



OS QUATÉRNIOS, A DESIGUALDADE DE PTOLOMEU E O PROCESSO DE INVERSÃO.

Daniel Cariello

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: dcariello@ufu.br

<https://orcid.org/0000-0001-5548-5453> 

Mathematics Subject Classification (MSC): 11R52, 97H40, 97H60.

Resumo Nesse trabalho fazemos uma introdução aos Quatérnios. Discutimos como as suas operações podem ser realizadas e suas conexões com alguns resultados de geometria analítica. Também verificamos algumas propriedades dessas operações e como se relacionam com alguns resultados pouco conhecidos como por exemplo a desigualdade de Ptolomeu. Essa desigualdade envolve as normas das diferenças de quatro vetores em um espaço vetorial real com produto interno. Apresentamos uma demonstração utilizando os Quatérnios e também discutimos quando a igualdade ocorre. Por fim mostramos como esse resultado pode ser estendido utilizando o processo de inversão que generaliza a inversão de elementos dentro do Quatérnios. Para isso utilizamos alguns resultados sobre matrizes de Gram e matrizes envolvendo distâncias entre elementos.

Palavras-chave. Quatérnios. desigualdade de Ptolomeu. inversão.

THE QUATERNIONS, PTOLEMY'S INEQUALITY, AND THE INVERSION PROCESS.

Abstract. In this work, we introduce quaternions. We discuss how their operations can be performed and their connections to some results in analytic geometry. We also verify some properties of these operations and how they relate to some little-known results such as Ptolemy's inequality. This inequality involves the norms of the differences of four vectors in a real vector space with an inner product. We present a proof using quaternions and also discuss when equality occurs. Finally, we show how this result can be extended using the inversion process, which generalizes the inversion of elements within quaternions. For this, we use some results on Gram matrices and matrices involving distances between elements.

Keywords. quaternions. Ptolomy's inequality. inversion

LOS CUATERNIONES, LA DESIGUALDAD DE PTOLOMEO Y EL PROCESO DE INVERSIÓN.

Resumen. En este trabajo, introducimos los cuaterniones. Analizamos cómo se pueden realizar sus operaciones y sus conexiones con algunos resultados en geometría analítica. También verificamos algunas propiedades de estas operaciones y su relación con resultados poco conocidos, como la desigualdad de Ptolomeo. Esta desigualdad involucra las normas de las diferencias de cuatro vectores en un espacio vectorial real con un producto interno. Presentamos una demostración utilizando cuaterniones y también analizamos cuándo ocurre la igualdad. Finalmente, mostramos cómo este resultado puede extenderse mediante el proceso de inversión, que generaliza la inversión de elementos dentro de los cuaterniones. Para ello, utilizamos algunos resultados sobre matrices de Gram y matrices que involucran distancias entre elementos.

Palabras clave. cuaterniones, la desigualdad de Ptolomeo, la inversión.

1 Introdução

Stillwell conta em seu livro - *Mathematics and Its History* - que o matemático William Rowan Hamilton tentou por 13 anos generalizar os números complexos para dimensão 3 (ver capítulo 20 do livro de Stillwell [1]). Entretanto foram necessárias quatro dimensões para a tarefa ser exitosa.

Um argumento heurístico para justificar as 4 dimensões é o seguinte: Para se construir um número complexo são necessários dois números reais a, b e uma letra i . Assim, podemos escrevê-lo como $a + bi$. Agora, para se construir um quatérnio são necessários dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ e uma letra j . Assim, podemos escrevê-lo como

$$a + bi + (c + di)j.$$

Distribuindo j no produto e substituindo ij por k , obtemos $a + bi + cj + dk$.

O símbolo que denota o conjunto dos Quatérnios é o $\mathbb{H}$ em homenagem ao Hamilton.

Portanto,

$$\mathbb{H} = \{a + bi + (c + di)j \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Em geometria analítica é comum denotar um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ por $bi + cj + dk$. Podemos utilizar isso para escrever um quatérnio qualquer como $a + v$, ou seja, todo quatérnio tem uma parte real (a) e outra vetorial (v). Assim,

$$\mathbb{H} = \{a + v \mid a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Além de ser um extensão dos números complexos, os Quatérnios também são importantes na classificação dos anéis de divisão algébricos sobre os reais. Essa classificação diz que, a menos de isomorfismos, os únicos anéis com essas propriedades são $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ (ver o Theorem 7.3.1 no livro do Herstein [2]).

Joseph Louis Lagrange provou em seu artigo [3] que todo número inteiro positivo pode ser escrito como soma de até quatro quadrados inteiros. Existe uma demonstração desse resultado, distinta daquela obtida por Lagrange, utilizando os Quatérnios com coeficientes inteiros (ver Theorem 7.4.1 no livro do Herstein [2]).

Esses são apenas alguns exemplos de aplicações que deixam claro a importância de $\mathbb{H}$ em matemática. O próprio Hamilton escreveu um livro [4] sobre essas aplicações.

Nosso intuito com esse artigo é fazer uma exposição sobre esse conjunto de números discutindo algumas de suas propriedades. Além disso, queremos mostrar que alguns resultados se tornam mais acessíveis através da manipulação dessas propriedades.

Depois de explicar a multiplicação em $\mathbb{H}$ e algumas relações dessa multiplicação com a norma e a conjugação em $\mathbb{H}$, iremos aplicar esses resultados na demonstração da desigualdade de Ptolomeu (ver a Proposition 10.9.2 do livro do Berger [5]).

Esse resultado afirma que em um espaço vetorial real com produto interno a seguinte desigualdade sempre é válida para os vetores a, b, c, d :

$$\|a - b\| \|c - d\| \leq \|a - c\| \|b - d\| + \|c - b\| \|a - d\|,$$

onde $\|a\|$ é a norma de a proveniente do produto interno. Além disso, se a igualdade ocorrer então a, b, c, d são colineares ou cocíclicos (pertencem a um círculo).

Provamos essa desigualdade em um espaço vetorial com produto interno reduzindo o problema aos Quatérnios. Depois mostramos que a igualdade ocorre quando a, b, c e d incidem sobre uma reta ou um círculo. Isso é feito reduzindo o problema aos números complexos.

Em geral a desigualdade de Ptolomeu é provada no plano, como na Proposition 10.9.2 do livro do Berger [5] e no Theorem 5.12 do livro do Coxeter [6]. Além disso, normalmente sua prova está baseada no fato que a inversão em $\mathbb{H}$ dos elementos de uma reta contida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ formam um círculo. Descrevemos essa outra demonstração brevemente na Observação 2.

Evitamos essa propriedade da inversão na demonstração da igualdade de Ptolomeu para apresentamos um resultado bem mais geral no fim do artigo (ver Proposição 4).

Esse resultado já não depende dos Quatérnios, mas está baseado em uma extensão do processo de inversão para elementos de um espaço vetorial com produto interno (ver Definição 2).

Veremos que subespaços afins de dimensão k são invertidos em pontos de esferas de dimensão k e vice-versa (ver Proposição 3). Esse e outros resultados sobre inversão podem ser lidos na seção 10.8 do livro do Berger [5].

Depois veremos o resultado final que diz que se soubermos apenas as distâncias entre elementos distintos de um espaço vetorial com produto interno então podemos estimar a dimensão do subespaço afim que os contém ou da esfera que os contém. Para isso basta calcular o posto de uma matriz. A demonstração desse resultado nos fornece uma demonstração completamente diferente da desigualdade de Ptolomeu (ver Observação 4). Não conhecemos outros trabalhos

que relacionam essa matriz de distâncias com a desigualdade de Ptolomeu.

Comecemos esse artigo com as definições de adição e multiplicação em $\mathbb{H}$.

1.1 Adição e Multiplicação em $\mathbb{H}$

A maneira rigorosa de se estudar a adição e a multiplicação em $\mathbb{H}$ seria definindo-as conforme as equações (1) e (2), que veremos a seguir, e depois deduzindo as propriedades importantes como associatividade, a distributividade, etc.

Entretanto existe uma maneira mais eficiente de se estudar essa adição e multiplicação que apresentamos a seguir. Assumiremos que a multiplicação em $\mathbb{H}$ satisfaz algumas propriedades e chegaremos em duas fórmulas para realizá-lo (ver equações (2) e (4)).

Comecemos com a adição. A adição de elementos em $\mathbb{H}$ é feita da maneira mais natural possível. Se $(d_1 + d_2j)$ e $(e_1 + e_2j)$ são elementos de $\mathbb{H}$, onde d_1, d_2, e_1, e_2 estão em $\mathbb{C}$, então

$$(d_1 + d_2j) + (e_1 + e_2j) = (d_1 + e_1) + (d_2 + e_2)j. \quad (1)$$

Note que, desta forma, $\mathbb{H}$ se torna fechado para a adição.

Agora se escrevemos $d_1 = a + bi$, $d_2 = c + di$, $e_1 = a' + b'i$ e $e_2 = c' + d'i$ e substituímos ij por k obtemos

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

Existe ainda uma terceira maneira de escrever a adição de dois Quatérnios quando os denotamos por $(a + v)$ e $(a' + v')$, onde $a, a' \in \mathbb{R}$ e $v, v' \in \mathbb{R}^3$:

$$(a + v) + (a' + v') = (a + a') + (v + v').$$

Já a multiplicação em $\mathbb{H}$ é um pouco diferente. Ele está baseado na seguinte expressão, que foi escrita por Hamilton na ponte onde caminhava no momento da descoberta dos Quatérnios,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Essa expressão já diz os valores dos produtos $i^2 = j^2 = k^2$. Entretanto, a última igualdade levanta uma dúvida: Quem está sendo multiplicado primeiro o ij ou jk ?

Na verdade a fórmula $ijk = -1$ já expressa uma propriedade importante que valerá para todos os Quatérnios, a multiplicação é associativa: $(ij)k = i(jk) = -1$.

Também exigiremos da multiplicação em $\mathbb{H}$ que ela seja distributiva e que os números reais comutem com todos os i, j, k do mesmo modo que ocorre com os números reais multiplicados

por i em $\mathbb{C}$. Essas propriedades básicas já nos dizem o seguinte

$$-1.k = ((ij)k)k = (ij)(k^2) = (ij)(-1).$$

Portanto, $ij = k$. Vejamos o valor de todos os outros produtos de i, j, k dois a dois.

- Multiplicando a equação $ij = k$ à esquerda por i e à direita por k obtemos $-jk = -i$, ou seja, $jk = i$.
- Multiplicando a equação $ij = k$ à direita por j obtemos $kj = -i$.
- Multiplicando a equação $ij = k$ à esquerda por i obtemos $-j = ik$.
- Multiplicando j à esquerda e i à direita na equação $jk = i$ obtemos $ki = j$.
- Multiplicando a equação $ki = j$ à direita por i obtemos $-k = ji$.

Um maneira mnemônica de lembrar esses produtos é a seguinte. Por exemplo, através do argumento heurístico da introdução, lembramos que $ij = k$. Depois disso podemos fazer trocas cíclicas das posições entre i, j, k na equação $ij = k$:

$$\begin{array}{ccc} i & j & = k \\ \text{resultando em } jk & = i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} j & k & = i \\ \text{resultando em } ki & = j. \end{array}$$

Quando dois elementos dentre i, j, k forem multiplicados, mas não na ordem das trocas cíclicas, o resultado é menos o valor do produto que se obteria na ordem cíclica, ou seja,

$$ji = -k, \quad kj = -i \quad \text{e} \quad ik = -j.$$

A Tabela 1 resume esses produtos. Cada elemento da tabela é obtido multiplicando os elementos da primeira coluna com os elementos da primeira linha nessa ordem.

Tabela 1: Alguns produtos em $\mathbb{H}$.

1	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Fonte: autor.

Agora sabendo os valores dessa tabela, que a multiplicação é distributiva e associativa e que os números reais comutam com qualquer i, j, k , podemos escrever a multiplicação das duas seguintes maneiras.

Sejam $(d_1 + d_2j)$ e $(e_1 + e_2j)$ elementos de $\mathbb{H}$, onde d_1, d_2, e_1, e_2 estão em $\mathbb{C}$. Como $ij = k = -ji$ e os números reais comutam com i e j então

$$e_1j = j\overline{e_1} \text{ e } e_2j = j\overline{e_2},$$

onde $\overline{e_1}$ é o conjugado de e_1 em $\mathbb{C}$. Assim,

$$(d_1 + d_2j)(e_1 + e_2j) = d_1e_1 + d_1e_2j + d_2je_1 + d_2je_2j = d_1e_1 + d_1e_2j + d_2\overline{e_1}j + d_2\overline{e_2}j^2.$$

Portanto, a definição natural da multiplicação em $\mathbb{H}$ é a seguinte

$$(d_1 + d_2j)(e_1 + e_2j) = (d_1e_1 - d_2\overline{e_2}) + (d_1e_2 + d_2\overline{e_1})j. \quad (2)$$

Note que, desta forma, $\mathbb{H}$ se torna fechado para a multiplicação

A segunda maneira de escrever a multiplicação em $\mathbb{H}$ é utilizando a distributividade e a associatividade e os valores da tabela 1. Dessa forma obtemos primeiramente a seguinte multiplicação de vetores do $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} (bi + cj + dk)(b'i + c'j + d'k) = & -bb' - cc' - dd' + \\ & +(cd' - c'd)i + (db' - bd')j + (bc' - cb')k. \end{aligned}$$

Observe que essa equação relaciona a multiplicação em $\mathbb{H}$ de dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$ com o produto interno deles e com o produto vetorial:

$$vw = -v^tw + v \times w. \quad (3)$$

Finalmente, através da distributividade e da equação (3) podemos reescrever a multiplicação de dois Quatérnios quaisquer por

$$(a + v)(b + w) = ab + bv + aw + vw = (ab - v^tw) + bv + aw + v \times w. \quad (4)$$

Veamos agora algumas propriedades da multiplicação, da inversão e da conjugação em $\mathbb{H}$.

2 Propriedades da multiplicação em $\mathbb{H}$ e da conjugação

Nessa seção veremos algumas propriedades da multiplicação dos Quatérnios relativas à conjugação e à norma. Esses resultados serão utilizados posteriormente.

Definição 1. Definimos o conjugado de $q = a + bi + cj + dk$ por

$$\bar{q} = \overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk.$$

Se escrevermos $m = c + dj$, onde $c, d \in \mathbb{C}$, ou $n = a + v$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$ então podemos reescrever a conjugação como

$$\bar{m} = \bar{c} - dj \text{ ou } \bar{n} = a - v,$$

onde $\bar{c}$ é a conjugação de c em $\mathbb{C}$.

Definimos a norma de q por

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Ela também pode ser escrita como $\|m\| = \sqrt{c\bar{c} + d\bar{d}}$ ou $\|n\| = \sqrt{a^2 + v^t v}$.

Abaixo apresentamos as propriedades da multiplicação, da norma e da conjugação em $\mathbb{H}$ que usaremos nesse artigo.

Lema 1. Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Então

$$(i) \quad q_1 \bar{q}_1 = \bar{q}_1 q_1 = \|q_1\|^2.$$

$$(ii) \quad \text{Se } q_1 \neq 0 \text{ então } q_1^{-1} = \frac{\bar{q}_1}{\|q_1\|^2}.$$

$$\text{Em particular, se } q_1 \in \mathbb{R}^3 \text{ então } q_1^{-1} = -\frac{q_1}{\|q_1\|^2} \in \mathbb{R}^3.$$

$$(iii) \quad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

$$(iv) \quad \|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|,$$

$$(v) \quad \overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2.$$

$$(vi) \quad \|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\| \text{ (desigualdade triangular). Além disso, a igualdade só ocorre quando } q_2 = q q_1, \text{ onde } q \text{ é um número real não negativo ou } q_1 = 0.$$

Demonstração. Iremos utilizar fatos básicos da conjugação em $\mathbb{C}$ na demonstração desse lema. Sejam q_1 como $a + bj$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $q_2 = c + dj$, onde $c, d \in \mathbb{C}$.

Para o item (i), note que $\bar{q}_1 = \bar{a} - bj$. Portanto,

$$q_1 \bar{q}_1 = (a + bj)(\bar{a} - bj) = a\bar{a} + b\bar{b} + (ba - ab)j = a\bar{a} + b\bar{b} = \|q_1\|^2.$$

Agora,

$$\overline{q_1} q_1 = (\overline{a} - bj)(a + bj) = \overline{a}a + (-b)(-\overline{b}) + (-b\overline{a} + \overline{a}b)j = a\overline{a} + b\overline{b} = \|q_1\|^2.$$

O item (ii) segue do item (i).

Para o item (iii), como $q_1 q_2 = (ac - b\overline{d}) + (ad + b\overline{c})j$ então

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{(ac - b\overline{d}) + (ad + b\overline{c})j} = \overline{ac - b\overline{d}} - (ad + b\overline{c})j = \overline{a} \overline{c} - \overline{b} \overline{d} - (ad + b\overline{c})j.$$

Agora

$$\overline{q_2} \overline{q_1} = (\overline{c} - dj)(\overline{a} - bj) = \overline{c} \overline{a} - d\overline{b} + (-\overline{c}b - ad)j.$$

Assim temos o que queríamos $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$.

Para o item (iv), note que $\|q_1 q_2\|^2 = (q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})$, pelo item (i).

Agora, pelos itens (iii) e (i) temos que

$$q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \overline{q_2} \overline{q_1} = q_1 \|q_2\|^2 \overline{q_1} = \|q_1\|^2 \|q_2\|^2.$$

Para o item (v), como $q_1 + q_2 = (a + c) + (b + d)j$ então

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{(a + c) + (b + d)j} = (\overline{a} - bj) + (\overline{c} - dj) = \overline{q_1} + \overline{q_2}.$$

Para o item (vi), basta notar que $\frac{q + \overline{q}}{2} \leq \|q\|$, para todo $q \in \mathbb{H}$, e que a igualdade só ocorre quando q for um número real não negativo.

Assim, pelos itens (i) e (v) desse lema

$$\|1 + q\|^2 = (1 + q)(1 + \overline{q}) = 1 + q + \overline{q} + \|q\|^2 \leq 1 + 2\|q\| + \|q\|^2,$$

ou seja, $\|1 + q\| \leq 1 + \|q\|$ e a igualdade só ocorre quando $q + \overline{q} = 2\|q\|$, ou seja, quando q for um número real não negativo.

Agora, se $q_1 = 0$ então vale a igualdade nesse item (vi).

Se $q_1 \neq 0$ então defina $q = q_1^{-1} q_2$ e note que

$$\|q_1 + q_2\| = \|q_1(1 + q)\| = \|q_1\| \|1 + q\| \leq \|q_1\| (1 + \|q\|).$$

Como $q_2 = q_1 q$ então $\|q_2\| = \|q_1\| \|q\|$, ou seja, $\|q\| = \frac{\|q_2\|}{\|q_1\|}$, o que termina demonstração

da desigualdade triangular.

Note que igualdade só ocorre quando $\|(1 + q)\| = 1 + \|q\|$ e isso só ocorre quando q é um número real não negativo. $\square$

Uma consequência imediata do item (iv) desse lema é a seguinte identidade de Lagrange famosa nos cursos de Geometria Analítica.

Corolário 1 (Identidade de Lagrange). *Para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$ temos*

$$\|v\|^2\|w\|^2 = (v^t w)^2 + \|v \times w\|^2.$$

Demonstração. Pela fórmula (3) temos que $vw = -v^t w + v \times w$.

Assim, $\|vw\|^2 = (v^t w)^2 + \|v \times w\|^2$, mas pelo item (iv), $\|vw\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2$. $\square$

Observação 1. Essa identidade de Lagrange é uma das consequências imediatas da multiplicação em $\mathbb{H}$. Além dessa, existem outras. Por exemplo, podemos definir o produto vetorial de $v, w \in \mathbb{R}^3$ através da fórmula (3):

$$v \times w = v^t w + vw.$$

A partir das propriedades da multiplicação em $\mathbb{H}$ podemos provar todas as propriedades básicas do produto vetorial sem recorrer ao determinante. Também podemos provar propriedades menos básicas como a seguinte fórmula que mede a falta de associatividade do produto vetorial. Se $v, w, r \in \mathbb{R}^3$ então

$$(v \times w) \times r - v \times (w \times r) = (rv^t - vr^t)w.$$

Observe que essa diferença é o vetor nulo, se e só se, r, v são linearmente dependentes ou se w for perpendicular a r e v , ou seja, essas são as condições para o produto vetorial ser associativo.

Um outra consequência da multiplicação em $\mathbb{H}$ é a segunda identidade de Lagrange

$$(v \times r) \times w = (rv^t - vr^t)w.$$

Note que o lado direito das duas últimas equações são iguais, o que nos permite concluir que a seguinte identidade de Jacobi é válida

$$(v \times w) \times r + (w \times r) \times v + (r \times v) \times w = 0.$$

Vejamos agora como utilizar as propriedades da multiplicação em $\mathbb{H}$ para demonstrar a

desigualdade de Ptolomeu.

3 A desigualdade de Ptolomeu

A desigualdade de Ptolomeu afirma que para quaisquer elementos a, b, c e d de um espaço vetorial real com produto interno a seguinte desigualdade é válida:

$$\|a - b\| \|c - d\| \leq \|a - c\| \|b - d\| + \|c - b\| \|a - d\|, \quad (5)$$

onde $\|a\|$ é a norma de a proveniente do produto interno.

Além disso, se

$$\|a - b\| \|c - d\| = \|a - c\| \|b - d\| + \|c - b\| \|a - d\|, \quad (6)$$

então a, b, c, d são colineares ou cocíclicos (pertencem ao mesmo círculo).

A primeira simplificação que faremos para provar a desigualdade de Ptolomeu é a seguinte: Basta provarmos para $d = 0$ que ele valerá para qualquer d .

De fato, se

$$\|a - b\| \|c\| \leq \|a - c\| \|b\| + \|c - b\| \|a\| \quad (7)$$

vale para quaisquer a, b e c então vale também para $a - d, b - d$ e $c - d$, o que fornece a desigualdade (5).

Além disso, se provarmos que $\|a - b\| \|c\| = \|a - c\| \|b\| + \|c - b\| \|a\|$ então a, b, c e 0 são colineares ou cocíclicos então teremos que $a - d, b - d, c - d$ e 0 são colineares ou cocíclicos quando a igualdade (6) for satisfeita.

Agora, $a - d, b - d, c - d$ e 0 são colineares ou cocíclicos é o mesmo que a, b, c e d serem colineares ou cocíclicos.

Começaremos provando a desigualdade de Ptolomeu (5) e depois a afirmação sobre a igualdade quando $d = 0$.

3.1 Desigualdade de Ptolomeu

Vejamos agora a demonstração a desigualdade de Ptolomeu (7). A ideia será substituir os vetores a, b e c pelas suas coordenadas e considerá-los como elementos de $\mathbb{H}$. Utilizando as propriedades da multiplicação e da norma em $\mathbb{H}$ obteremos o resultado.

Proposição 1. *Sejam a, b e c vetores em um espaço vetorial real com produto interno. A se-*

guinte desigualdade vale

$$\|a - b\| \|c\| \leq \|a - c\| \|b\| + \|c - b\| \|a\|.$$

Demonstração. Se a, b e c forem linearmente independentes então existe uma base ortonormal para o espaço gerado por eles com 3 vetores. Podemos escolhê-la de tal maneira que a última coordenada de a e de b nessa base valem 0.

Quando calcula-se as normas dos vetores, necessárias para verificar a desigualdade do enunciado, utilizando as combinações da base ortonormal que fornecem a, b e c , essas normas coincidem com a norma usual das coordenadas dos vetores nessa base no $\mathbb{R}^3$.

Assim, podemos supor sem perda de generalidade que a, b e c pertencem a $\mathbb{H}$ e que suas últimas coordenadas valem 0. Mas lembre-se que a última coordenada de a e de b no $\mathbb{R}^3$ já era 0. Assim as últimas duas coordenadas de a, b em $\mathbb{H}$ valem 0, ou seja, $a, b \in \mathbb{C}$.

Agora, pela desigualdade triangular temos

$$\|ac - bc\| \leq \|ac - ab\| + \|ab - bc\|.$$

Como a, b são complexos, eles comutam. Assim $ab = ba$ e temos

$$\|ac - bc\| \leq \|ac - ab\| + \|ba - bc\|.$$

Pelo item (iv) do Lema 1 temos que

$$\|ac - bc\| = \|a - b\| \|c\|, \|ac - ab\| = \|a\| \|c - b\| \text{ e } \|ba - bc\| = \|a - c\| \|b\|.$$

Isso conclui a demonstração quando a, b e c forem linearmente independentes. Mas o caso dependente é mais simples. Pois repetindo a argumentação acima podemos supor que a, b e c são elementos de $\mathbb{C}$. $\square$

Observação 2. Uma outra demonstração desse resultado segue da inversão em $\mathbb{H}$. Novamente podemos supor que a, b e c estão em $\mathbb{H}$ e que a, b e c são diferentes de 0, pois se algum for 0 a desigualdade é trivial. Pela desigualdade triangular temos que

$$\|a^{-1} - b^{-1}\| \leq \|a^{-1} - c^{-1}\| + \|c^{-1} - b^{-1}\|.$$

Não é difícil notar que $\|a^{-1} - b^{-1}\| = \|a - b\| / \|a\| \|b\|$. Substituindo essa informação na desigualdade acima junto com as informações análogas sobre $\|a^{-1} - c^{-1}\|$, $\|c^{-1} - b^{-1}\|$ e multiplicando a desigualdade final por $\|a\| \|b\| \|c\|$ obtemos o resultado desejado.

Veremos um resultado bem mais geral no fim do artigo envolvendo o processo de inversão que nos dará uma outra demonstração para a desigualdade de Ptolomeu.

Agora veremos a afirmação sobre a igualdade na desigualdade de Ptolomeu.

3.2 Quando a igualdade ocorre?

Nessa seção veremos quando a igualdade (6) ocorre. Veremos que isso ocorre quando $a - d, b - d, c - d$ e 0 são colinares ou cocíclicos, que equivale a a, b, c e d satisfazerem as mesmas condições.

Como já discutido anteriormente, basta provar isso quando $d = 0$.

Proposição 2. *Sejam a, b, c e 0 vetores distintos em um espaço vetorial real com produto interno satisfazendo a igualdade*

$$\|a - b\| \|c\| = \|b - c\| \|a\| + \|c - a\| \|b\|.$$

Então a, b, c e 0 são colinares ou são cocíclicos.

Demonstração. Primeiramente, podemos escolher uma base ortonormal do espaço gerado por a, b, c e escrevê-los como combinação dessa base.

O cálculo das normas desses vetores necessário nesse enunciado pode ser feito simplesmente calculando a norma usual das coordenadas desse vetores nessa base ortonormal, ou seja, podemos supor sem perda de generalidade que a, b e c estão em $\mathbb{H}$.

Isso nos permitir usar as propriedades da multiplicação em $\mathbb{H}$. A propriedade (iv) do Lema 1 nos diz que a igualdade do enunciado é a mesma que

$$\|ac - cb\| = \|ac - ab\| + \|ab - cb\|.$$

Portanto,

$$\|(ac - ab) + (ab - bc)\| = \|ac - ab\| + \|ab - cb\|.$$

Agora, isso só ocorre quando

$$ab - cb = q(ac - ab),$$

onde $q \geq 0$, pelo item (vi) do Lema 1. Como a, b, c e 0 são distintos, por hipótese, então $q > 0$.

Isso implica que

$$ab = \frac{1}{1+q}cb + \frac{q}{1+q}ac. \quad (8)$$

Assim, ac, ab e cb são colinares e ab está no segmento que liga ac ao cb .

Agora, vejamos que a, b e c devem ser linearmente dependentes. Caso contrário, poderíamos escolher uma base ortonormal do espaço gerado por a, b e c tal que as coordenadas de a, b e c nessa base seriam

$$a = (a_1, a_2, 0), b = (b_1, 0, 0) \text{ e } c = (c_1, c_2, c_3),$$

onde $b_1 > 0$ e $c_3 \neq 0$ (pois a, b, c são linearmente independentes).

Isso nos permite novamente uma simplificação que é supor que

$$a = a_1 + a_2i \in \mathbb{C}, b \text{ é real positivo e } c = z_1 + z_2j,$$

onde $z_1 = c_1 + c_2i$ e $z_2 = c_3 + 0i$.

Pela igualdade 8 e, pelo fato de que $b \in \mathbb{R}$ e portanto comuta com c , segue que

$$(ab - ac) = \frac{1}{1+q}(b-a)c.$$

Assim, substituindo $c = z_1 + z_2j$, obtemos

$$ab - az_1 - az_2j = \frac{1}{1+q}(b-a)z_1 + \frac{1}{1+q}(b-a)z_2j.$$

Portanto, $-az_2 = \frac{1}{1+q}(b-a)z_2$ e

$$ab - az_1 = \frac{1}{1+q}(b-a)z_1. \quad (9)$$

Como $z_2 \neq 0$, segue que $-a = \frac{1}{1+q}(b-a)$. Consequentemente, $-az_1 = \frac{1}{1+q}(b-a)z_1$.

Assim, pela igualdade (9), $ab = 0$, o que é absurdo. Portanto a, b e c são linearmente dependentes e podemos supor que $a, c \in \mathbb{C}$ e b é real positivo.

Agora, dividindo a igualdade (8) por abc obtemos

$$c^{-1} = \frac{1}{q}a^{-1} + \frac{q}{1+q}b^{-1}. \quad (10)$$

Essa nova igualdade mostra que se $a \in \mathbb{R}$ ou se $c \in \mathbb{R}$ então a, b e c são reais e, portanto, a, b, c e 0 são colineares, que é uma das conclusões possíveis da igualdade do enunciado.

Suponha agora que $a, c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Lembre-se que a reta real divide o plano complexo em dois semi-planos.

Como $b^{-1} \in \mathbb{R}$ então, pela igualdade (10), c^{-1} está no mesmo semi-plano que a^{-1} . Consequentemente, c, a também pertencem a mesmo semiplano dividido pela reta real.

Finalmente, considere o triângulo de vértices 0, a e b (como nas Figuras 1 e 2) e o triângulo de vértices 0, c e b . Vejamos que os ângulos formados nesses dois triângulos nos vértices a e c , respectivamente, são iguais.

Se a e c estiverem acima da reta real então o ângulo formado em a no triângulo de vértices 0, a e b é o argumento do número complexo $(b-a)(0-a)^{-1}$ (ver Figura 1 abaixo) e da mesma forma o ângulo formado em c no triângulo 0, c e b é o argumento do número complexo $(b-c)(0-c)^{-1}$. Se mostrarmos que $z = [(b-a)(0-a)^{-1}][(b-c)(0-c)^{-1}]^{-1} \in \mathbb{R}^+$ então os argumentos dos números complexos $(b-a)(0-a)^{-1}$ e $(b-c)(0-c)^{-1}$ são iguais.

Se a e c estiverem abaixo da reta real então o ângulo formado em a no triângulo de vértices $0, a$ e b é o argumento do número complexo $(b - a)^{-1}(0 - a)$ (ver Figura 2 abaixo) e da mesma forma o ângulo formado em c no triângulo $0, c$ e b é o argumento do número complexo $(b - c)^{-1}(0 - c)$. Se mostrarmos que $z^{-1} = [(b - a)(0 - a)^{-1}]^{-1}[(b - c)(0 - c)^{-1}] \in \mathbb{R}^+$ então os argumentos dos números complexos $(b - a)(0 - a)^{-1}$ e $(b - c)(0 - c)^{-1}$ são iguais.

Agora, vejamos porque $z \in \mathbb{R}^+$ e consequentemente $z^{-1} \in \mathbb{R}^+$ também.

Como ab pertence ao segmento que liga ac ao bc então $ab - ac$ e $bc - ac$ são múltiplos positivos, ou seja, possuem os mesmos argumentos. Assim

$$(bc - ac)(ab - ac)^{-1} \in \mathbb{R}^+,$$

mas isso é igual a $z = [(b - a)(0 - a)^{-1}][(b - c)(0 - c)^{-1}]^{-1}$.

Como a e c pertencem ao mesmo semiplano e $0, b \in \mathbb{R}$ então a e c pertencem ao mesmo arco capaz sobre o segmento que liga 0 a b . Provando que a, b, c , e 0 são cocíclicos. $\square$

Observação 3. A maneira natural de provar que a igualdade na Proposição 1 implica que a, b, c e 0 são colineares ou cocíclicos é notando, na Observação 2, que a igualdade implica que as coordenadas de b^{-1}, a^{-1} e c^{-1} são colineares em $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$.

A inversão em $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ mapeia retas contendo 0 nelas mesmas e retas não contendo 0 em círculos contendo 0 . Assim, se b^{-1}, a^{-1} e c^{-1} são colineares com 0 então b, a, c e 0 também são colineares. Se b^{-1}, a^{-1} e c^{-1} são colineares, mas não com 0 na mesma reta, então b, a, c e 0 são cocíclicos.

Veremos isso a seguir, mas de maneira bem mais geral e obteremos esse último resultado como caso particular (Ver Observação 4).

4 O processo de inversão

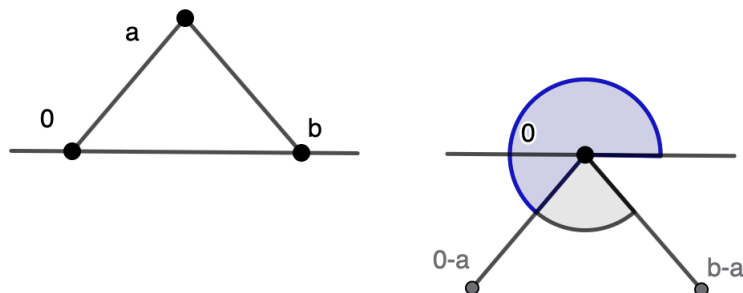
Começamos essa seção definindo a inversão em espaços vetoriais reais com produto interno. Veremos na próxima Proposição (proposição 3) que subespaços afins de dimensão k são invertidos em esferas de dimensão k e vice-versa. Esse e outros resultados sobre inversão podem ser lidos na seção 10.8 do livro de Berger [5].

Terminamos esse artigo com uma proposição que diz que se soubermos apenas as distâncias entre elementos de um espaço vetorial real com produto interno então podemos estimar a dimensão do subespaço afim que os contém ou da esfera que os contém. Como corolário obtemos uma outra explicação para a desigualdade de Ptolomeu (veja Proposição 4 e Observação 4).

Definição 2. Seja V um espaço vetorial com produto interno, $\|v\|$ a norma de $v \in V$ induzida pelo produto interno. Defina a inversão de $v \in V \setminus \{0\}$ por $T(v) = -v/\|v\|^2$. Note a semelhança com a inversão de elementos do $\mathbb{R}^3$ dentro de $\mathbb{H}$ no item (ii) do Lema 1.

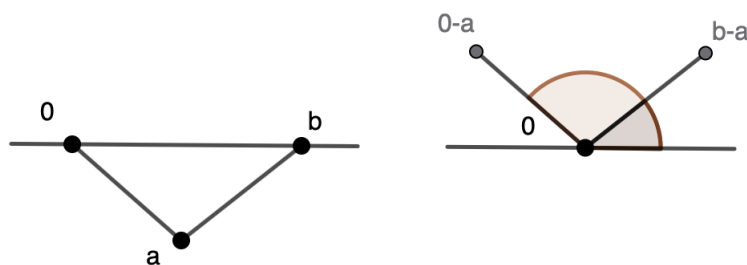
Lema 2. As seguintes propriedades da inversão valem para todo $x, y \in V \setminus \{0\}$.

Figura 1: Ângulo no vértice **a** localizado acima da reta real.



Fonte: O autor.

Figura 2: Ângulo no vértice **a** localizado abaixo da reta real.



Fonte: O autor.

$$a) \quad T^2(x) = x.$$

$$b) \quad \|T(x) - T(y)\|^2 = \|x - y\|^2 / \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Demonstração. Para o item *a*), note que $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2 / \|x\|^4 = 1 / \|x\|^2$. Assim,

$$T(T(x)) = -T(x) / \|T(x)\|^2 = -(-x / \|x\|^2) \|x\|^2 = x.$$

Para o item *b*), observe que

$$\langle T(x) - T(y), T(x) - T(y) \rangle = \|T(x)\|^2 - 2\langle T(x), T(y) \rangle + \|T(y)\|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } \|T(x) - T(y)\|^2 &= 1/\|x\|^2 - 2(\langle x, y \rangle)/\|x\|^2\|y\|^2 + 1/\|y\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2\|y\|^2} (\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2) = \|x - y\|^2/\|x\|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

□

Na próxima proposição e corolário provamos que a inversão de um subespaço afim (sem conter o 0) é uma esfera (contendo 0) e vice-versa. Nela considere as notações: $[v]$ é o espaço gerado pelo vetor v e $W + v$ é o subespaço afim que é a translação do subespaço vetorial W pelo vetor v , isto é, $W + v = \{w + v, w \in W\}$.

Proposição 3. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Seja W um subespaço de V de dimensão finita, $v \in V \setminus W$ e $R = W \oplus [v]$. Existe $a \in R$ tal que*

$$T(W + v) \cup \{0\} = \{z \in R, \|z - a\| = \|a\|\}.$$

Demonstração. Seja $\text{proj}_W(v)$ a projeção de v em W , isto é,

$$\text{proj}_W(v) \in W \text{ e } y = v - \text{proj}_W(v) \text{ é ortogonal a todo vetor de } W.$$

Além disso, como $v - y \in W$ então $W + v = W + y$.

Vejamos que $T(W + y) \cup \{0\} = \{z \in R, \|z - T(y)/2\| = \|T(y)/2\|\}$.

Seja $w \in W$ e usando o fato que $\langle w, y \rangle = 0$ obtemos

- $\langle T(w + y), T(w + y) \rangle = \frac{1}{\|w + y\|^4} \langle w + y, w + y \rangle = \frac{1}{\|w + y\|^2}$
- $-2\langle T(w + y), T(y)/2 \rangle = -\frac{1}{\|w + y\|^2\|y\|^2} \langle -w - y, -y \rangle = -\frac{1}{\|w + y\|^2}.$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \|T(w + y) - T(y)/2\|^2 &= \langle T(w + y) - T(y)/2, T(w + y) - T(y)/2 \rangle \\ &= \langle T(w + y), T(w + y) \rangle - 2\langle T(w + y), T(y)/2 \rangle + \langle T(y)/2, T(y)/2 \rangle = \|T(y)/2\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $T(W + y) \cup \{0\} \subset \{z \in R, \|z - T(y)/2\| = \|T(y)/2\|\}$.

Agora, seja $z \in R \setminus \{0\}$ tal que $\|z - T(y)/2\|^2 = \|T(y)/2\|^2$. Isso implica que

$$0 = \langle z, z \rangle - \langle z, T(y) \rangle = \langle z, z \rangle + \langle z, y \rangle / \langle y, y \rangle.$$

Multiplicando essa equação por $\langle y, y \rangle / \langle z, z \rangle$ obtemos

$$\langle z, y \rangle / \langle z, z \rangle + \langle y, y \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle T(z) - y, y \rangle = \langle -z/\|z\|^2 - y, y \rangle = -\langle z, y \rangle / \langle z, z \rangle - \langle y, y \rangle = 0$.

Como $T(z) - y$ é ortogonal a y e pertence a R então $T(z) - y = w_1 \in W$. Assim, $T(z) = y + w_1$.

Pela propriedade a) do Lema 2, $z = T(y + w_1)$, ou seja,

$$\{z \in R, \|z - T(y)/2\| = \|T(y)/2\|\} \setminus \{0\} \subset T(W + y).$$

□

Corolário 2. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Seja R um subespaço de V de dimensão finita. Então*

$$T(\{z \in R, \|z - a\| = \|a\|\} \setminus \{0\}) = W + T(2a),$$

onde W é o complemento ortogonal de a em R .

O nosso último resultado diz que se soubermos apenas as distâncias entre elementos de um espaço vetorial com produto interno é possível estimar a menor dimensão de esfera que os contém ou a menor dimensão de subespaço afim que os contém (a dimensão de ambos como variedade).

Proposição 4. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Sejam $x_1, \dots, x_n$ elementos distintos de V . Defina a matriz $A(x_1, \dots, x_n)$ como a matriz de ordem n cuja entrada ij é ocupada pelo número $\|x_i - x_j\|^2$.*

Se o posto de $A(x_1, \dots, x_n)$ vale k então ou existe um subespaço W tal que $\dim(W) = k-2$ e $x_1, \dots, x_n$ pertencem a $W + x_1$ ou existe uma esfera de dimensão $k-2$ que contém $x_1, \dots, x_n$.

Demonstração. Defina $b_1 = x_2 - x_1, \dots, b_{n-1} = x_n - x_1$.

Note que $A(x_1, \dots, x_n) = A(0, b_1, \dots, b_{n-1}) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \|b_1\|^2 & \|b_2\|^2 & \dots & \|b_{n-2}\|^2 & \|b_{n-1}\|^2 \\ \|b_1\|^2 & 0 & \|b_1 - b_2\|^2 & \dots & \|b_1 - b_{n-2}\|^2 & \|b_1 - b_{n-1}\|^2 \\ \|b_2\|^2 & \|b_2 - b_1\|^2 & 0 & \dots & \|b_2 - b_{n-2}\|^2 & \|b_2 - b_{n-1}\|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \|b_{n-2}\|^2 & \|b_{n-2} - b_1\|^2 & \|b_{n-2} - b_2\|^2 & \dots & 0 & \|b_{n-2} - b_{n-1}\|^2 \\ \|b_{n-1}\|^2 & \|b_{n-1} - b_1\|^2 & \|b_{n-1} - b_2\|^2 & \dots & \|b_{n-1} - b_{n-2}\|^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $x_1, \dots, x_n$ são elementos distintos então todas as entradas dessa matriz, com exceção das entradas da diagonal, são diferentes de 0. Seja D a matriz diagonal de ordem n , cuja diagonal vale $(1, \|b_1\|^{-2}, \|b_2\|^{-2}, \dots, \|b_{n-1}\|^{-2})$.

Considere a matriz B definida por $B = DAD$. Note que

$$B_{ij} = \begin{cases} \|b_{i-1} - b_{j-1}\|^2 / \|b_{i-1}\|^2 \|b_{j-1}\|^2, & \text{se } i \neq j, \text{ mas } i > 1 \text{ e } j > 1 \\ 1, & \text{se } i \neq j, \text{ mas } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Pela letra b) do Lema 2, $\|T(b_k) - T(b_s)\|^2 = \|b_k - b_s\|^2 / \|b_k\|^2 \|b_s\|^2$. Portanto,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \|T(b_1) - T(b_2)\|^2 & \dots & \|T(b_1) - T(b_{n-1})\|^2 \\ 1 & \|T(b_2) - T(b_1)\|^2 & 0 & \dots & \|T(b_2) - T(b_{n-1})\|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \|T(b_{n-1}) - T(b_1)\|^2 & \|T(b_{n-1}) - T(b_2)\|^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Chame $c_i = T(b_{i+1}) - T(b_1)$, para $i = 1, \dots, n-2$, assim obtém-se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \|c_1\|^2 & \|c_2\|^2 & \dots & \|c_{n-2}\|^2 \\ 1 & \|c_1\|^2 & 0 & \|c_1 - c_2\|^2 & \dots & \|c_1 - c_{n-2}\|^2 \\ 1 & \|c_2\|^2 & \|c_2 - c_1\|^2 & 0 & \dots & \|c_2 - c_{n-2}\|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \|c_{n-2}\|^2 & \|c_{n-2} - c_1\|^2 & \|c_{n-2} - c_2\|^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtraia a segunda linha de todas as que vem abaixo dela. Depois subtraia a segunda coluna de todas as que vem depois dela obtendo a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \|c_1\|^2 & \|c_2\|^2 & \dots & \|c_{n-2}\|^2 \\ 0 & \|c_1\|^2 & -2\langle c_1, c_1 \rangle & -2\langle c_1, c_2 \rangle & \dots & -2\langle c_1, c_{n-2} \rangle \\ 0 & \|c_2\|^2 & -2\langle c_2, c_1 \rangle & -2\langle c_2, c_2 \rangle & \dots & -2\langle c_2, c_{n-2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \|c_{n-2}\|^2 & -2\langle c_{n-2}, c_1 \rangle & -2\langle c_{n-2}, c_2 \rangle & \dots & -2\langle c_{n-2}, c_{n-2} \rangle \end{pmatrix}.$$

Use os números 1 da primeira linha e da primeira coluna para eliminar os outros elementos da segunda linha e coluna aplicando operações elementares e obtenha a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2\langle c_1, c_1 \rangle & -2\langle c_1, c_2 \rangle & \dots & -2\langle c_1, c_{n-2} \rangle \\ 0 & 0 & -2\langle c_2, c_1 \rangle & -2\langle c_2, c_2 \rangle & \dots & -2\langle c_2, c_{n-2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -2\langle c_{n-2}, c_1 \rangle & -2\langle c_{n-2}, c_2 \rangle & \dots & -2\langle c_{n-2}, c_{n-2} \rangle \end{pmatrix}.$$

Todas as operações elementares realizadas nas matrizes até obter essa última preservam posto. Portanto o posto de A é o posto da matriz de Gram dos vetores $c_1, \dots, c_{n-2}$ somado com 2.

A matriz de Gram de $c_1, \dots, c_{n-2}$ é aquela de ordem $n - 2$, cuja entrada ij vale $\langle c_i, c_j \rangle$, e o seu posto é igual à dimensão do subespaço W gerado por

$$\{c_i = T(b_{i+1}) - T(b_1), \text{ onde } i = 1, \dots, n - 2\}.$$

Portanto, $\text{posto}(A) - 2$ dá a dimensão do subespaço W .

Assim, $T(b_{i+1}) \in W + T(b_1)$ para $i = 1, \dots, n - 2$.

Pela propriedade a) do Lema 2, $T^2(b_{i+1}) = b_{i+1}$, para $i = 1, \dots, n - 2$. Portanto,

$$\{b_2, \dots, b_{n-1}\} \subset T(W + T(b_1)).$$

Agora, como $0 \in W$ temos que $0 + T(b_1) \in W + T(b_1)$.

Consequentemente, pela propriedade a) do Lema 2, $T^2(b_1) = b_1 \in T(W + T(b_1))$.

Portanto,

$$\{b_1, \dots, b_{n-1}\} \subset T(W + T(b_1)).$$

Se $T(b_1) \notin W$ então $T(W + T(b_1)) \cup \{0\}$ é uma esfera de dimensão igual a de W (pela Proposição 3), ou seja, de dimensão igual a $\text{posto}(A) - 2$.

Assim, $0, b_1 = x_2 - x_1, \dots, b_{n-1} = x_n - x_1$ pertencem a uma esfera de dimensão $\text{posto}(A) - 2$. Portanto, $x_1, \dots, x_n$ pertencem a uma esfera de dimensão $\text{posto}(A) - 2$.

Se $T(b_1) \in W$ então $W + T(b_1) = W$. Segue diretamente da fórmula da inversão que $T(W \setminus \{0\}) = W \setminus \{0\}$. Assim, $\{0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1\} \subset W$.

Portanto, $x_1, \dots, x_n$ pertencem a $W + x_1$, onde W é um subespaço de dimensão $\text{posto}(A) - 2$. $\square$

Corolário 3. Se o posto de $A(x_1, \dots, x_n)$ vale 3 então $x_1, \dots, x_n$ pertencem a um círculo (esfera de dimensão 1) ou são colineares. Se o posto de $A(x_1, \dots, x_n)$ vale 4 então $x_1, \dots, x_n$ pertencem a uma esfera (de dimensão 2) ou são coplanares.

Observação 4. Existe uma outra demonstração para a Proposição 2 baseada nesse último corolário. Considere a, b, c e d distintos em um espaço vetorial com produto interno.

Note que $b_1 = b - a, b_2 = c - a$ e $b_3 = d - a$ são distintos e não nulos. Como a inversão é injetora (letra b) do Lema 2) temos que $c_1 = T(b_2) - T(b_1)$ e $c_2 = T(b_3) - T(b_1)$ são não nulos. Portanto, a matriz de Gram dos vetores c_1 e c_2 tem posto 1 ou 2.

Considerando a demonstração da Proposição 4, temos que posto da matriz $A(a, b, c, d)$ é o posto da matriz de Gram de c_1 e c_2 mais 2. Assim, o posto de $A(a, b, c, d)$ vale 3 ou 4. Para ser 3, é necessário e suficiente que $\det(A(a, b, c, d)) = 0$.

Sabe-se que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2 & 0 & w^2 & u^2 \\ y^2 & w^2 & 0 & v^2 \\ z^2 & u^2 & v^2 & 0 \end{pmatrix} = (-uy - wz + vx)(uy - wz + vx)(-uy + wz + vx)(uy + wz + vx)$$

Portanto, escolhendo

$$x = \|a - b\|, y = \|a - c\|, z = \|a - d\|, w = \|b - c\|, u = \|b - d\| \text{ e } v = \|c - d\|$$

obtemos $\det(A(a, b, c, d)) =$

$$\prod_{i,j=0}^1 ((-1)^i \|b - d\| \|a - c\| + (-1)^j \|b - c\| \|a - d\| + \|c - d\| \|a - b\|). \quad (11)$$

Portanto se algum dos termos desse produto se anular temos que a igualdade (6) vale (com alguma permutação das letras a, b, c e d), mas a conclusão do corolário anterior (já que o posto vale 3) diz que a, b, c e d são colineares ou cocíclicos.

Também é possível usar a demonstração da Proposição 4 para provar a desigualdade de Ptolomeu (Proposição 1). Não é difícil notar pela demonstração da Proposição 4 que o determinante de $A(a, b, c, d)$ é um número negativo vezes o determinante da matriz de Gram de c_1 e c_2 . O determinante da matriz de Gram de c_1 e c_2 não é negativo pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Portanto, $\det(A(a, b, c, d)) \leq 0$.

Agora, se

$$\|c - d\| \|a - b\| - \|b - d\| \|a - c\| - \|b - c\| \|a - d\| > 0$$

então os outros termos do produto (11) também são positivos, o que implicaria que o $\det(A(a, b, c, d)) > 0$. Absurdo.

Assim,

$$\|c - d\| \|a - b\| \leq \|b - d\| \|a - c\| + \|b - c\| \|a - d\|$$

que é exatamente a desigualdade de Ptolomeu.

5 Resultados

Nesse artigo mostramos como os Quatérnios podem ser utilizados para demonstrar a desigualdade de Ptolomeu e também quando a igualdade ocorre. Depois vimos que o processo de inversão nos Quatérnios pode ser estendido para espaços vetoriais com produto interno e provamos uma propriedade da inversão que relaciona subespaços afins e esferas. Por fim mostramos um resultado que afirma que se apenas as distâncias entre vetores de um espaço vetorial forem conhecidas então é possível estimar a menor dimensão do subespaço afim que os contém ou da esfera que os contém. Esse resultado tem como caso particular a desigualdade de Ptolomeu.

6 Conclusão

Os Quatérnios e as suas propriedades são ferramentas úteis para estudar problemas de Álgebra Linear cuja dimensão do subespaço envolvido no problema não supere 4. Isso é possível escolhendo uma base ortonormal e escrevendo os vetores em coordenadas.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado sem apoio financeiro.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

As obras submetidas ao jornal BEJOM estão sujeitas à licença [CC BY 4.0](#). Sob esta licença, os autores concedem aos leitores o direito de compartilhar, adaptar e utilizar as obras, inclusive para fins comerciais, desde que o crédito apropriado seja dado aos autores. Quaisquer modificações devem ser indicadas. Não há restrições adicionais além das estabelecidas pela licença.

Referências

- [1] Stillwell, J. *Mathematics and Its History*. Springer, New York, 1989.
- [2] Herstein, I. N. *Topics in algebra*. John Wiley & Sons, 1991.

-
- [3] Lagrange, J. L. Démonstration d'un théoreme d'arithmétique. *Nouveau Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de Berlin* (1770), 123–133.
 - [4] Hamilton, W. R. *Elements of quaternions*. London: Longmans, Green, & Company, 1866.
 - [5] Berger, M. *Geometry I*. Springer Science & Business Media, 2009.
 - [6] Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America, 1967.

Corresponding Author:

Daniel Cariello, dcariello@ufu.com.br

Submitted: August 14, 2025

Accepted: December 22, 2025

Published: March, 02, 2026

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>