.

______;WEBER, H. (Ed.). *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Leipzig: B. G. Teubners, 1876.

ENRIQUES, F. *Prinzipien der Geometrie*. Leipzig: Teubner, 1907.

EUCLID. *Elements*. Lulu.Com. Texto grego com tradução inglesa, 2007.

EWALD, W. *From Kant to Hilbert:* a source book in the foundations of mathematics, v. 2. New York: Oxford University Press, 1996.

GÖDEL, K. Remark on non-standard analysis. In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Collected works II*, n. 2, New York: Oxford University Press. p. 759-855, 1990.

GRAY, J. *Gauss and non-Euclidean geometry*. New York: Springer, p. 61-80, 2006. <<http://dx.doi.org/10.1007/0-387-29555-0_2>>

HEATH, S.; HEIBERG, J. *The thirteen books of Euclid's elements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

HENSEL, K. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, v. 6, n. 3, p. 83-88, Jul. 1897.

HILBERT, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. In *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. I. Theil*. B. G. Teubner, Leipzig, 1 edition.

______.*Grundlagen der Geometrie*. 2. ed., Leipzig: B. G. Teubner, 1903.

______. *Axiomatische Denken*, v.3, Berlin: Springer, p. 146-156, 1935a. <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-38452-7_10>>

______. *Gesammelte Abhandlungen III*. Berlin: Springer, 1935b.

______.*David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics, 1915-1927:* Relativity, Quantum Theory and Epistemology. Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to set theory*. 3. ed., New York: Marcel Dekker, 1999.

MAJER, U. Hilbert's axiomatic approach to the foundations of science – a failed research program? In: HENDRICKS, V. F.; JØRGENSEN, K. F.; LÜTZEN, J.;PEDERSEN, S. A. (Ed.). *Interactions* — Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930, v. 251, p. 155-183. Dordrecht: Springer, 2006. <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-5195-1_5>>

MOISE, E. E. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. 3. ed., Massachusetts: Addison-Wesley, 1990.

POINCARÉ, H. *Science and hypothesis*. New York: Walter Scott, 1905.

RAMAL, R.; TOULOUSE, G.; VIRASORO, M. Ultrametricity for physicists. *Reviews of Modern Physics*, v. 58, n. 3, p. 765-788, Jul. 1986. <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.58.765>>.

ROBINSON, A. *Non-standard analysis*. Princeton; Princeton University Press, 1996.

ROWE, D. The calm before the storm: Hilbert's early views on foundations. In: HENDRICKS, V. F.; LÜTZEN, J.; PEDERSEN, S. A.; JØRGENSEN, K. F. (Ed.). *Proof theory:* history and philosophical significance, of *Synthese Library. Studies in Epistemology, Logic, Methodology and Philosophy of Science*, v. 292, p. 55-93. Dordrecht: Kluwer, 2000. <<http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-2796-9_4>>

RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. 3. ed., New York: McGraw-Hill, 1976.

SCHEINERMAN, E. *Matemática discreta* – uma introdução. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

SOMMER, J. Hilbert's foundations of geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)*, v. 6, n. 7, p. 287-299, Abr. 1900. <<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1900-00719-1>>

STÖLTZNER, M. How metaphysical is 'deepening the foundations' — Hahn and Frank on Hilbert's axiomatic method. *History of Philosophy of Science.* New Trends and Perspectives, v. 55, n. 3, p. 245-262, 2002.

TOEPELL, M. The origins and the further development of Hilbert´s "Grundlagen der Geometrie". *Le Matematiche*, v. 55, n. 3, p. 207-226, 2000.

TORRETTI, R. *La geometria del universo*. Mérida: Universidad de los Andes – Consejo de Publicaciones, 1994.

VERONESE, G. *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*. Leipzig: Teubner, 1894.

Data de registro: 11/10/2013
Data de aceite: 23/04/2014