B E J O M

Brazilian Electronic Journal of Mathematics. 2025, v.6: e74190

https://doi.org/10.14393/BEJOM-v6-2025-74190

ISSN: 26751313 (online edition)

Matemática Aplicada

APLICAÇÕES PRÁTICAS DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES LINEARES COM GEOGEBRA

Clésio Rodrigues da Silva Júnior
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Computação, Monte Carmelo, MG, Brasil.
E-mail: clesio.junior@ufu.br
https://orcid.org/0009-0004-1519-8504

Vania de Fátima Lemes de Miranda
Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Monte Carmelo, MG, Brasil.
E-mail: vaniaflm@ufu.br
https://orcid.org/0000-0002-0624-6840

Giselle Moraes Resende Pereira
Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Monte Carmelo, MG, Brasil.
E-mail: gisellemoraes@ufu.br
https://orcid.org/0000-0001-8154-0540

Eduardo dos Santos Rocha
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Computação, Monte Carmelo, MG, Brasil.
E-mail: eduardo.rocha@ufu.br
https://orcid.org/0009-0002-3818-6616

Luis Florial Espinoza Sánchez
Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Monte Carmelo, MG, Brasil.
E-mail: luis.sanchez@ufu.br
https://orcid.org/0000-0003-3634-1598

Danilo Elias de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Monte Carmelo, MG, Brasil.
E-mail: daniloelias@ufu.br
https://orcid.org/0000-0002-2062-369X

Mathematics Subject Classification (MSC): 15A04; 68U01.

Resumo. Nesse trabalho serão apresentados alguns conceitos de álgebra linear utilizados na computação gráfica. Os conteúdos relacionados à Matrizes e Transformações Lineares costumam gerar dúvidas em alunos do Ensino Médio e Ensino Superior por serem conteúdos bem teóricos. Uma forma de fortalecer a aprendizagem desses conteúdos é com a apresentação de suas aplicações. Foi utilizado um *software* de geometria dinâmica - o GeoGebra - para demonstrar duas aplicações práticas que possibilitam aos usuários interações dinâmicas para aprender conceitos de transformações lineares como cisalhamento, contração, dilatação e reflexões. Além disso, foram demonstradas duas aplicações do Teorema Fundamental da Álgebra Linear no contexto da computação gráfica.

Palavras-chave. Álgebra linear, computação gráfica, GeoGebra, matrizes, transformações lineares.

PRACTICAL APPLICATIONS OF MATRICES AND LINEAR TRANSFORMATIONS WITH GEOGEBRA

Abstract. In this paper we present linear algebra concepts used in computer graphics. The content related to matrices and linear transformations often raises doubts in high school and college students because it is very theoretical. One way of strengthening the learning of this content is by presenting its applications. The dynamic geometry *software* GeoGebra was used to demonstrate two practical applications that allow users to interact dynamically to learn concepts of linear transformations such as shear, contraction, dilation and reflections. In addition, two applications of the Fundamental Theorem of Linear Algebra were demonstrated.

Keywords. Linear algebra, graph computing, GeoGebra, matrices, Linear transformations.

APLICACIONES PRÁCTICAS DE MATRICES Y TRANSFORMACIONES LINEALES CON GEOGEBRA.

Resumen. En este trabajo se presentarán algunos conceptos de álgebra lineal utilizados en gráficos por computadora. Los contenidos relacionados con Matrices y Transformaciones Lineales suelen generar dudas entre los estudiantes de secundaria y educación superior debido a que son contenidos muy teóricos. Una forma de fortalecer el aprendizaje de estos contenidos es presentando sus aplicaciones. El software de geometría dinámica - GeoGebra - se utilizó para demostrar dos aplicaciones prácticas que permiten a los usuarios interactuar dinámicamente para aprender conceptos de transformaciones lineales como cizallamiento, contracción, dilatación y reflexiones. Además, se demostraron dos aplicaciones del Teorema Fundamental del Álgebra Lineal en el contexto de gráficos por computadora.

Palabras clave. Álgebra lineal, gráficos de computadora, GeoGebra, matrices, transformación lineal.

1 Introdução

A Álgebra Linear desempenha um papel essencial em diversas áreas, sendo particularmente relevante na computação gráfica [1], onde transformações lineares são aplicadas para manipular imagens e gráficos de forma eficiente. Um exemplo simples disso é o uso de um editor de texto, em que a formatação de uma fonte em itálico depende diretamente de transformações matemáticas que reposicionam os vértices dos caracteres. No entanto, compreender esses conceitos muitas vezes representa um desafio para estudantes, devido ao caráter abstrato da teoria.

Neste contexto, o software GeoGebra se destaca como uma ferramenta eficaz para facilitar a visualização e aplicação de transformações lineares. Ao proporcionar um ambiente interativo, o GeoGebra possibilita que os usuários explorem conceitos como cisalhamento e dilatação de forma prática e dinâmica, reforçando a conexão entre a teoria e suas aplicações reais. Este trabalho explora essas interações, demonstrando como o uso de matrizes e transformações lineares pode ser integrado à computação gráfica por meio do GeoGebra, contribuindo para um aprendizado mais visual e intuitivo.

2 Conceitos importantes

2.1 Sistemas lineares

Um sistema linear é um conjunto de **equações lineares** que compartilham variáveis. Cada equação pode ser escrita na forma geral:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes, e b é o termo independente.

Esse sistema pode ser representado de maneira compacta utilizando a notação matricial:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde:

- A é a matriz dos coeficientes;
- $\mathbf{x}$ é o vetor das incógnitas;
- $\mathbf{b}$ é o vetor dos termos independentes.

Resolver um sistema linear significa determinar os valores das variáveis que satisfazem todas as equações simultaneamente. Os sistemas lineares são amplamente utilizados em aplicações que variam de problemas físicos e engenharia a análises de dados e otimização.

2.2 Matrizes

Uma matriz é uma estrutura matemática que possui elementos organizados em linhas e colunas, onde cada elemento pode ser identificado pelos índices m, n correspondentes à linha e coluna, respectivamente [2]. Esse tipo de estrutura também é amplamente utilizada na computação para armazenamento em bancos de dados, manipulação de imagens e em redes neurais, por exemplo. Em geral, uma matriz pode ser expressa na forma:

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

onde m é o número de linhas e n representa o número de colunas.

2.2.1 Multiplicação entre matrizes

A multiplicação entre matrizes é uma operação fundamental na álgebra linear, amplamente utilizada em transformações lineares [2]. Dada uma matriz A de dimensão $m \times n$ e uma matriz B de dimensão $n \times p$, o produto $C = A \cdot B$ resulta em uma matriz C de dimensão $m \times p$, cujos elementos $c_{i,j}$ são calculados como:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\},\, j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Esta operação é válida quando o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B. Cada elemento $c_{i,j}$ da matriz resultante é obtido pela soma dos produtos correspondentes entre os elementos da linha i da matriz A e os elementos da coluna j da matriz B.

Por exemplo, considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}.$$

O produto $C = A \cdot B$ será dado por:

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{1,2} \cdot b_{2,2} \\ a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Essa operação pode ser interpretada geometricamente como a aplicação sucessiva de transformações lineares. Neste estudo, a multiplicação de matrizes será utilizada para representar composições de transformações, como cisalhamentos e rotações.

2.2.2 Transformações lineares e multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes está diretamente relacionada às transformações lineares, pois cada transformação linear pode ser representada por uma matriz. Quando aplicamos uma transformação linear a um vetor, o resultado pode ser obtido através do produto entre a matriz que representa a transformação e o vetor correspondente.

Por exemplo, considere uma transformação linear $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz A. Ao aplicar T a um vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, obtemos:

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}.$$

Este produto resulta em um novo vetor, que corresponde à imagem do vetor $\mathbf{v}$ sob a transformação T.

Neste trabalho, estudamos as transformações lineares que, embora sejam funções, podem ser representadas por matrizes.

2.3 Transformações lineares

Transformação Linear é uma função matemática que trabalha com dois espaços vetoriais, caracterizada pelas propriedades da adição e da homogeneidade [3]. A definição é dada por:

i) $\mathrm{T}(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \mathrm{T}(\mathrm{u}) + \mathrm{T}(\mathrm{v}) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

ii) $\mathrm{T}(\alpha \cdot \mathrm{v}) = \alpha \cdot \mathrm{T}(\mathrm{v}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

A propriedade i) se refere à **aditividade**. Ao aplicar a transformação em dois elementos diferentes e somá-las, deve-se obter o mesmo resultado que ao somar os dois elementos e depois aplicar a transformação.

Já a propriedade ii) se refere à **homogeneidade**. Ao multiplicar um elemento por um escalar α e aplicar a transformação, deve-se obter o mesmo valor que multiplicar o escalar α pelo resultado da transformação.

Em nossos estudos, consideramos vetores em duas dimensões, ou seja, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2$. Assim, considerando $\mathrm{u} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ utilizaremos a notação $\mathrm{T}(\mathrm{u}) = \mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

2.3.1 Reflexão

A reflexão [4] é uma operação que permite inverter os pontos de um objeto em relação a um eixo. Para isso, é necessário fixar um dos planos e projetar os reflexos em relação a esse eixo através de transformações lineares.

1. **Reflexão sobre o eixo x**

   No caso de uma reflexão em relação ao eixo x, ele será fixado e a transformação linear irá ocorrer no outro eixo:
   $$\mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, -\mathrm{y}).$$
   Essa transformação linear pode ser representada por meio da matriz de reflexão abaixo, onde o elemento correspondente ao eixo y tem o sinal trocado:
   $$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. **Reflexão sobre o eixo y**

Ao fixar o eixo y, a transformação linear será aplicada para alterar o eixo x:

$$\mathrm{T(x, y) = (-x, y).}$$

A representação dessa transformação linear que faz a reflexão em torno do eixo y:

$$R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Reflexão em torno da origem**
   De forma semelhante, para fazer a reflexão em torno dos dois eixos basta não fixar nenhum deles:

   $$\mathrm{T(x, y) = (-x, -y)}$$

   Dessa forma, a matriz de reflexão da origem será:

   $$R_o = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Contração e Dilatação

Resumidamente, esses dois termos correspondem a transformações lineares que podem alterar o tamanho e as dimensões de objetos, vetores e espaços vetoriais. Para que isso aconteça, os componentes precisam ser multiplicados por um escalar k, considerando que:

i) Se $k < 1,$ contração. ii) Se $k > 1,$ dilatação. iii) Se $k = 1,$ identidade.

Será utilizada essa matriz base para aplicar as transformações: A = $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Note que $\mathrm{T(u) = T(x, y)} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$.

2.3.3 Rotação em torno da origem

É um tipo de transformação linear que rotaciona um objeto em torno da origem (0, 0) e cria uma nova posição dos pontos após a rotação.

Para uma rotação no sentido horário: $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

Para uma rotação no sentido anti-horário: $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

2.3.4 Cisalhamento

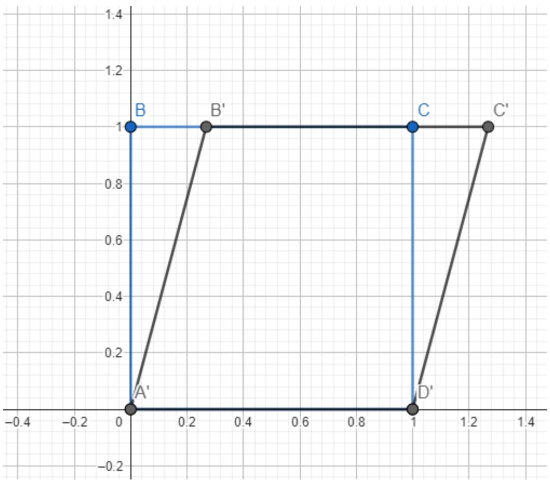
O cisalhamento é um tipo de transformação linear que permite distorcer a forma de um objeto por meio de deslocamentos sem alterar sua área ou volume [1]. Para isso, é utilizada uma matriz do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para cisalhamento horizontal,} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \text{ para cisalhamento vertical,}$$

onde k é o fator do deslocamento.

É muito importante conhecer esses conceitos matemáticos para começar a compreender como a computação gráfica funciona.

Figura 1: Exemplo inicial de cisalhamento [5].



Fonte: https://www.geogebra.org/m/a32rdnd4

2.4 Teorema fundamental da álgebra linear

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Suponha que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ seja uma base de U e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ seja um conjunto de vetores de V (não necessariamente uma base).

O Teorema Fundamental da Álgebra Linear [6] afirma que, para qualquer escolha desses vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em V, existe uma transformação linear $T : U \to V$ que mapeia cada elemento da base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U nos vetores correspondentes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em V.

Em termos mais concretos, dado que U tem dimensão n e V pode ter qualquer dimensão, o teorema garante a existência de uma transformação linear T que leva a base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U nos n vetores escolhidos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em V.

3 GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gráfico que é muito utilizado por possibilitar a execução de várias funcionalidades relacionadas à matemática em um único ambiente, como álgebra, geometria e plano cartesiano. Por ter uma interface de fácil compreensão, é uma ferramenta muito utilizada na educação para ajudar a difundir o conhecimento matemático utilizando exemplos mais concretos e práticos.

Além disso, é possível se aprofundar e utilizar recursos avançados dentro desse ambiente, como programar funções sofisticadas para solucionar um problema complexo, criar animações e interações dinâmicas com o usuário. Isso abre espaço para fazer muitas coisas que vão além do básico, permitindo a criação de situações que preparam os estudantes para o entendimento da importância das argumentações dedutivas e desenvolvem habilidades que são características do pensamento matemático.

O GeoGebra oferece várias funcionalidades interativas que tornam o estudo de transformações lineares e outras áreas da matemática mais acessível e visual. A seguir, algumas dessas funcionalidades são explicadas:

- **Adição de pontos**: O GeoGebra permite criar pontos inserindo suas coordenadas ou posicionando-os interativamente no plano. Esses pontos servem como vértices para a construção de figuras geométricas, como polígonos ou segmentos de reta.

- **Segmentos de reta**: A ferramenta conecta dois pontos no plano, formando uma linha reta. O segmento pode ser ajustado dinamicamente, permitindo que o usuário observe as mudanças na forma ao mover os pontos terminais.

- **Construção de polígonos**: A partir dos pontos e segmentos, o GeoGebra gera polígonos automaticamente, facilitando a aplicação de transformações como cisalhamento e rotação.

- **Controles deslizantes (Sliders)**: Utilizados para ajustar parâmetros numéricos em tempo real, como os valores de uma matriz de transformação, permitindo a visualização imediata dos efeitos no objeto.

- **Botões interativos**: Configurados para ativar ou desativar transformações específicas, como rotação ou reflexão, com um simples clique, facilitando a exploração de combinações de operações.

- **Caixas para exibir/esconder objetos**: Permitem controlar a visibilidade de objetos e transformações, sendo úteis para focar em aspectos específicos ou comparar o antes e depois de uma operação.

- **Manipulação direta de objetos gráficos**: O usuário pode arrastar pontos e segmentos diretamente na tela, com o software recalculando automaticamente as transformações aplicadas, visualizando em tempo real os efeitos nas demais partes da construção.

4 Desenvolvimento

Para demonstrar uma aplicação prática de todos os conceitos mencionados anteriormente, foram criadas algumas situações utilizando o *software* GeoGebra, incluindo um tutorial inicial para que quem nunca teve contato com essa ferramenta consiga compreender os conceitos básicos de forma prática [5]. Os materiais utilizados estão disponíveis para acesso e download em [7].

4.1 Cisalhamento

Considerando o exemplo do editor de texto, inicialmente, utilizamos o *software* gráfico GeoGebra para representar uma letra de forma, identificando e conectando os pontos que formam a letra de maneira sequencial. Essa disposição visual permitiu uma representação precisa da sigla “UFU” [8], como é possível visualizar nos pontos e segmentos azuis da Figura 2.

Essa figura é composta por diversos pontos, cada um com coordenadas específicas no plano cartesiano. Esses pontos podem ser descritos individualmente como pares ordenados, ou seja, uma combinação de dois números que representam suas posições nos eixos x e y. Por exemplo, o ponto A com coordenadas A(1,0) significa que ele está localizado na posição 1 no eixo x e na posição 0 no eixo y.

No entanto, ao representar uma figura complexa como a sigla “UFU”, com vários pontos conectados por segmentos de reta, podemos melhor organizá-los usando matrizes, o que irá proporcionar uma representação eficaz para as transformações lineares subsequentes. Nessas matrizes, cada coluna corresponde a um ponto no plano, e as linhas indicam as coordenadas x e y desses pontos.

- Os vértices da primeira letra “U” podem ser organizados na seguinte matriz U_1:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Comando utilizado no *GeoGebra* para criar a matriz U_1.

```
U_1={{1,1,2,2,3,3,4,4},{0,5,5,1,1,5,5,0}}
```

- Para representar a letra “F”, temos a matriz de mesmo nome:

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 & 8 & 6 & 6 & 8 & 8 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para a segunda letra "U", temos a matriz U_2.

$$U_2 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 & 12 & 12 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para criar o efeito de itálico foi utilizado o cisalhamento horizontal, com o objetivo de inclinar os caracteres em 15° usando a matriz Cis, seguindo as mesmas etapas do tutorial definido na Seção 4:

$$Cis = \begin{bmatrix} 1 & \tan(15^\circ) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comando utilizado no *GeoGebra* para criar a matriz `Cis`.

```
Cis={{1,tan(15)},{0,1}}
```

Obs: para adicionar o grau de 15°, deve-se procurar o comando "?" no teclado "f(x)" do *GeoGebra*.

Para obter as novas coordenadas dos pontos após a aplicação do cisalhamento, multiplicamos a matriz de cisalhamento Cis pelas coordenadas dos pontos de cada matriz. Esta operação é realizada ponto a ponto, conforme a fórmula geral $P' = Cis \cdot P$, onde P é um ponto representado como um **vetor coluna**.

Exemplo de cálculo no GeoGebra:

Para o primeiro ponto $A(1,0)$, aplicamos a matriz de cisalhamento da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(15^\circ) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$

Comando utilizado no *GeoGebra* para obter o ponto A' a partir de A.

```
A' = Cis * A
```

Substituindo as coordenadas do ponto A:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(15^\circ) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando a multiplicação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0.2679 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a nova posição do ponto A após a aplicação do cisalhamento permanece como $A'(1,0)$. Entretanto, as coordenadas dos demais pontos poderão ser atualizadas.

Seguindo essa lógica, realizamos a multiplicação para cada ponto da matriz U_1, resultando em uma nova matriz:

$$Cis \cdot U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2.3397 & 3.3397 & 2.2679 & 3.2679 & 4.3397 & 5.3397 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizamos a mesma multiplicação para os pontos da matriz F:

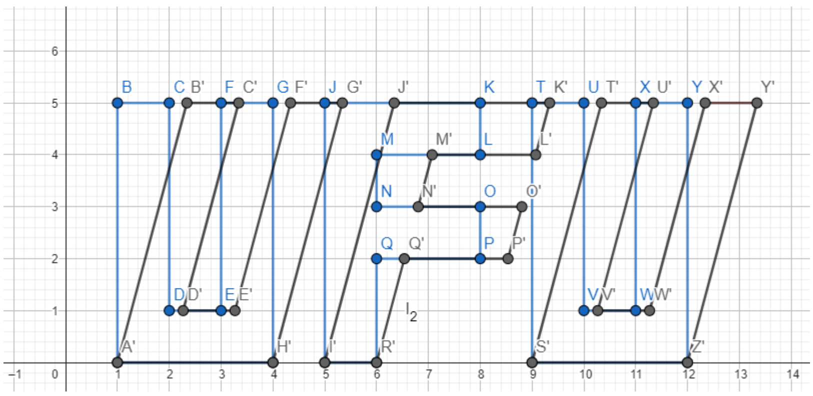
$$Cis \cdot F = \begin{bmatrix} 5 & 6.3397 & 9.3397 & 9.0717 & 7.0717 & 6.8038 & 8.8038 & 8.5358 & 6.5358 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para a segunda letra "U", que corresponde à matriz U_2:

$$Cis \cdot U_2 = \begin{bmatrix} 9 & 10.3397 & 11.3397 & 10.2679 & 11.2679 & 12.3397 & 13.3397 & 12 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos visualizar na Figura 2 uma comparação entre o antes (cor azul) e depois (cor preta) do cisalhamento de 15º nos caracteres que formam a sigla "UFU".

Figura 2: Comparação da representação original e após o cisalhamento horizontal de 15º nas letras da sigla UFU.



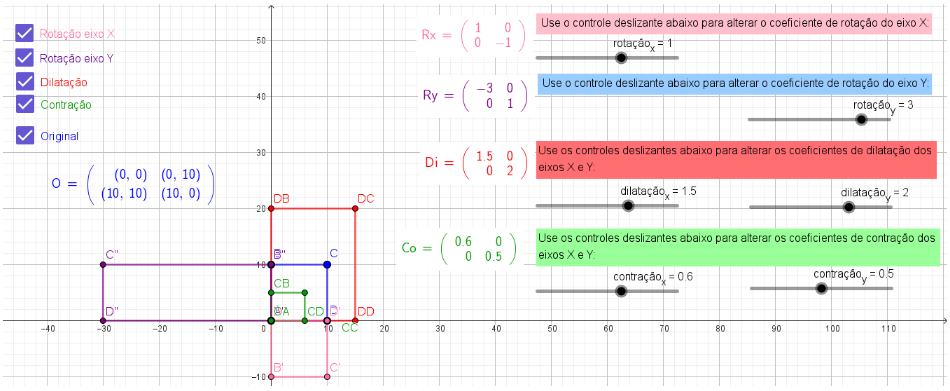
Fonte: https://www.geogebra.org/m/ay36cvxz

4.2 Contração, dilatação e rotação em torno dos eixos

De maneira semelhante, foi criada uma situação (apresentada na Figura 3) na qual um objeto inicial é definido e submetido a diversas transformações lineares. As coordenadas desse objeto inicial são representadas pela matriz abaixo, onde cada coluna corresponde aos pontos A, B, C e D, respectivamente:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Figura 3: Interface interativa para realizar transformações lineares.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/yeghq9sw

Os usuários podem interagir com a interface de forma dinâmica (e reproduzir a mesma situação através do tutorial [9]). Para esta construção foram utilizadas várias ferramentas do GeoGebra, como os controles deslizantes, botões, caixas para exibir/esconder objetos (valor booleano *true* e *false*). Ao alterar o estado de uma variável booleana, diferentes tipos de transformações lineares podem ser exibidas ou ocultadas. Além disso, os usuários podem ajustar os valores das matrizes correspondentes às transformações usando controles deslizantes. É possível também arrastar o objeto inicial e distorcê-lo para ver como todos os outros objetos visíveis são afetados em resposta.

4.3 Aplicação do teorema fundamental da álgebra linear

O **teorema fundamental da álgebra linear** afirma que, para cada transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, existe uma matriz única associada a T, que mapeia os vetores de uma base do domínio para os vetores de uma base correspondente no contradomínio. No caso de $\mathbb{R}^2$, a base usual é formada pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1)$. A matriz T é formada pelas imagens dos vetores da base original, isto é:

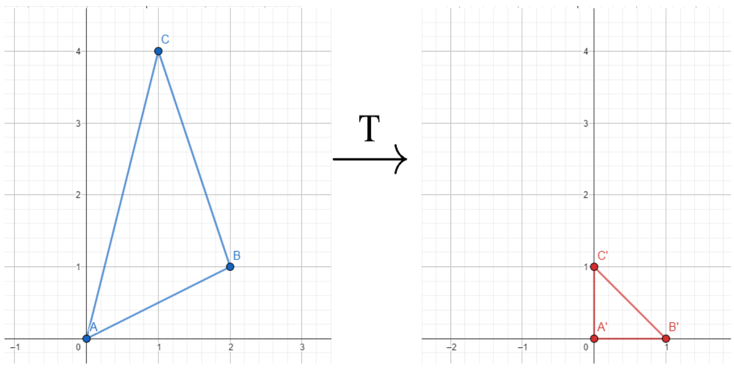
$$T = \begin{bmatrix} T(\mathbf{v}_1) & T(\mathbf{v}_2) \end{bmatrix}.$$

Nos problemas a seguir, que podem ser reproduzidos pelo leitor através de tutorial [10], vamos relacionar os pontos dados com essa base usual, justificando como essas informações permitem determinar a matriz T.

4.3.1 Problema 1: Transformação de Triângulos

Dado o triângulo ABC com vértices $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(1,4)$, deseja-se encontrar a matriz T que transforma esse triângulo no triângulo $A'B'C'$ com vértices $A'(0,0)$, $B'(1,0)$, $C'(0,1)$, como indica a Figura 4.

Figura 4: Triângulo ABC antes e após a aplicação da transformação linear T.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/kd6whcq7

Fundamento Teórico

A transformação linear T é determinada pela relação $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, onde $\mathbf{v}$ é um vetor no domínio e $\mathbf{u}$ é a sua imagem no contradomínio. Usualmente, consideramos as imagens dos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1)$. No entanto, os pontos B e C fornecem combinações lineares desses vetores, permitindo determinar diretamente T sem usar explicitamente $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Por exemplo, $\mathbf{v}_B = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$. Suas imagens determinam:

$$T(\mathbf{v}_B) = \mathbf{u}_B = (1,0), \quad T(\mathbf{v}_C) = \mathbf{u}_C = (0,1).$$

Resolução

Como foi definido no teorema fundamental da álgebra linear, existe uma única transformação linear que permite partir de ABC e chegar em $A'B'C'$.

Queremos encontrar a matriz $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que a aplicação dessa matriz aos pontos do triângulo ABC resulte nos pontos do outro triângulo $A'B'C'$. Ou seja, precisamos resolver o sistema do tipo:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, para os pontos A, B e C, aplicamos as transformações lineares abaixo:

$$T \cdot A = A';$$
$$T \cdot B = B';$$
$$T \cdot C = C';$$

Resolvendo e escrevendo os sistemas de equações:

$$A(0,0) \longrightarrow A'(0,0):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} 0a + 0b = 0, \\ 0c + 0d = 0. \end{cases}$$

Dessa maneira, nesse caso não é necessário aplicar a transformação $T \cdot A = A'$.

$$B(2,1) \longrightarrow B'(1,0):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} 2a + b = 1, \\ 2c + d = 0, \end{cases}$$

$$C(1,4) \longrightarrow C'(0,1):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ c + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear para os coeficientes da matriz T:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 1, \qquad & a + 4b &= 0, \\ 2c + d &= 0, \qquad & c + 4d &= 1, \end{aligned}$$

obtém-se:

$$\boxed{a = \frac{4}{7}} \quad \boxed{b = \frac{-1}{7}} \quad \boxed{c = \frac{-1}{7}} \quad \boxed{d = \frac{2}{7}}.$$

Dessa forma, a matriz que representa a transformação linear é:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

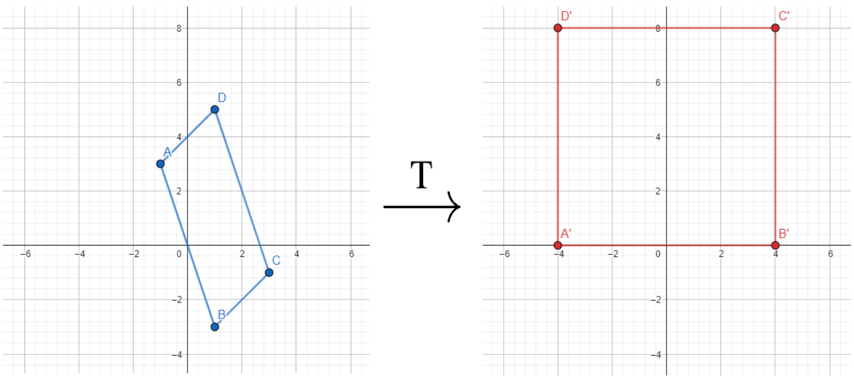
4.3.2 Problema 2: Transformação de um Paralelogramo em um Retângulo

Dado o paralelogramo $ABCD$ com vértices $A(-1, 3)$, $B(1, -3)$, $C(3, -1)$, $D(1, 5)$, deseja-se determinar se existe uma matriz T que o transforma no retângulo $A'B'C'D'$ com vértices $A'(-4, 0)$, $B'(4, 0)$, $C'(4, 8)$, $D'(-4, 8)$, como mostra a Figura 5.

Fundamento Teórico

Como no problema anterior, a matriz T será formada a partir das imagens dos vetores da base. Considerando os pares de vértices correspondentes, verificamos se o sistema gerado pelos pontos dados é consistente.

Figura 5: Paralelogramo $ABCD$ antes e depois da transformação linear T.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/t6yukun2

Resolução

Da mesma forma, iremos ver se é possível encontrar uma matriz $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que possa fazer essa transformação linear, considerando que:

$$T \cdot A = A'; \quad T \cdot B = B'; \quad T \cdot C = C'; \quad T \cdot D = D'.$$

Resolvendo e escrevendo os sistemas de equações:

$$A(-1, 3) \longrightarrow A'(-4, 0):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} -a + 3b = -4 \\ -c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$B(1, -3) \longrightarrow B'(4, 0):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a - 3b = 4 \\ c - 3d = 0 \end{cases}$$

$$C(3, -1) \longrightarrow C'(4, 8):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} 3a - b = 4 \\ 3c - d = 8 \end{cases}$$

$$D(1, 5) \longrightarrow D'(-4, 8):$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix},$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a + 5b = -4 \\ c + 5d = 8 \end{cases}$$

Formamos o sistema:

$$\begin{aligned} -a + 3b &= -4, & a - 3b &= 4, \\ 3a - b &= 4, & a + 5b &= -4, \\ -c + 3d &= 0, & c - 3d &= 0, \\ 3c - d &= 8, & c + 5d &= 8. \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos:

$$\boxed{a = 1} \quad \boxed{b = -1} \quad \boxed{c = 3} \quad \boxed{d = 1}.$$

Dessa forma, a matriz que representa a transformação linear é:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3.3 Casos de Não-Determinação da Transformação Linear T

Existem situações em que, mesmo conhecendo $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_1, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{u}_n$, não é possível determinar T. Essas situações são descritas a seguir:

1. Dependência linear entre as imagens: se as imagens $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ não forem linearmente independentes, a transformação T não será unicamente definida. Isso ocorre porque uma transformação linear preserva a independência linear do domínio no contradomínio.

Por exemplo, considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T(\mathbf{v}_1) = (1, 1)$ e $T(\mathbf{v}_2) = (2, 2)$. Como $T(\mathbf{v}_2) = 2 \cdot T(\mathbf{v}_1)$, temos dependência linear, e a matriz T associada será degenerada:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, T não é válida, pois não mapeia $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$ preservando as propriedades lineares.

2. Número insuficiente de dados: quando o número de vetores do domínio $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ com imagens conhecidas $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ é menor que a dimensão do domínio, a transformação T não pode ser determinada. Isso resulta em um sistema subdeterminado, com mais incógnitas do que equações.

Por exemplo, para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, se apenas $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ são conhecidos, não há como determinar $T(\mathbf{v}_3)$, deixando o sistema incompleto.

3. Condições contraditórias: se as condições fornecidas para T são inconsistentes com a linearidade da transformação, T não pode ser definida. Por exemplo, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e é imposto que:

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 1), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, 2), \quad T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (4, 4),$$

essa última condição contradiz a linearidade, pois $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \neq T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$.

Portanto, para que T seja determinada de maneira única, é necessário que:

- As imagens $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sejam linearmente independentes.

- A quantidade de vetores seja suficiente (n, no caso de $\mathbb{R}^n$).
- As condições fornecidas sejam consistentes com a linearidade.

Caso contrário, T será indefinida ou ambígua.

5 Considerações finais

Esse trabalho explorou a aplicação prática de transformações lineares na computação gráfica, destacando o uso de matrizes para representar coordenadas e realizar cisalhamento, contração, dilatação e rotação. Para isso, utilizamos o GeoGebra que se mostrou eficiente e de fácil manipulação na elaboração destas construções matemáticas e capaz de desenvolver habilidades que são características do pensamento matemático. A compreensão desses conceitos é essencial para a manipulação eficaz de elementos gráficos. A representação visual dos caracteres "UFU" após as transformações lineares ilustra como esses conceitos podem ser aplicados de maneira significativa. A álgebra linear, portanto, desempenha um papel fundamental na criação e manipulação de elementos gráficos, enriquecendo as possibilidades na área da computação gráfica.

Conflitos de interesse

Os autores declaram que não existem conflitos de interesse.

Agradecimentos

Um dos autores, na condição de bolsista de Iniciação Científica do PICME da Universidade Federal de Uberlândia, agradece ao CNPq pelo fomento. Esse autor também expressa gratidão aos demais coautores e a seus coorientadores pelo apoio e contribuições ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Referências

[1] Henrique Silva Guedes Gonçalves. "A importância das matrizes e transformações lineares na computação gráfica [manuscrito]". M.Sc. Thesis. 2013.

[2] Gilbert Strang. *Álgebra Linear e Suas Aplicações*. 4ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[3] Seymour Lipschutz e Marc Lipson. *Álgebra Linear*. 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

[4] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[5] Clésio Rodrigues Silva Junior. *Tutorial Inicial Cisalhamento*. Disponível em: `https://github.com/clesio-junior/GeoGebra/blob/main/EtapasCisalhamentoQuadradoInicial.pdf`, Acesso em: 13 out. 2024. 2024.

[6] Carlos Silva Gonçalves e Ubiratan Sodré. *Teorema Fundamental da Álgebra Linear*. Disponível em: `https://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/alinear/teofund.htm`, Acesso em: 04 dez. 2024. 2024.

[7] GeoGebra. *Aplicações de Álgebra Linear na Computação Gráfica*. Disponível em: `https://www.geogebra.org/f/fdx4rw7qy4`, Acesso em: 19 jun. 2024. 2024.

[8] Clésio Rodrigues Silva Junior. *Efeito_Cisalhamento_UFU_Geogebra*. Disponível em: `https://www.geogebra.org/m/ay36cvxz`, Acesso em: 13 mar. 2024. 2024.

[9] Clésio Rodrigues Silva Junior. *Tutorial da Interface de Transformações Lineares*. Disponível em: `https://github.com/clesio-junior/GeoGebra/blob/main/TutorialInterface.pdf`, Acesso em: 14 out. 2024. 2024.

[10] Clésio Rodrigues Silva Junior. *Tutorial de Reprodução dos Problemas da Seção 4.3*. Disponível em: `https://github.com/clesio-junior/GeoGebra/blob/main/problemasSecao4.3.pdf`, Acesso em: 15 out. 2024. 2024.

Corresponding Author:
Clésio Rodrigues da Silva Júnior, *clesio.junior@ufu.br*

Submitted: June 25, 2024
Accepted: November 4, 2024
Published: April 30, 2025
https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index