



MODELOS MATEMÁTICOS CLÁSSICOS COM ABORDAGEM FRACIONÁRIA

Fernanda de Andrade Flor

Universidade Federal de Uberlândia, IME, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: fernandaflor2015@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0006-2658-4587> 

Rafael Antônio Rossato

Universidade Federal de Uberlândia, IME, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: rafaelrossato@ufu.br

<https://orcid.org/0000-0003-1092-1164> 

Mathematics Subject Classification (MSC): 34A08.

Resumo. Neste trabalho, apresentamos uma aplicação do cálculo diferencial de ordem não inteira, conhecido como Cálculo Fracionário, a modelos matemáticos clássicos. Analisamos o comportamento da solução de quatro problemas envolvendo derivadas fracionárias com condições iniciais, que consiste em substituir a derivada usual da equação diferencial ordinária por uma derivada fracionária no sentido de Caputo de ordem inferior à do problema original. Os resultados deste trabalho contribuem para os estudos de modelagem via equações diferenciais de ordem não inteira, ao investigar o comportamento das soluções. Tal contribuição é particularmente relevante diante da ausência de uma interpretação física bem definida para a derivada fracionária, o que torna desafiadora a utilização de modelos fracionários.

Palavras-chave. Cálculo fracionário, funções de Mittag-Leffler, derivada fracionária segundo Caputo, equações diferenciais fracionárias.

CLASSICAL MATHEMATICAL MODELS WITH A FRACTIONAL APPROACH

Abstract. In this work, we present an application of non-integer order differential calculus, known as Fractional Calculus, to classical mathematical models. We analyze the solution behavior of four problems involving fractional derivatives with initial conditions, which consists of replacing the usual derivative of the ordinary differential equation with a fractional derivative in the Caputo sense of a lower order than that of the original problem. The results of this work contribute to the field of modeling via non-integer order differential equations by investigating the behavior of their solutions. Such a contribution is particularly relevant given the lack of a well-defined physical interpretation for the fractional derivative, which makes the use of fractional models a challenging endeavor.

Keywords. Fractional calculus, Mittag-Leffler functions, Caputo fractional derivative, fractional differential equations.

MODELOS MATEMÁTICOS CLÁSICOS CON UN ENFOQUE FRACCIONARIO

Resumen. En este trabajo, presentamos una aplicación del cálculo diferencial de orden no entero, conocido como Cálculo Fraccional, a modelos matemáticos clásicos. Analizamos el comportamiento de la solución de cuatro problemas que involucran derivadas fraccionarias con condiciones iniciales, lo cual consiste en reemplazar la derivada habitual de la ecuación diferencial ordinaria por una derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden inferior al del problema original. Los resultados de este trabajo contribuyen a los estudios de modelado mediante ecuaciones diferenciales de orden no entero, al investigar el comportamiento de las soluciones. Dicha contribución es particularmente relevante ante la ausencia de una interpretación física bien definida para la derivada fraccionaria, lo que hace que la utilización de modelos fraccionarios resulte un desafío.

Palabras clave. Cálculo fraccionario, funciones de Mittag-Leffler, derivada fraccionaria de Caputo, ecuaciones diferenciales fraccionarias.

1 Introdução

O cálculo de ordem não inteira, usualmente chamado de Cálculo Fracionário, é um campo da matemática que se dedica ao estudo de extensões dos conceitos de integração e diferenciação para ordens não inteiras. Sua origem veio da curiosidade sobre a possibilidade de estender o conceito de derivadas para ordens fracionárias. De acordo com [1] e [2], a ideia começou a ser explorada no final do século XVII, quando L'Hôpital questionou Leibniz sobre o que aconteceria se a ordem n da derivada fosse uma fração, como $n = \frac{1}{2}$. Essa troca de ideias levou a um desenvolvimento significativo na área, com matemáticos como Euler e Lacroix contribuindo para a formalização do conceito.

Lacroix, em 1819, foi um dos primeiros a definir uma derivada fracionária, utilizando a Função Gama para generalizar a noção de fatorial e estender a ordem de derivação. Isso permitiu que derivadas de ordem não inteira fossem calculadas, como demonstrado na expressão para $\frac{d^{\frac{1}{2}}(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}$, que resulta em $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$. Essa abordagem se alinha com a definição de Riemann-Liouville, que surgiu em 1869.

O estudo do Cálculo Fracionário tem ganhado destaque devido à sua ampla aplicabilidade, especialmente em física e engenharia, e diversas definições de derivadas fracionárias foram criadas e estudadas (ver [3], [1], [4] e [5]). Em [6] são propostos critérios para um operador ser considerado uma derivada fracionária.

Neste trabalho, será utilizada a derivada de Caputo de ordem real. Embora, na literatura, a ordem das derivadas fracionárias possa assumir valores complexos, opta-se aqui por ordens

reais devido ao foco na modelagem de fenômenos clássicos. O objetivo é explorar como o Cálculo Fracionário pode ser aplicado a modelos matemáticos tradicionalmente descritos por equações diferenciais ordinárias, por meio da substituição da ordem inteira por valores não inteiros, resultando em equações diferenciais fracionárias. Essa generalização permite que a solução do modelo clássico seja recuperada como um caso particular da solução fracionária.

A escolha da derivada de Caputo justifica-se por sua maior adequação à modelagem de sistemas físicos, uma vez que, diferentemente da derivada de Riemann-Liouville, ela permite a imposição de condições iniciais de ordem inteira, que possuem interpretação física direta. Além disso, essa definição é particularmente conveniente para a aplicação da Transformada de Laplace, pois sua formulação envolve apenas os valores iniciais da função e de suas derivadas usuais, o que simplifica o processo de obtenção das soluções.

O texto inicia com conceitos preliminares na Seção 2 e um estudo de funções essenciais para o estudo do Cálculo Fracionário na Seção 3. Na sequência, na Seção 4, apresentamos uma introdução dos conceitos do Cálculo Fracionário e a derivada segundo Caputo e, por fim, na Seção 5 discutimos os modelos fracionários.

2 Conceitos preliminares

Nesta seção apresentamos alguns conceitos necessários para o estudo do Cálculo Fracionário e as aplicações analisadas a seguir. Iniciamos com a definição da Transformada de Laplace.

Definição 1. *Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. Definimos a Transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $F(s)$, como a integral*

$$F(s) := \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

onde s , o parâmetro da transformada, é tal que $s > 0$.

Pela definição acima é possível provar a linearidade da Transformada de Laplace. De fato, para quaisquer valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e funções f, g cujas $\mathcal{L}[f(t)]$ e $\mathcal{L}[g(t)]$ existam, pela linearidade da integral, segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \alpha f(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \beta g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]. \end{aligned}$$

Definição 2. Dizemos que uma função f é de ordem exponencial, se existirem constantes k, a e M , tais que $|f(t)| \leq ke^{at}$, para $t \geq M$.

Para analisar e buscar solução de um problema de valor inicial, será necessário conhecer a Transformada de Laplace das derivadas da função f . Enunciamos, no teorema abaixo (cuja demonstração pode ser encontrada em [7]), a propriedade de que a transformada da derivada de ordem n de uma função pode ser escrita em termos da transformada da função.

Teorema 1. Seja f uma função tal que $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ são contínuas e $f^{(n)}$ é contínua por partes em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Além disso, suponhamos que f e todas as derivadas de ordem até n sejam de ordem exponencial. Então, $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

A Transformada de Laplace do produto de duas funções não necessariamente é igual ao produto das transformadas. Porém, tal propriedade é válida para o produto de convolução definido abaixo.

Definição 3. Sejam f e g duas funções contínuas por partes em todo intervalo da forma $[0, A]$. Definimos o produto de convolução de f e g , denotado por $(f * g)$, como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Proposição 1. Sejam f e g duas funções contínuas por partes em todo intervalo da forma $[0, A]$ e que possuem Transformada de Laplace. Logo,

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)].$$

Demonstração. Sejam

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad \text{e} \quad G(s) = \mathcal{L}[g(\tau)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)d\tau.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty g(\tau) e^{-s(t+\tau)} d\tau dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $v = t + \tau$, com t fixado, obtemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty g(v-t)e^{-sv} dv dt.$$

Por fim, invertendo a ordem de integração

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^v f(t)g(v-t)e^{-sv} dt dv \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^v f(t)g(v-t) dt \right) e^{-sv} dv \\ &= \int_0^\infty (f * g)(v) e^{-sv} dv \\ &= \mathcal{L}[(f * g)(v)]. \end{aligned}$$

□

A Transformada de Laplace será utilizada na resolução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais fracionárias propostas na Seção 5, obtendo assim equações algébricas. A fim de recuperar as soluções dos problemas de partida, podemos aplicar a propriedade de que $\mathcal{L}[f(t)]$ admite inversa, denotada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, cuja a fórmula geral é omitida, uma vez que envolve uma integral de função de variável complexa, que não é objeto de estudo deste trabalho. No entanto, pode ser provado que dada $f(t)$ uma função contínua com Transformada de Laplace $F(s)$, não existe outra função contínua possuindo a mesma transformada $F(s)$ (ver [7], p. 247).

3 Funções Especiais

Iniciamos esta seção apresentando a Função Gama, a qual desempenha um papel essencial no estudo do Cálculo Fracionário, estando presente na definição da Integral de ordem não inteira. Para este trabalho, a Função Gama será definida sobre o conjunto dos números reais. No entanto, ela pode ser definida no conjunto dos números complexos (ver [8] para mais detalhes).

Definição 4. Definimos a Função Gama pela integral imprópria,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall x > 0.$$

A Função Gama é considerada uma generalização do fatorial para números reais em virtude da propriedade abaixo.

Proposição 2. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = (n-1)!$.

Demonstração. A demonstração segue por indução sobre n . Para $n = 1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

Logo, a igualdade é válida para $n = 1$. Agora, suponhamos a igualdade válida para n . É possível mostrar a validade para $n + 1$, ou seja, $\Gamma(n + 1) = n!$. Para isso, utilizamos integração por partes, obtendo

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = -e^{-t} t^n \Big|_{t=0}^{t=\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!,$$

uma vez que $[-e^{-t} t^n]_{t=0}^{t=\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^n = 0$. □

A propriedade acima pode ser generalizada para todos os números reais positivos.

Proposição 3. Se $x > 0$, então

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x). \quad (1)$$

Demonstração. Integrando por partes,

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

□

Pela Proposição anterior, podemos estender o domínio da Função Gama para todos os reais não nulos, com exceção dos inteiros negativos. De fato, sendo $x > 0$, podemos escrever

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x}.$$

O lado direito dessa equação está bem definido para valores de $-1 < x < 0$. Logo, podemos definir o lado esquerdo também para valores obtidos do lado direito. Desta forma estendemos o domínio de Γ para $-1 < x < 0$. Realizando o mesmo raciocínio para os intervalos $-2 < x < -1$ e os próximos seguindo esse padrão, obtemos uma extensão do domínio dessa função para todos os reais não nulos, com exceção dos inteiros negativos.

No que segue, definimos a Função de Gel'fand-Shilov e calculamos a sua respectiva Transformada de Laplace, que será necessária para resultados posteriores.

Definição 5. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e α um número não inteiro. Definimos a Função de Gel'fand-Shilov de ordem n e de ordem α , respectivamente, por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad e \quad \phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Notemos que ao aplicar a Transformada de Laplace na Função de Gel'fand Shilov de ordem α , obtemos

$$\mathcal{L}[\phi_\alpha(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} dt.$$

Introduzindo a mudança de variável $st = a$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\phi_\alpha(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} s dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-a} \left(\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} da \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) s^\alpha} \int_0^\infty e^{-a} a^{\alpha-1} da \\ &= \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-a} a^{\alpha-1} da. \end{aligned}$$

Logo, pela definição da Função Gama (Definição 4),

$$\mathcal{L}[\phi_\alpha(t)] = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = s^{-\alpha}. \quad (2)$$

Para as soluções das equações diferenciais ordinárias presentes nos modelos fracionários abordados nas próximas seções, utilizamos Transformada de Laplace da função $E_\alpha(\pm at^\alpha)$, onde a é uma constante e $E_\alpha(t)$ é a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro, que definimos a seguir.

Definição 6. Definimos a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro, para $\alpha > 0$ e $t > 0$, pela série

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

A função acima é considerada uma generalização fracionária da função exponencial. Observemos que

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

Na proposição a seguir apresentamos a Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler de um parâmetro. Esse resultado será essencial na Seção 5 para recuperar as soluções dos problemas de valores iniciais.

Teorema 2. Se $s^\alpha > |a|$, então

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}. \quad (3)$$

Demonstração. Da definição de Transformada de Laplace e da Função de Mittag-Leffler, segue que

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(\pm at^\alpha) dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt. \quad (4)$$

Fazendo a mudança de variável $u = st$, e pela definição da Função Gama (Definição 4),

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k} du = \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \Gamma(\alpha k + 1).$$

Substituindo em (4), obtemos

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm at^\alpha)] = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \Gamma(\alpha k + 1) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{\pm a}{s^\alpha} \right]^k = \frac{1}{s} \frac{1}{1 \mp \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}.$$

□

4 O Cálculo Fracionário

Esta seção contempla alguns conceitos do Cálculo Fracionário que serão utilizados no estudo dos modelos fracionários, mais especificamente, a derivada fracionária segundo Caputo, bem como a sua Transformada de Laplace. Essa derivada fracionária é definida a partir do conceito de integral fracionária (ordem inversa ao que é estudado no cálculo usual).

Nesse sentido, iniciamos introduzindo o operador integral de ordem inteira $n \in \mathbb{N}$ de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Tal operador integral, de ordem inteira 1 e n , é definido por

$$If(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1 \quad \text{e} \quad I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_2 dt_1.$$

A proposição abaixo fornece uma fórmula geral para o operador integral de ordem inteira n , fundamental para a definição da integral fracionária.

Teorema 3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função f é dada por*

$$I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds = \phi_n(t) * f(t).$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n . Para $n = 1$,

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(s) ds = \int_0^t \underbrace{\frac{(t-s)^{(1-1)}}{(1-1)!}}_1 f(s) ds = \phi_1(t) * f(t),$$

na qual a última igualdade é consequência das Definições 3 e 5. Considerando a igualdade válida para n , segue pela definição do operador integral e invertendo a ordem de integração,

$$\begin{aligned} I^{n+1}f(t) &= I[I^n f(t)] = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds du = \int_0^t \int_s^t \frac{(u-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) du ds \\ &= \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \int_s^t (u-s)^{n-1} du ds = \int_0^t \frac{f(s)}{(n-1)!} \left[\frac{(u-s)^n}{n} \right]_{u=s}^{u=t} ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s) ds = \phi_{n+1}(t) * f(t). \end{aligned}$$

□

A generalização do operador integral de ordem inteira para o de ordem não inteira é possível utilizando a generalização fracionária do conceito de fatorial através da Função Gama, discutida na Seção 3.

Definição 7. *Seja f uma função integrável. A integral fracionária de ordem $\alpha > 0$ de f , denotada por $I^\alpha f(t)$, é*

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds.$$

Definimos também que $I^0 f(t) = f(t)$.

Com isso, podemos apresentar a derivada fracionária segundo Caputo.

Definição 8. *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n-1 < \beta \leq n$. A derivada de Caputo de ordem β de $f(x)$, com $x > 0$, denotada por $D^\beta f(x)$, é*

$$D^\beta f(x) = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\beta+1-n}} ds.$$

Observemos que se $\beta = n$, então

$$D^\beta[f(x)] = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = I^0[D^n f(x)] = D^n f(x).$$

Isto é, a derivada usual é um caso particular da derivada fracionária segundo Caputo.

A Transformada de Laplace da derivada de Caputo é calculada no teorema a seguir.

Teorema 4. *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n-1 < \beta \leq n$. Então*

$$\mathcal{L}[D^\beta f(t)] = s^{\beta-n} \mathcal{L}[D^n f(t)].$$

Demonstração. Pelas Definições da Derivada e Integral fracionárias, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^\beta f(t)] &= \mathcal{L}[I^{n-\beta} D^n f(t)] \\ &= \mathcal{L}[\phi_{n-\beta}(t) * D^n f(t)].\end{aligned}$$

Utilizando agora a Proposição 1 e a Equação (2)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D^\beta f(t)] &= \mathcal{L}[\phi_{n-\beta}(t)] \cdot \mathcal{L}[D^n f(t)] \\ &= s^{\beta-n} \mathcal{L}[D^n f(t)].\end{aligned}$$

□

5 Modelos Matemáticos Fracionários

No cálculo fracionário, modelos matemáticos buscam representar de forma abstrata fenômenos e processos utilizando equações diferenciais que possuem derivadas de ordens não inteiras. A utilização de modelos fracionários auxilia na compreensão de fenômenos naturais como em mecânica dos fluídos, nas engenharias, biomatemática, probabilidade, sendo utilizado inclusive na área da saúde. Tais modelos possuem grande importância na pesquisa matemática visto que contribuem para o desenvolvimento de novos métodos e teorias na área.

Nesta seção apresentamos alguns modelos envolvendo equações diferenciais clássicas, mas com sua abordagem fracionária, utilizando a Derivada Fracionária segundo Caputo. O objetivo é analisar o comportamento das soluções do modelo fracionário em comparação com o modelo clássico. As principais referências deste estudo são [9] e [10].

5.1 Crescimento populacional de Malthus

O modelo de crescimento populacional Malthusiano, proposto por Malthus em 1798, é aplicado em problemas envolvendo uma dinâmica populacional e amplamente estudado na literatura. Pode ser utilizado, por exemplo, em populações de microrganismos, como bactérias e fungos (ver [11]).

De um modo geral, é considerada uma população cujo número de indivíduos no instante t varia em uma taxa de variação proporcional a esse número. Isto é, sendo $P(t)$ a população no instante t e $k \in \mathbb{R}$ a constante de proporcionalidade, podemos escrever a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t). \quad (5)$$

Substituindo em (5) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$ e considerando a condição inicial $P(0) = P_0$, obtemos o problema fracionário

de valor inicial

$$\begin{cases} D^\alpha P(t) = kP(t), \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (6)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e usando sua linearidade, segue que

$$\mathcal{L}[D^\alpha P(t)] - k\mathcal{L}[P(t)] = 0.$$

Pelos Teorema 4 (com $n = 1$) e o Teorema 1,

$$\begin{aligned} s^{\alpha-1} \mathcal{L}[DP(t)] - k\mathcal{L}[P(t)] &= 0 \\ s^{\alpha-1} [s\mathcal{L}[P(t)] - P(0)] - k\mathcal{L}[P(t)] &= 0 \\ s^\alpha \mathcal{L}[P(t)] - s^{\alpha-1} P(0) - k\mathcal{L}[P(t)] &= 0. \end{aligned}$$

Denotando $F(s) = \mathcal{L}[P(t)]$, e substituindo a condição inicial, obtemos

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k} P_0.$$

Assim, comparando a solução obtida acima com a transformada de Laplace das Funções de Mittag-Leffler, obtido na Equação (3), podemos concluir que a solução do problema fracionário de valor inicial (6) é

$$P(t) = P_0 E_\alpha(kt^\alpha).$$

Na Figura 1, representamos alguns gráficos de $P(t)$ para diferentes valores da ordem α e $k > 0$, em que podemos verificar que quando a ordem α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário. De fato, notemos que

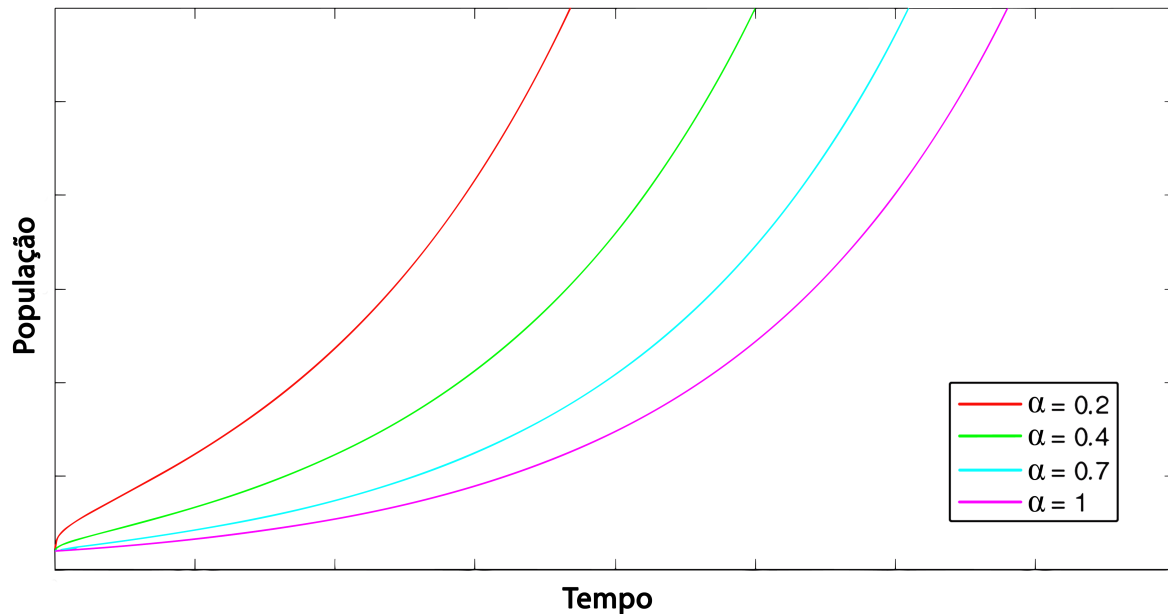
$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(t) = P_0 E_1(kt) = P_0 e^{kt}.$$

5.2 Lei do Resfriamento de Newton

No século XVII, o cientista britânico Isaac Newton desenvolveu um modelo para explicar a variação de temperatura, que hoje é reconhecido como a Lei do Resfriamento de Newton. De acordo com Newton, a variação da temperatura de um corpo no decorrer do tempo é proporcional a diferença de temperatura entre o corpo e o meio no qual ele se encontra. Matematicamente, é possível escrever a Lei do resfriamento de Newton pela seguinte equação diferencial ordinária

$$C'(t) = -k(C(t) - a), \quad (7)$$

Figura 1: Gráfico de soluções do modelo de crescimento populacional malthusiano fracionário para diferentes valores da ordem α .



Fonte: Elaborada pelos autores, utilizando o *software* Matlab.

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade, $C(t)$ é a temperatura do objeto no instante $t > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ é a temperatura do meio.

Substituindo em (7) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$ e considerando a condição inicial $C(0) = C_0$, obtemos o problema fracionário de valor inicial

$$\begin{cases} D^\alpha C(t) = -k(C(t) - a), \\ C(0) = C_0. \end{cases} \quad (8)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e usando a sua linearidade, segue que

$$\mathcal{L}[D^\alpha C(t)] + k\mathcal{L}[C(t)] - ak\mathcal{L}[1] = 0.$$

Pelos Teorema 4 (com $n = 1$) e Teorema 1,

$$\begin{aligned} s^{\alpha-1} \mathcal{L}[DC(t)] + k\mathcal{L}[C(t)] - ak\mathcal{L}[1] &= 0 \\ s^{\alpha-1} [s\mathcal{L}[C(t)] - C(0)] + k\mathcal{L}[C(t)] - \frac{ak}{s} &= 0 \\ s^\alpha \mathcal{L}[C(t)] - s^{\alpha-1} C(0) + k\mathcal{L}[C(t)] - \frac{ak}{s} &= 0. \end{aligned}$$

Denotando $F(s) = \mathcal{L}[C(t)]$ e substituindo a condição inicial, obtemos

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} C_0 + a \frac{k}{s(s^\alpha + k)}.$$

Observemos que

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} C_0 + a \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} - \frac{1}{s} \right) = (C_0 + a) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} + \frac{a}{s}.$$

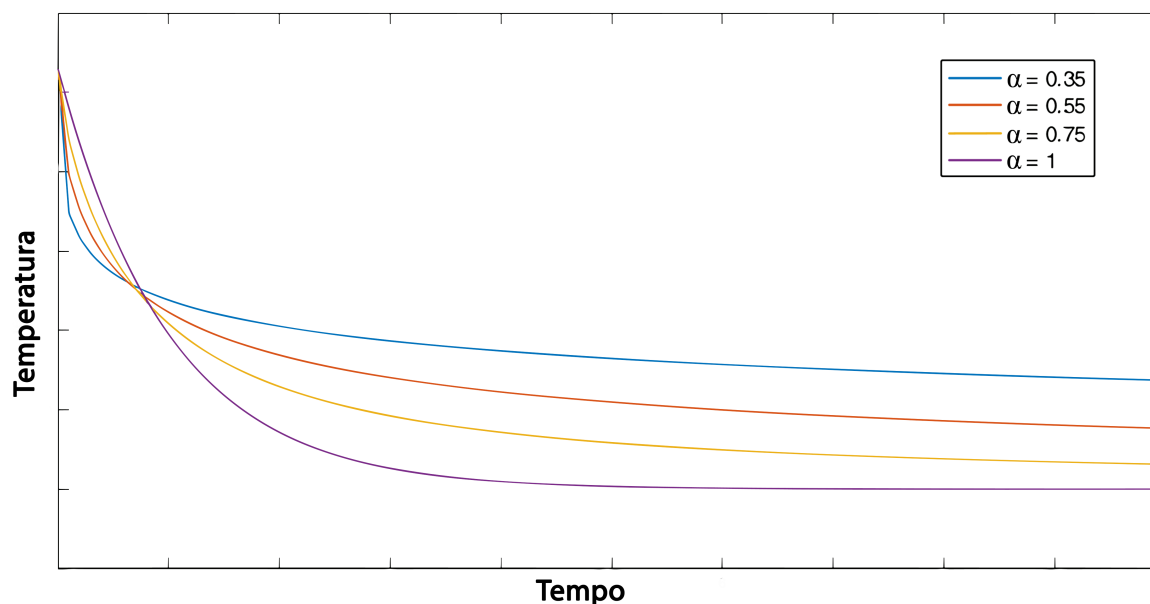
Portanto, segue de (3) que a solução do problema fracionário de valor inicial (8) é

$$C(t) = (C_0 + a)E_\alpha(-kt^\alpha) - a.$$

Na Figura 2 representamos alguns gráficos de $C(t)$ para diferentes valores da ordem α , com $C_0 > a$ e $k > 0$, em que podemos verificar que quando a ordem α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário. De fato, notemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} C(t) = (C_0 + a)E_1(-kt) - a = (C_0 + a)e^{-kt} - a.$$

Figura 2: Gráfico de soluções da equação do resfriamento de Newton para diferentes valores da ordem α .



Fonte: Elaborada pelos autores, utilizando o *software* Matlab.

5.3 Equação Logística de Verhulst

Em 1838, Pierre François Verhulst desenvolveu um modelo matemático de crescimento populacional aplicável a ambientes com restrições de recursos, introduzindo uma variável que representa a capacidade de suporte do meio. Ao contrário do modelo malthusiano (estudado na Seção 5.1), o modelo de Verhulst prevê um crescimento populacional limitado, uma vez que, ao atingir a capacidade de suporte, a população tende à estabilização (ver [12]).

Neste trabalho, será considerada uma versão linearizada do modelo, o que permite simplificar sua análise e, em particular, viabiliza o uso da Transformada de Laplace no contexto da abordagem fracionária.

O modelo logístico, nessa formulação, é descrito pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d}{dt}v(t) = k \left(\frac{1}{r} - v(t) \right), \quad (9)$$

onde k é a taxa de crescimento, r é a capacidade de suporte, e $N(t) = v^{-1}(t)$ representa o número de indivíduos.

Substituindo em (9) a derivada de ordem 1 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $0 < \alpha \leq 1$ e considerando a condição inicial $v(0) = v_0$, obtemos o problema fracionário de valor inicial

$$\begin{cases} D^\alpha v(t) = k \left(\frac{1}{r} - v(t) \right), \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (10)$$

Utilizando o mesmo raciocínio dos problemas anteriores, aplicando a Transformada de Laplace, usando a sua linearidade, os Teoremas 4 e 1, e denotando $\mathcal{L}[v(t)] = F(s)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha v(t)] &= \frac{k}{r} \mathcal{L}[1] - k \mathcal{L}[v(t)] \\ s^{\alpha-1} [sF(s) - v_0] &= k \left[\frac{1}{rs} - F(s) \right] \\ F(s) &= \frac{1}{r} \left[\frac{ks^{-1}}{s^\alpha + k} \right] + v_0 \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{ks^{-1}}{s^\alpha + k} = \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}$, segue que

$$F(s) = \frac{1}{rs} + \left(v_0 - \frac{1}{r} \right) \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k} \right].$$

Assim, por (3), obtemos que a solução do problema fracionário de valor inicial (10) é

$$v(t) = \frac{1}{r} + \left[v_0 - \frac{1}{r} \right] E_\alpha(-kt^\alpha).$$

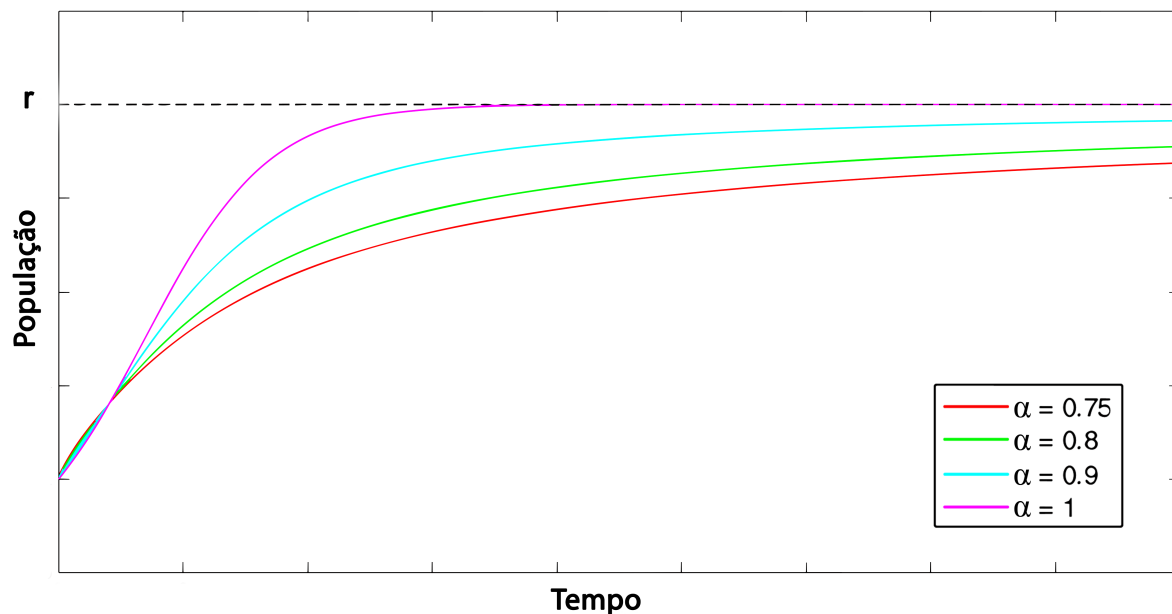
Portanto, o número de indivíduos em função do tempo é

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v_0 - \frac{1}{r}\right] E_{\alpha}(-kt^{\alpha})}.$$

Na Figura 3 representamos alguns gráficos de $N(t)$ para diferentes valores da ordem α e $k > 0$, onde podemos verificar que quando a ordem α tende a 1, o caso inteiro é um caso particular do caso fracionário. De fato, notemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v_0 - \frac{1}{r}\right] e^{-kt}}.$$

Figura 3: Gráfico de soluções da equação logística de Verhulst para diferentes valores da ordem α



Fonte: Elaborada pelos autores, utilizando o *software* Matlab.

Outra propriedade que podemos observar é que o problema fracionário apresenta o mesmo valor suporte do problema usual de ordem inteira. Isso decorre do fato que se $0 < \alpha \leq 1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\alpha}(-kt^{\alpha}) = 0$ (ver [5], p. 35), e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = r.$$

Ou seja, para qualquer valor de $0 < \alpha \leq 1$, todas as soluções convergem para o valor suporte r .

5.4 Oscilador Harmônico

Utilizando a 2ª Lei do movimento de Newton aplicada a sistemas que se repetem no tempo, a equação

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \mu \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = g(t)$$

descreve o deslocamento/alongamento de um corpo de massa m , desde a posição de equilíbrio até o instante t , com força elástica $-kx(t)$ (de acordo com a Lei de Hooke), força de amortecimento $-\mu \frac{d}{dt} x(t)$ e uma força externa $g(t)$, onde μ e k são constantes positivas, sendo k a constante elástica da mola.

Para o caso particular em que não há atrito ou forças que atuam no sistema massa-mola (oscilador harmônico simples), temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (11)$$

onde ω_0^2 é a razão entre a constante da mola e a massa.

Substituindo em (11) a derivada de ordem 2 pela derivada fracionária segundo Caputo de ordem $1 < \alpha \leq 2$ e considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, obtemos o problema fracionário de valor inicial

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Utilizamos a mesma abordagem dos problemas das seções anteriores, e aplicando a Transformada de Laplace e usando sua linearidade, segue que

$$\mathcal{L}[D^\alpha x(t)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] = 0.$$

Pelos Teorema 4 (com $n = 2$) e Teorema 1, obtemos

$$\begin{aligned} s^{\alpha-2} \mathcal{L}[D^2 x(t)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] &= 0 \\ s^{\alpha-2} [s^2 \mathcal{L}[x(t)] - sx(0) - x'(0)] + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] &= 0 \\ s^\alpha \mathcal{L}[x(t)] - s^{\alpha-1} x(0) - s^{\alpha-2} x'(0) + \omega^\alpha \mathcal{L}[x(t)] &= 0. \end{aligned}$$

Denotando $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, temos $X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x'(0)$. Substituindo as condições iniciais, concluímos

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} x_0.$$

Assim, por (3), podemos concluir que a solução do problema fracionário de valor inicial (12), é

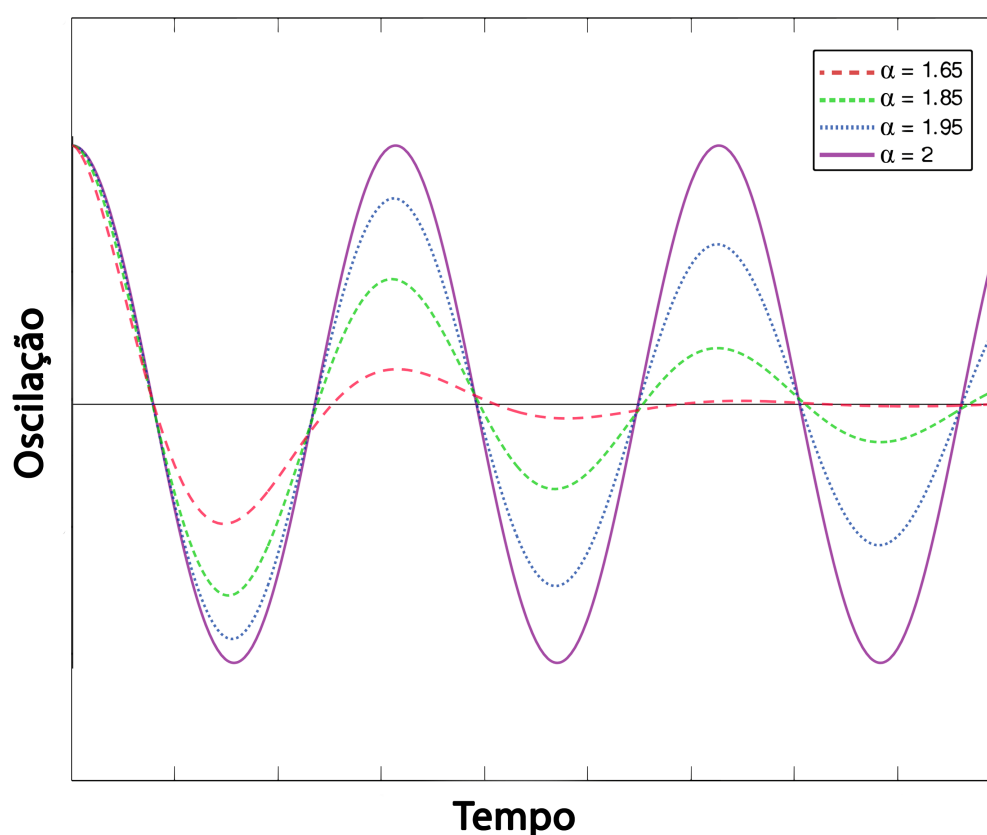
$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha).$$

Na Figura 4, representamos alguns gráficos de $x(t)$ para diferentes valores da ordem α , em que podemos verificar que quando α tende a 2, a solução do oscilador harmônico fracionário tende para a solução do oscilador harmônico simples. De fato, notemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} x(t) = x_0 E_2(-\omega^2 t^2) = x_0 \cos(\omega t).$$

Um fenômeno interessante da solução do problema na versão fracionária, é que ao diminuir a ordem da derivada do problema, obtemos na solução uma função com comportamento semelhante a solução de um oscilador harmônico amortecido (com atrito).

Figura 4: Gráficos da solução do oscilador harmônico fracionário para diferentes valores da ordem α .



Fonte: Elaborada pelos autores, utilizando o *software* Matlab.

6 Conclusão

No desenvolvimento de modelos matemáticos, busca-se representar com fidelidade o comportamento dos dados do fenômeno estudado. Nesse contexto, a abordagem fracionária permite, ao analisar as mudanças no comportamento das soluções para diferentes valores da ordem da derivada, obter maior flexibilidade na modelagem, possibilitando não apenas o ajuste dos parâmetros do modelo, mas também a identificação adequada da ordem da derivada.

Ao modelarmos um problema, frequentemente precisamos realizar simplificações para traduzir fenômenos complexos da vida real em representações matemáticas mais acessíveis. No entanto, sabemos que essas simplificações podem reduzir a taxa de variação do fenômeno, afetando a fidelidade do modelo. Em alguns casos, em vez de introduzirmos mais simplificações, podemos melhorar a representação do sistema ajustando a ordem da derivada. Dessa forma, conseguimos capturar características do fenômeno sem comprometer sua dinâmica.

O Oscilador Harmônico Fracionário, estudado na Seção 5.4, é um exemplo onde a alteração da ordem da derivada pode evitar o uso de simplificações no modelo, uma vez que ao substituirmos a ordem 2 da derivada do oscilador clássico para a ordem não inteira $1 < \alpha \leq 2$, obtivemos um oscilador harmônico com amortecimento. É possível observar que com o decorrer do tempo, em ordens mais próximas a 1, a posição do oscilador tende a 0, sugerindo ser possível considerar todo o atrito do modelo, reduzindo a ordem da equação diferencial para um número não inteiro entre um e dois.

Observamos um comportamento análogo nos modelos fracionários do resfriamento de Newton e logístico de Verhulst, presentes nas Seções 5.2 e 5.3. Ao substituirmos a ordem 1 da derivada do modelo original pela ordem não inteira $0 < \alpha \leq 1$, obtivemos soluções que decrescem mais lentamente que no caso clássico, sugerindo assim, um decrescimento na taxa de variação do modelo.

Por outro lado, no modelo de crescimento populacional de Malthus em sua versão fracionária, conforme discutido na Seção 5.1, notamos um comportamento distinto. Ao substituirmos a ordem da derivada de 1 por uma ordem não inteira $0 < \alpha \leq 1$, o resultado é um crescimento mais acelerado, o oposto do que observamos nos outros modelos. Portanto, é possível concluir que a utilização de uma abordagem fracionária, através da redução de ordem das derivadas em relação às versões clássicas, influencia o comportamento de cada modelo de maneira distinta.

Outro ponto de extrema relevância é que, em todos os modelos, as soluções fracionárias convergem para as soluções originais do problema. Isso significa que a solução clássica é, na verdade, um caso particular da solução fracionária, tornando as versões fracionárias como generalizações do modelo clássico.

Além disso, no caso do modelo logístico de Verhulst, assim como em sua versão clássica, todas as soluções fracionárias, independentemente do valor da ordem $0 < \alpha \leq 1$, convergem para

a capacidade suporte. Dessa forma, conseguimos preservar uma das principais características e vantagens desse modelo em relação a outros modelos de crescimento populacional.

Com este trabalho, reforçamos a importância da abordagem fracionária na modelagem matemática. Embora o significado físico das derivadas fracionárias ainda não seja totalmente compreendido, os resultados que obtivemos contribuem para o avanço das pesquisas em Cálculo Fracionário e na modelagem de fenômenos reais por meio de equações de ordem não inteira.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado sem apoio financeiro.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

As obras submetidas ao jornal BEJOM estão sujeitas à licença [CC BY 4.0](#). Sob esta licença, os autores concedem aos leitores o direito de compartilhar, adaptar e utilizar as obras, inclusive para fins comerciais, desde que o crédito apropriado seja dado aos autores. Quaisquer modificações devem ser indicadas. Não há restrições adicionais além das estabelecidas pela licença.

Referências

- [1] Miller, K. S.; Ross, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. 1ª ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [2] Oliveira, H. S. Introdução ao cálculo de ordem arbitrária. Diss. de mistr. Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- [3] Camargo, R. F.; C. de Oliveira, E.; Chiacchio, A. O. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [4] Oliveira, E. C.; Machado, J. A. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Math. Probl. Eng.* (2014), Art. ID 238459, 6. DOI: 10.1155/2014/238459.

-
- [5] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Amsterdã: Elsevier Science, 1998.
- [6] Ortigueira, M. D.; Machado, J. A. T. What is a fractional derivative? *J. Comput. Phys.* **293** (2015), 4–13. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.07.019.
- [7] Boyce, W. E.; DiPrima, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [8] Oliveira, E. C. de. *Funções especiais com aplicações*. 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [9] Kuroda, L. K. B.; Gomes, A. V.; Tavoni, R.; Mancera, P. F. A.; Varalta, N.; Camargo, R. F. Unexpected behavior of Caputo fractional derivative. *Comput. Appl. Math.* (2017).
- [10] Varalta, N. Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logística. Diss. de mest. Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, 2014.
- [11] Bassanezi, R. C. Malthus and the evolution of models. *Ciência e Natura* **36** (2014), no. 3, 97–100.
- [12] Kot, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
-

Corresponding Author:

Rafael Antônio Rossato, rafaelrossato@ufu.br

Submitted: August 17, 2025

Accepted: March 31, 2026

Published: Jul 07, 2026

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>
