

**ESTUDO E CARACTERIZAÇÃO DE CONJUNTOS DE CONFLITO NO PLANO**

Leonardo Brandao de Araujo
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Departamento de Matemática, Sobral, CE, Brasil.
E-mail: leobrandao743@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3470-106X> 

Davi Ribeiro dos Santos
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Departamento de Matemática, Sobral, CE, Brasil.
E-mail: davi_ribeiro@uvanet.br
<https://orcid.org/0000-0002-1505-9051> 

Antonio Aguiar Freitas
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Departamento de Matemática, Sobral, CE, Brasil.
E-mail: aguiar_antonio@uvanet.br
<https://orcid.org/0000-0001-9760-8001> 

Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Departamento de Matemática, Sobral, CE, Brasil.
E-mail: edvalter_silva@uvanet.br
<https://orcid.org/0000-0002-5353-065X> 

Mathematics Subject Classification (MSC): 51M04, 53A04, 51F99.

Resumo. Um lugar geométrico consiste na descrição do conjunto de todos os pontos que satisfazem determinada condição ou propriedade. Nesse contexto, o conjunto de conflito é definido como o lugar geométrico formado pelos pontos equidistantes a dois subconjuntos de um espaço métrico. Neste trabalho, investigamos o conjunto de conflito gerado pela interação entre o gráfico da função $f(x) = kx^n$, com $k \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$ par, e o eixo das abscissas Ox . A caracterização analítica desse conjunto é obtida a partir da combinação de uma curva parametrizada com uma semirreta. Essas representações permitem uma compreensão detalhada do comportamento geométrico dos conjuntos envolvidos, fornecendo uma base sólida para o estudo de suas propriedades locais e fortalecendo o campo das aplicações computacionais. Além da análise geométrica, o trabalho contribui para o desenvolvimento teórico da noção de germe de conjuntos reais, com potenciais aplicações em topologia e na teoria das singularidades.

Palavras-chave. Lugar geométrico, conjunto de conflito, conjunto equidistante, parametrização de curvas, germes de conjuntos reais.

STUDY AND CHARACTERIZATION OF CONFLICT SETS IN THE PLANE

Abstract. A geometric locus consists of the description of the set of all points that satisfy a given condition or property. In this context, the conflict set is defined as the geometric locus formed by the points equidistant from two subsets of a metric space. In this work, we investigate the conflict set generated by the interaction between the graph of the function $f(x) = kx^n$, with $k \in \mathbb{R}^*$ and $n \in \mathbb{N}$ even, and the x -axis Ox . The analytical characterization of this set is obtained from the combination of a parametrized curve with a half-line. These representations allow for a detailed understanding of the

geometric behavior of the sets involved, providing a solid foundation for the study of their local properties and strengthening the field of computational applications. In addition to the geometric analysis, this work contributes to the theoretical development of the notion of germs of real sets, with potential applications in topology and singularity theory.

Keywords. Geometric locus, conflict set, equidistant set, curve parametrization, real set germs.

ESTUDIO Y CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS DE CONFLICTO EN EL PLANO

Resumen. Un lugar geométrico consiste en la descripción del conjunto de todos los puntos que satisfacen una determinada condición o propiedad. En este contexto, el conjunto de conflicto se define como el lugar geométrico formado por los puntos equidistantes de dos subconjuntos de un espacio métrico. En este trabajo, investigamos el conjunto de conflicto generado por la interacción entre el gráfico de la función $f(x) = kx^n$, con $k \in \mathbb{R}^*$ y $n \in \mathbb{N}$ par, y el eje de las abscisas Ox . La caracterización analítica de este conjunto se obtiene a partir de la combinación de una curva parametrizada con una semirrecta. Estas representaciones permiten una comprensión detallada del comportamiento geométrico de los conjuntos involucrados, proporcionando una base sólida para el estudio de sus propiedades locales y fortaleciendo el campo de las aplicaciones computacionales. Además del análisis geométrico, este trabajo contribuye al desarrollo teórico de la noción de germen de conjuntos reales, con posibles aplicaciones en topología y en la teoría de singularidades.

Palabras clave. Lugar geométrico, conjunto de conflicto, conjunto equidistante, parametrización de curvas, gérmenes de conjuntos reales.

1 Introdução

O lugar geométrico descreve o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma determinada relação ou propriedade geométrica. Essa relação pode ser expressa por uma equação, uma desigualdade, uma proporção, entre outras formas. Para uma leitura mais aprofundada sobre lugares geométricos, sugerimos a leitura de [1].

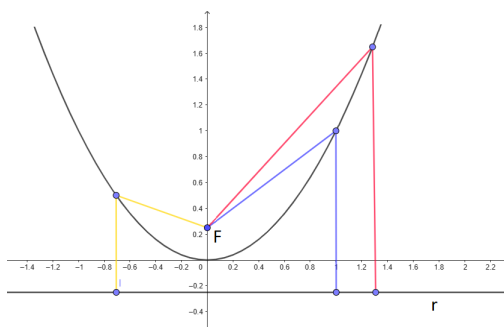
Definição 1. Dada uma propriedade $\mathcal{P}$ relativa a pontos do espaço $\mathbb{R}^2$, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$ é o subconjunto $\mathcal{L}$ do espaço que satisfaz as seguintes condições :

1. Todo ponto de $\mathcal{L}$ possui a propriedade $\mathcal{P}$;
2. Todo ponto do espaço $\mathbb{R}^2$ que possui a propriedade $\mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{L}$.

Ou seja, $\mathcal{L}$ é o lugar geométrico associado à propriedade $\mathcal{P}$ se, e somente se, for composto exatamente pelos pontos do plano que possuem a propriedade $\mathcal{P}$. A circunferência, por exemplo

é o conjunto de todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ que estão a uma distância constante $r > 0$, denominado raio da circunferência, de um ponto fixo denominado centro da circunferência. Outro exemplo bastante conhecido é a parábola, que é o conjunto formado por todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ que estão à mesma distância de um ponto fixo F , denominado Foco e de uma reta r denominada diretriz, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Parábola com foco $F = 1/4$ e reta diretriz $r : x = -1/4$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Segundo [2], um exemplo clássico na geometria consiste em determinar o conjunto de pontos que se encontram à mesma distância de dois elementos distintos, como um ponto fixo e uma reta, o que conduz naturalmente à definição da parábola. Sejam A um subconjunto não-vazio do espaço $\mathbb{R}^2$ e $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a métrica euclidiana. A distância euclidiana do ponto $x \in \mathbb{R}^2$ ao conjunto A será denotada por $d(x, A)$ e definida por:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); \forall a \in A\}.$$

Definição 2. Definimos o conjunto de conflito gerado por A e B , e denotamos por $Conf(A, B)$, o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que são equidistantes de A e B . Ou seja,

$$Conf(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; d(x, A) = d(x, B)\}.$$

Definição 3. Sejam A, B dois subconjuntos não vazios, fechados, do espaço $\mathbb{R}^2$. Dado $p \in A$, definimos $R_p(A, B)$ como sendo o conjunto dos pontos de $Conf(A, B)$ que são realizados em p . Isto é, $x \in R_p(A, B)$ se a sua distância ao conjunto A é realizada no ponto p e, além disso, coincide com $d(x, B)$. Ou seja,

$$R_p(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) = d(x, A) = d(x, B)\}.$$

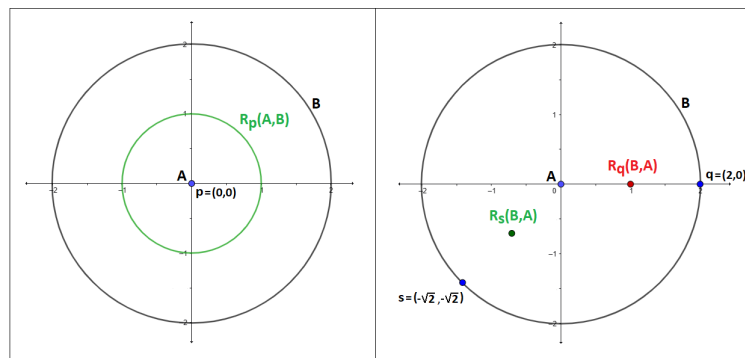
Nessas condições, $Conf(A, B) = \bigcup_{p \in A} R_p(A, B)$.

Exemplo 1. Considere os conjuntos $A = \{(0, 0)\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

Considere $p = (0, 0) \in A$ e $q = (2, 0)$, $s = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \in B$. Portanto:

$$R_p(A, B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, R_q(B, A) = \{(1, 0)\} \text{ e } R_s(B, A) = \{(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)\}.$$

Figura 2: Conjunto de pontos realizados: $R_p(A, B)$, $R_q(B, A)$ e $R_s(B, A)$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

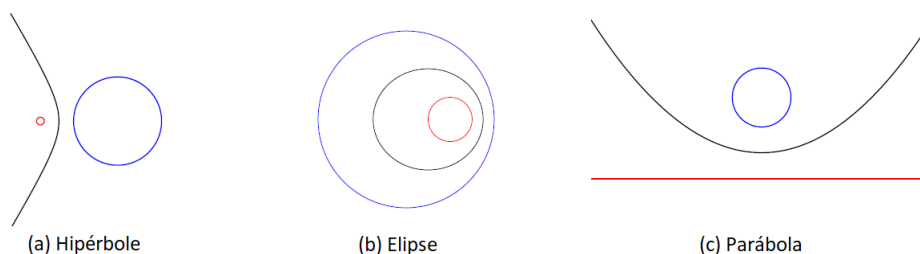
Observa-se que, $Conf(A, B) = R_p(A, B) = \bigcup_{q \in B} R_q(B, A)$.

□

Em [3] foi demonstrado que, dados dois conjuntos A e B , não-vazios e conexos do espaço $\mathbb{R}^n$, o conjunto de conflito gerado por esses conjuntos é também conexo. Em [4], foi demonstrado que sendo A e B dois subconjuntos convexos do espaço $\mathbb{R}^2$, então o seu conjunto de conflito é um conjunto diferenciável. Por sua vez, em [5] foi provado que o cone tangente de um conjunto de conflito em $\mathbb{R}^n$ é um cone afim linear sobre conjuntos de conflito de menores dimensões, tendo dimensão $n - 1$. Além disso, é apresentado um exemplo onde os conjuntos de conflito não são normalmente mergulhados nem localmente bi-Lipschitz equivalente ao cone tangente correspondente.

No estudo apresentado em [6], os autores investigam conjuntos de conflito sob as perspectivas topológica e métrica, revisando resultados clássicos no espaço euclidiano. Também é demonstrada a continuidade desses conjuntos em relação aos focos, além de ser estabelecida uma estimativa de erro para aproximações computacionais. Ademais, os conjuntos de conflito são interpretados como uma generalização das cônicas, recuperando suas principais propriedades geométricas, como se observa na Figura 3.

Figura 3: Conjunto de conflito como extensão das cônicas.



Fonte: Adaptada de [6].

Apesar dos avanços no estudo dos conjuntos de conflito sob diferentes perspectivas geométricas e topológicas, ainda são escassos resultados que forneçam caracterizações explícitas para casos específicos, uma estratégia para esse tipo de caracterização faz-se pelo uso de curvas parametrizadas. Observe que o estudo das curvas parametrizadas desempenha um papel fundamental na matemática uma vez que possibilita a representação de forma dinâmica e analítica das curvas. Desse modo, apresentamos a seguir a definição desse conceito que será utilizado ao longo deste trabalho.

Definição 4. Sejam $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ denota uma curva parametrizada no plano.

O parâmetro t pode ser interpretado como o tempo, enquanto as coordenadas $(x(t), y(t))$ descrevem o movimento da partícula no plano cartesiano. O estudo das parametrizações de curvas é relevante em diversos campos da matemática e das ciências, pois permite descrever, de maneira precisa, o comportamento de curvas.

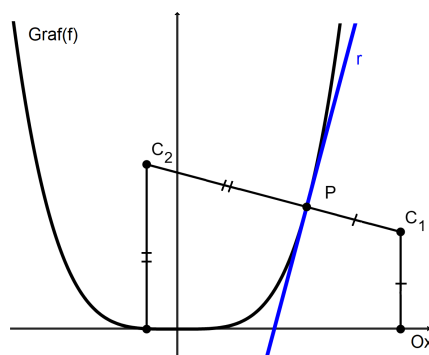
Sejam $k \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ par e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^n$. Este trabalho apresenta uma caracterização, obtida a partir da combinação entre uma curva parametrizada e uma semirreta, do conjunto de conflito gerado pelo gráfico de f e eixo das abscissas. Além dessa caracterização, será fornecida uma interpretação geométrica desses conjuntos.

Este artigo amplia os resultados de [7]. Aprofunda-se a análise anterior por meio de técnicas geométricas e parametrizações mais completas, incluindo a discussão de implicações topológicas relacionadas à noção de germe de conjuntos reais. Além disso, apresentam-se resultados inéditos, formalizados em teoremas, lemas e corolários, bem como aplicações diretas desses resultados.

2 Conjunto de conflito

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ par e $k \in \mathbb{R}^*$. Estamos interessados em encontrar o conjunto de conflito gerado pelo gráfico de f , denotado por $\text{Graf}(f)$, e pelo eixo das abscissas Ox . Sem perda da generalidade, podemos considerar a constante $k > 0$, o caso $k < 0$ é tratado de maneira análogo. Considere r a reta tangente ao $\text{Graf}(f)$ no ponto $P = (p, f(p))$, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Reta tangente ao $\text{Graf}(f)$ passando pelo ponto $P = (p, f(p))$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Mostraremos que o ponto P admitirá exatamente dois pontos C_1 e C_2 , tais que: $d(C_1, P) = d(C_1, Ox)$ e $d(C_2, P) = d(C_2, Ox)$. A saber, a equação da reta ortogonal à reta r no ponto P pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(p)}(x - p) + f(p) \\ &= \frac{-x + p + f(p) \cdot f'(p)}{f'(p)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Como essa reta ortogonal passa pelo ponto $C_j = (x_j, y_j)$, $j = 1, 2$, segue pela equação (1) que:

$$y_j = \frac{-x_j + p + f(p) \cdot f'(p)}{f'(p)}. \quad (2)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} d(P, C_j) &= d(C_j, Ox) \\ d((p, f(p)), (x_j, y_j)) &= d((x_j, y_j), (x_j, 0)) \\ (p - x_j)^2 + (f(p) - y_j)^2 &= y_j^2 \end{aligned}$$

$$y_j = \frac{p^2 - 2px_j + x_j^2 + f^2(p)}{2f(p)}. \quad (3)$$

Igualando as expressões (2) e (3), temos

$$\frac{-x_j + p + f(p) \cdot f'(p)}{f'(p)} = \frac{p^2 - 2px_j + x_j^2 + f^2(p)}{2f(p)}.$$

Multiplicando ambos os lados para eliminar denominadores, obtemos:

$$p^2 f'(p) - 2px_j f'(p) + x_j^2 f'(p) + f^2(p) f'(p) = -2x_j f(p) + 2pf(p) + 2f^2(p) f'(p).$$

Portanto, obtemos a seguinte equação quadrática:

$$f'(p) \cdot x_j^2 - 2(pf'(p) - f(p)) \cdot x_j + p^2 f'(p) - f^2(p) f'(p) - 2pf(p) = 0. \quad (4)$$

Calculando o discriminante da equação (4), temos

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2(pf'(p) - f(p)))^2 - 4f'(p) (p^2 f'(p) - f^2(p) f'(p) - 2pf(p)) \\ &= 4(p^2 f'(p)^2 - 2pf(p) f'(p) + f(p)^2) - 4p^2 f'(p)^2 + 4f(p)^2 f'(p)^2 + 8pf(p) f'(p) \\ &= 4f(p)^2 + 4f(p)^2 f'(p)^2 \\ &= 4f(p)^2 (1 + f'(p)^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$x_j = \frac{pf'(p) - f(p) \pm f(p) \sqrt{1 + f'(p)^2}}{f'(p)}. \quad (5)$$

Substituindo $f(p) = kp^n$ e $f'(p) = nkp^{n-1}$ na equação (5), obtemos:

$$x_1 = \frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{np - p - p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n}.$$

Portanto, substituindo x_1 na equação (2), encontramos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-x_1 + p + f(p) \cdot f'(p)}{f'(p)} \\ &= \frac{-\left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n}\right) + p + kp^n \cdot nkp^{n-1}}{nkp^{n-1}} \\ &= \frac{1}{nkp^{n-1}} \cdot \left(\frac{p - p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + n^2 k^2 p^{2n-1}}{n} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{n^2 k^2 p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + 1}{n^2 k p^{n-2}}.$$

De modo análogo, substituindo x_2 na equação (2) obtemos

$$y_2 = \frac{n^2 k^2 p^{2n-2} + \sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + 1}{n^2 k p^{n-2}}.$$

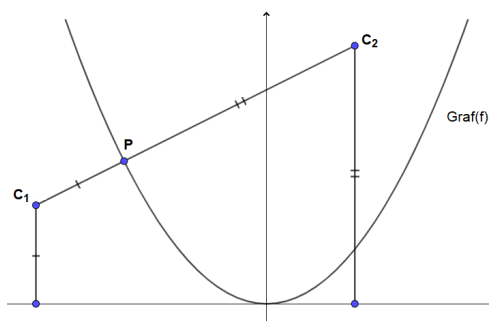
Portanto,

$$C_1 = \left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2 k^2 p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + 1}{n^2 k p^{n-2}} \right). \quad (6)$$

$$C_2 = \left(\frac{np - p - p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2 k^2 p^{2n-2} + \sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + 1}{n^2 k p^{n-2}} \right). \quad (7)$$

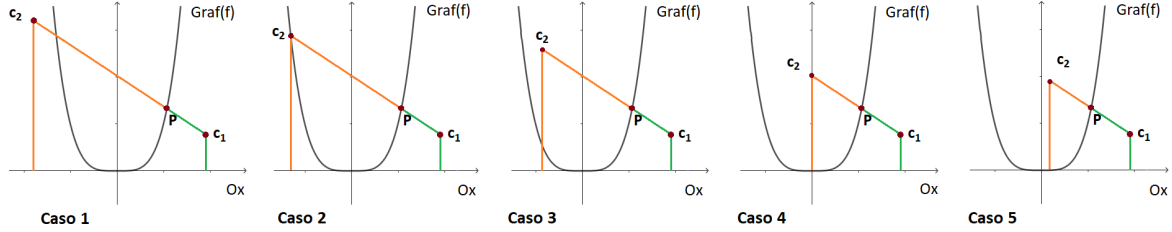
Exemplo 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. A Figura 5 ilustra a localização dos pontos $C_1 = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right)$ e $C_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \right)$, descritos nas equações (6) e (7), associado ao ponto $P = (-1, 1) \in \text{Graf}(f)$.

Figura 5: Localização dos pontos C_1 e C_2 associado ao ponto $P = (-1, 1)$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observe que, para cada ponto $P \in \text{Graf}(f)$, espera-se, em princípio, a existência de dois pontos que satisfaçam a condição $d(C, P) = d(C, Ox)$. No entanto, mostraremos que, exceto na origem, o conjunto $R_P(\text{Graf}(f), Ox)$ é, na maioria das vezes, unitário. Conforme ilustrado na Figura 6, para $p > 0$, há apenas cinco possíveis posições para o ponto C_2 , das quais somente uma é relevante para a análise.

Figura 6: Localização do ponto C_2 no plano cartesiano.


Fonte: Elaborada pelos autores.

Ao analisar as possibilidades, observa-se que, com exceção do caso 4, nos demais, é possível verificar diretamente que o ponto $C_2 \notin R_P(\text{Graf}(f), Ox)$, uma vez que:

Caso 1. $d(C_2, \text{Graf}(f)) < d(C_2, P)$;

Caso 2. $d(C_2, \text{Graf}(f)) = 0 < d(C_2, P)$;

Caso 3. $d(C_2, \text{Graf}(f)) < d(C_2, Ox)$;

Caso 5. $d(C_2, \text{Graf}(f)) < d(C_2, Ox)$.

Por sua vez, ao analisar o caso 4, para que $C_2 = (x_2, y_2) \in R_P(\text{Graf}(f), Ox)$, é necessário que $x_2 = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{np - p - p\sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}}}{n} &= 0 \\ p\sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}} &= np - p \\ p^2 + n^2k^2p^{2n} &= n^2p^2 - 2np^2 + p^2 \\ p &= \pm \sqrt[n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Assim, para $n = 2$, obtemos $p = 0$. Portanto,

$$\lim_{p \rightarrow 0} C_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p - p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 + \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right) = \left(0, \frac{1}{2k} \right).$$

Para $n \geq 4$, ao substituir o valor de p , obtido na equação (8), na equação (7), temos

$$C_2 = \left(0, \frac{n-1}{nk^{2n-2} \sqrt[n-2]{\left(\frac{n-2}{nk^2} \right)^{n-2}}} \right).$$

3 Caracterizando conjunto de conflito

Teorema 1. *Sejam $k \in \mathbb{R}^*$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^2$. Seja $p \in \mathbb{R}^*$. Então, para todo ponto $P = (p, f(p)) \in \text{Graf}(f)$, vale que*

$$R_P(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 - \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right) \right\}$$

Prova do Teorema 1. Seja $p \in \mathbb{R}^*$. Pelas equações (6) e (7) que, para cada $P = (p, f(p)) \in \text{Graf}(f)$, existem dois pontos $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$C_1 = \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 - \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right).$$

$$C_2 = \left(\frac{p - p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 + \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right).$$

Além disso, $d(C_1, P) = d(C_1, Ox)$ e $d(C_2, P) = d(C_2, Ox)$. A partir da equação (8), observa-se que $C_2 \in R_P(\text{Graf}(f), Ox)$ somente quando $p = 0$. Como $p \in \mathbb{R}^*$, concluímos que apenas $C_1 \in R_P(\text{Graf}(f), Ox)$, segue então que:

$$R_P(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 - \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right) \right\}.$$

□

Exemplo 3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$. A seguir, estabelece-se uma correspondência entre os pontos $P_j \in \text{Graf}(f)$ e seus respectivos conjuntos $R_{P_j}(\text{Graf}(f), Ox)$, para $j = 1, 2, 3$. Essa associação permite identificar tais conjuntos com precisão, evidenciando a estrutura do objeto em estudo.*

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow R_{P_1}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{4} \right) \right\}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \Rightarrow R_{P_2}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{4}, \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right) \right\}$$

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow R_{P_3}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \right) \right\}$$

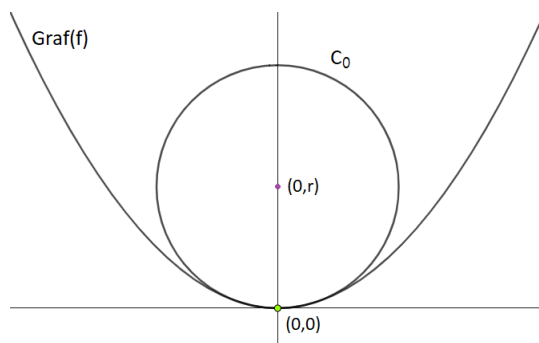
Perceba que, quando $n = 2$, para $P = (p, f(p)) \in \text{Graf}(f)$, com $p \in \mathbb{R}^*$, o conjunto $R_P(\text{Graf}(f), Ox)$ é sempre unitário. Contudo, no caso particular $P = (0, 0)$, faz-se necessária uma análise específica, uma vez que existem infinitos pontos no eixo Oy que pertencem ao conjunto $R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox)$.

Lema 1. Sejam $k \in \mathbb{R}^*$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^2$.

- I. Se $k > 0$, então $R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ (0, y) \mid y \in \left(-\infty, \frac{1}{2k}\right] \right\}$.
- II. Se $k < 0$, então $R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ (0, y) \mid y \in \left[\frac{1}{2k}, +\infty\right) \right\}$.

Para $k > 0$, o Lema 1 estabelece que a circunferência C_0 , com centro em $(0, r)$ e raio $r = \frac{1}{2k}$, é a de maior raio possível que intersecta o $\text{Graf}(f)$ apenas na origem, conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7: Circunferência C_0 tangente ao $\text{Graf}(f)$



Fonte: Elaborada pelos autores.

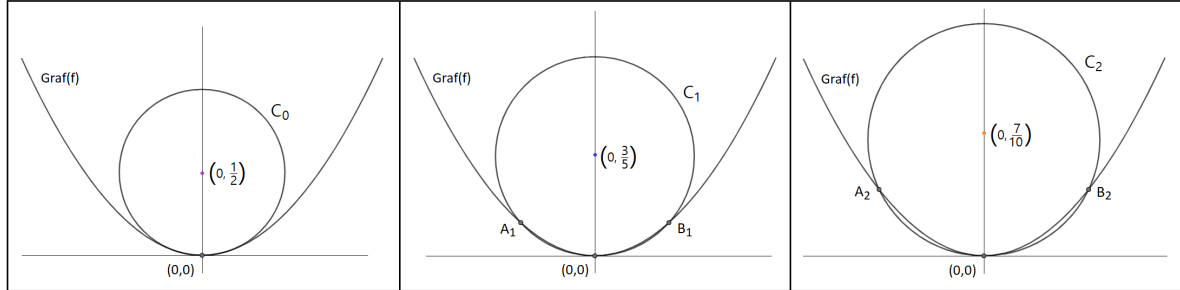
Ou seja, para qualquer circunferência C_r , com centro em $(0, r)$ e raio $r > \frac{1}{2k}$, verificam-se sempre três pontos de interseção com o $\text{Graf}(f)$: a origem, onde permanece a tangência, e outros dois pontos nos quais a circunferência passa a intersectar o gráfico transversalmente.

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$. Considere as circunferências C_0 , C_1 e C_2 , com centros $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{3}{5})$ e $(0, \frac{7}{10})$, e raios $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 8. Então:

$$C_0 \cap \text{Graf}(f) = \{(0, 0)\};$$

$$C_1 \cap \text{Graf}(f) = \left\{ (0, 0), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{5}\right) \right\};$$

$$C_2 \cap \text{Graf}(f) = \left\{ (0, 0), \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{2}{5}\right) \right\}.$$

Figura 8: Circunferência C tangente ao $\text{Graf}(f)$


Fonte: Elaborada pelos autores.

De modo geral, sejam C_s e C_r circunferências de centros $(0, s)$ e $(0, r)$, e raios s e r , respectivamente, com $0 < s \leq \frac{1}{2}$ e $r > \frac{1}{2}$. Nessas condições, tem-se:

$$C_s \cap \text{Graf}(f) = \{(0, 0)\};$$

$$C_r \cap \text{Graf}(f) = \{(0, 0), (-\sqrt{2r-1}, 2r-1), (\sqrt{2r-1}, 2r-1)\}.$$

Prova do Lema 1: Sem perda da generalidade, considere $k > 0$. O caso $k < 0$ segue de modo análogo. Seja $T = (0, y_T)$ um ponto qualquer do eixo Oy . Queremos que:

$$|y_T| \leq d(T, \text{Graf}(f)) \Rightarrow |y_T| \leq \sqrt{x^2 + (y_T - f(x))^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, tomaremos $x \neq 0$, pois para $x = 0$ a igualdade se verifica de maneira trivial. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^*$ temos

$$\begin{aligned} |y_T| &\leq \sqrt{x^2 + (y_T - f(x))^2} \\ y_T^2 &\leq x^2 + y_T^2 - 2y_T f(x) + f(x)^2 \\ 2y_T f(x) &\leq x^2 + f(x)^2 \\ y_T &\leq \frac{x^2 + f(x)^2}{2f(x)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo $f(x) = kx^2$ na equação (9), temos que:

$$y_T \leq \frac{x^2 + k^2 x^4}{2kx^2}.$$

Como $x \neq 0$, temos

$$y_T \leq \frac{1 + k^2 x^2}{2k}.$$

Portanto, para determinar o valor máximo de y_T , basta encontrar o valor mínimo da função

$$\psi(x) = \frac{1 + k^2 x^2}{2k}.$$

Para isso, basta fazer

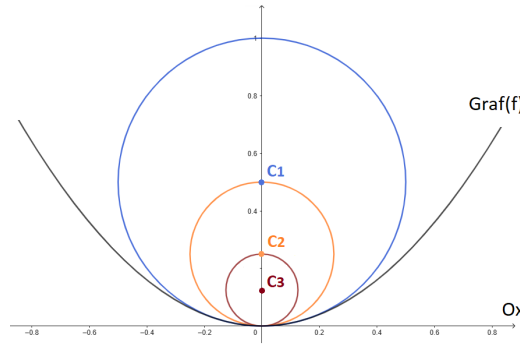
$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + k^2 x^2}{2k} = \frac{1}{2k}.$$

Assim, a circunferência C_k de centro $(0, \frac{1}{2k})$ e raio $r = \frac{1}{2k}$ é tangente tanto ao gráfico da função $f(x) = kx^2$ quanto ao eixo Ox , tendo a origem como único ponto de interseção. Ademais, para todo $0 < r_j \leq \frac{1}{2k}$, a circunferência C_j , de centro $(0, r_j)$ e raio r_j também satisfaz essa propriedade.

□

Exemplo 5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$. A Figura 9 ilustra o gráfico de f e as circunferências C_0, C_1 e C_2 , com centros $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{4})$ e $(0, \frac{1}{8})$ e raios $r_0 = \frac{1}{2}$, $r_1 = \frac{1}{4}$ e $r_2 = \frac{1}{8}$ respectivamente.

Figura 9: Circunferências tangentes ao $\text{Graf}(f)$ e ao eixo Ox .



Fonte: Elaborada pelos autores.

Perceba que toda circunferência com centro em $(0, r_j)$ e raio $0 < r_j \leq \frac{1}{2}$, satisfaz a condição de tangência, tanto ao $\text{Graf}(f)$ quanto ao eixo Ox , tendo a origem como único ponto de interseção.

Corolário 1. Sejam $k \in \mathbb{R}^*$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^2$.

I. Se $k > 0$, então $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\left\{ (0, y) \mid y \in \left(-\infty, \frac{1}{2k} \right] \right\} \cup \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2 p^2}}{2}, \frac{4k^2 p^2 - \sqrt{1 + 4k^2 p^2} + 1}{4k} \right) \right\}$$

II. Se $k < 0$, então $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\left\{ (0, y) \mid y \in \left[\frac{1}{2k}, +\infty \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2 p^2}}{2}, \frac{4k^2 p^2 - \sqrt{1 + 4k^2 p^2} + 1}{4k} \right) \right\}$$

Prova do Corolário 1. Dado $p \in \mathbb{R}$. Seja $P = (p, f(p)) \in \text{Graf}(f)$. Como $\text{Graf}(f)$ é um conjunto fechado, sabemos que

$$\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox) = \bigcup_{P \in \text{Graf}(f)} R_P(\text{Graf}(f), Ox).$$

Separando os casos em que $p = 0$ e os demais casos em que $p \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox) = R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} R_P(\text{Graf}(f), Ox).$$

Assumindo $k > 0$, temos pelo Lema 1

$$R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ (0, y) \mid y \in \left(-\infty, \frac{1}{2k} \right] \right\}.$$

Então, pelo Teorema 1, $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\left\{ (0, y) \mid y \in \left(-\infty, \frac{1}{2k} \right] \right\} \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 - \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right) \right\}.$$

Por outro lado, assumindo $k < 0$, teríamos pelo Lema 1

$$R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ (0, y) \mid y \in \left[\frac{1}{2k}, +\infty \right) \right\}.$$

Assim, pelo Teorema 1, $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\left\{ (0, y) \mid y \in \left[\frac{1}{2k}, +\infty \right) \right\} \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 - \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right) \right\}.$$

□

4 Resultado Principal

Teorema 2. Sejam $k \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ par ($n \geq 4$) e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^n$. Seja $p \in \mathbb{R}^*$. Então, para todo ponto $P = (p, f(p)) \in \text{Graf}(f)$, vale que

I) Se $p \notin \left\{ -\sqrt[n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}, \sqrt[n-2]{\frac{n-2}{nk^2}} \right\}$, então:

$$R_P(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2k^2p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}} + 1}{n^2kp^{n-2}} \right) \right\}.$$

II) Se $p \in \left\{ -\sqrt[n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}, \sqrt[n-2]{\frac{n-2}{nk^2}} \right\}$, então:

$$R_P(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(0, \frac{n-1}{nkp^{n-2}} \right), \left(\frac{2(n-1)p}{n}, \frac{(n-1)(n-2)}{n^2kp^{n-2}} \right) \right\}.$$

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 2, é necessário demonstrarmos o Lema 2, uma vez que este resultado é crucial na prova subsequente e fornecerá as bases necessárias para o desenvolvimento do argumento principal.

Lema 2. Sejam $k \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ par ($n \geq 4$) e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = kx^n$.

Considere $r_0 = \frac{n-1}{nk^{2n-2} \sqrt{\left(\frac{n-2}{nk^2}\right)^{n-2}}}$. Então:

I. Se $k > 0$, temos $R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \{(0, y) \mid y \in (-\infty, r_0]\}$.

II. Se $k < 0$, temos $R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \{(0, y) \mid y \in [r_0, +\infty)\}$.

Prova do Lema 2. Com efeito, seja $T = (0, y_T)$ um ponto qualquer de Oy , então devemos ter o seguinte:

$$|y_T| \leq d(T, \text{Graf}(f)) \Rightarrow |y_T| \leq \sqrt{x^2 + (y_T - f(x))^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sem perda da generalidade, iremos considerar $k > 0$. O caso $k < 0$ segue de modo análogo. Além disso, assumiremos $x \neq 0$, pois para $x = 0$ a igualdade se verifica de maneira direta. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, queremos que

$$\begin{aligned} y_T &\leq \sqrt{x^2 + (y_T - f(x))^2} \\ y_T &\leq \frac{x^2 + f(x)^2}{2f(x)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Como $f(x) = kx^n$ e $x \neq 0$, pela equação (10), temos:

$$y_T \leq \frac{1 + k^2x^{2n-2}}{2kx^{n-2}}.$$

Portanto, para achar o valor máximo de y_T , basta achar o valor mínimo da função

$$\psi(x) = \frac{1 + k^2x^{2n-2}}{2kx^{n-2}}.$$

Para isso, faremos $\psi'(x) = 0$. Derivando a função ψ , obtemos

$$\psi'(x) = \frac{(2n-2)(k^2x^{2n-3})2kx^{n-2} - (2n-2)2kx^{n-3}(1 + k^2x^{2n-2})}{(2kx^{n-2})^2}.$$

Igualando a zero a fim de determinar o ponto crítico da função, encontramos

$$(2n - 2)(k^2 x^{2n-3})2kx^{n-2} - (2n - 2)2kx^{n-3}(1 + k^2 x^{2n-2}) = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos

$$x = \pm \sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}.$$

Como $\psi(x)$ é uma função par, temos $\psi(x) = \psi(\pm x)$. Então, a função atinge o valor mínimo no ponto

$$x_0 = \sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}. \quad (11)$$

Assim, o valor mínimo de $\psi(x)$ é dado em $\psi(x_0)$. Ou seja,

$$\psi(x_0) = \frac{1 + k^2 \left(\sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}} \right)^{2n-2}}{2k \left(\sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}} \right)^{n-2}} = \frac{1 + k^2 \frac{n-2}{nk^2}}{2k \sqrt[2n-2]{\left(\frac{n-2}{nk^2} \right)^{n-2}}} = \frac{n-1}{nk \sqrt[2n-2]{\left(\frac{n-2}{nk^2} \right)^{n-2}}}.$$

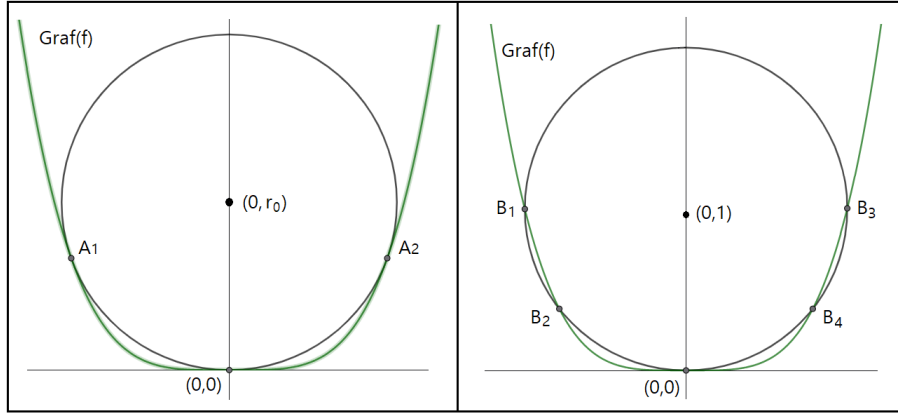
Portanto, a circunferência de centro $T = (0, \psi(x_0))$ e raio $r = \psi(x_0)$ é tangente tanto ao gráfico da função $f(x) = kx^n$ quanto ao eixo Ox . Além disso, para todo $0 < r_j < \psi(x_0)$, a circunferência de centro $C_j = (0, r_j)$ e raio r_j também cumpre essa propriedade.

□

Em contraste com o caso $n = 2$, para $n \geq 4$, a circunferência C_0 , de centro $(0, r_0)$ e raio r_0 , apresenta três pontos de tangência com o $\text{Graf}(f)$. De modo geral, para uma circunferência C_r de centro $(0, r)$ e raio r , tem-se:

- i. Se $0 < r < r_0$, existe exatamente um único ponto de tangência com o $\text{Graf}(f)$.
- ii. Se $r = r_0$, existem exatamente três pontos de tangência com o $\text{Graf}(f)$.
- iii. Se $r > r_0$, existem exatamente cinco pontos de interseção com o $\text{Graf}(f)$, sendo um ponto de tangência e quatro pontos de interseção transversal com o gráfico.

Exemplo 6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4$. Considere as circunferências C_0 e C_1 , com centros $\left(0, \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\right)$ e $(0, 1)$, e raios $\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$ e 1, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10: Circunferência C tangente ao $\text{Graf}(f)$


Fonte: Elaborada pelos autores.

Trabalhando com aproximações numéricas, podemos considerar $r_0 \approx 0,94494$ e $r_1 = 1$. Nessas condições, obtêm-se:

$$C_0 \cap \text{Graf}(f) = \{(0, 0), (-0.89, 0.63), (0.89, 0.63)\};$$

$$C_1 \cap \text{Graf}(f) = \{(-1, 1), (-0.79, 0.38), (0, 0), (0.79, 0.38), (1, 1)\}.$$

Prova do Teorema 2. Tome $p \in \mathbb{R}^*$. Sabemos pelas equações (6) e (7) que, para cada $P = (p, f(p)) \in \text{Graf}(f)$, existem dois pontos $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ onde

$$C_1 = \left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2k^2p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}} + 1}{n^2kp^{n-2}} \right).$$

$$C_2 = \left(\frac{np - p - p\sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2k^2p^{2n-2} + \sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}} + 1}{n^2kp^{n-2}} \right).$$

Além disso, $d(C_1, P) = d(C_1, Ox)$ e $d(C_2, P) = d(C_2, Ox)$. A partir da equação (8), $C_2 \in R_P(\text{Graf}(f), Ox)$ somente quando $p = \pm \sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}$. Portanto, caso $p \notin \left\{ -\sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}, \sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}} \right\}$, temos:

$$R_P(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2k^2p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2k^2p^{2n-2}} + 1}{n^2kp^{n-2}} \right) \right\}.$$

Por outro lado, caso $p \in \left\{ -\sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}}, \sqrt[2n-2]{\frac{n-2}{nk^2}} \right\}$, temos $C_2 \in R_P(\text{Graf}(f), Ox)$. Assim,

$$R_P(\text{Graf}(f), Ox) = \left\{ \left(0, \frac{n-1}{nk p^{n-2}} \right), \left(\frac{2(n-1)p}{n}, \frac{(n-1)(n-2)}{n^2 k p^{n-2}} \right) \right\}.$$

□

Corolário 2. Sejam $k \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ par ($n \geq 4$) e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = kx^n$.

Considere $r_0 = \frac{n-1}{nk \sqrt[n-2]{\left(\frac{n-2}{nk^2}\right)^{n-2}}}$. Então:

I. Se $k > 0$, então $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\{(0, y) \mid y \in (-\infty, r_0]\} \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} \left\{ \left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2 k^2 p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + 1}{n^2 k p^{n-2}} \right) \right\}.$$

II. Se $k < 0$, então $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\{(0, y) \mid y \in [r_0, +\infty)\} \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} \left\{ \left(\frac{np - p + p\sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}}}{n}, \frac{n^2 k^2 p^{2n-2} - \sqrt{1 + n^2 k^2 p^{2n-2}} + 1}{n^2 k p^{n-2}} \right) \right\}.$$

Prova do Corolário 2. Tome $p \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox) = \bigcup_{P \in \text{Graf}(f)} R_P(\text{Graf}(f), Ox).$$

onde $P = (p, f(p))$. Portanto,

$$\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox) = R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} R_P(\text{Graf}(f), Ox).$$

Assumindo $k > 0$, temos pelo Lema 2 que:

$$R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \{(0, y) \mid y \in (-\infty, r_0]\}.$$

onde $r_0 = \frac{n-1}{nk \sqrt[n-2]{\left(\frac{n-2}{nk^2}\right)^{n-2}}}$. Então, pelo Teorema 2, $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\{(0, y) \mid y \in (-\infty, r_0]\} \bigcup_{p \in \mathbb{R}^*} \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2 p^2}}{2}, \frac{4k^2 p^2 - \sqrt{1 + 4k^2 p^2} + 1}{4k} \right) \right\}.$$

Por outro lado, assumindo $k < 0$, temos pelo Lema 2 que:

$$R_{(0,0)}(\text{Graf}(f), Ox) = \{(0, y) \mid y \in [r_0, +\infty)\}.$$

onde $r_0 = \frac{n-1}{nk^{2n-2}\sqrt{\left(\frac{n-2}{nk^2}\right)^{n-2}}}$. Assim, pelo Teorema 2, $Conf(Graf(f), Ox)$ será

$$\{(0, y) \mid y \in [r_0, +\infty)\} \cup \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4k^2p^2}}{2}, \frac{4k^2p^2 - \sqrt{1 + 4k^2p^2} + 1}{4k} \right) \right\}.$$

□

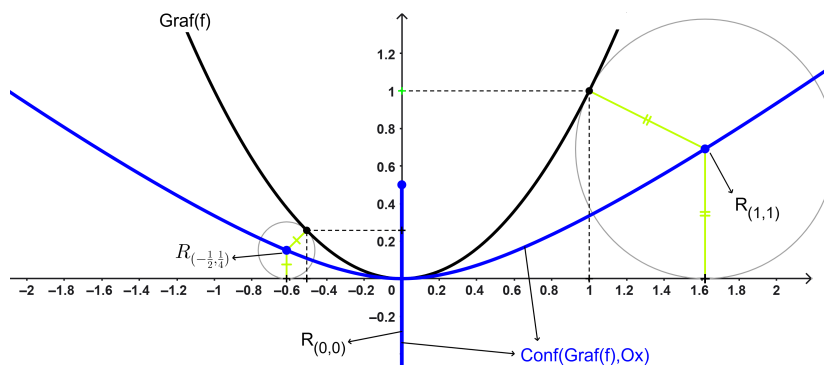
5 Aplicações

Ao transpor construções analíticas para cenários aplicados, amplia-se não apenas a compreensão dos objetos estudados, mas também sua utilidade em diferentes abordagens metodológicas. Nesse sentido, as aplicações funcionam como um elo entre a teoria e a prática, permitindo validar, ilustrar e explorar, de forma mais concreta, as propriedades previamente estabelecidas.

5.1 Análise Computacional

Uma das vantagens de se apresentar uma caracterização explícita do conjunto de conflito reside em sua aplicação computacional. Como este trabalho estabelece tal representação, torna-se viável explorar essas estruturas em softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Diferentemente de descrições implícitas, a forma explícita permite traçar e manipular as curvas com precisão geométrica. Essa transposição do rigor analítico para o ambiente interativo não apenas valida visualmente os teoremas, como também constitui uma ferramenta eficaz para compreender a distribuição espacial dos pontos e para a investigação do comportamento local desses conjuntos.

Figura 11: Representação geométrica do $Conf(Graf(f), Ox)$, para $f(x) = x^2$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura 11 apresenta a representação geométrica do $Conf(Graf(f), Ox)$, para $f(x) = x^2$. A construção foi realizada no software GeoGebra, com base na fórmula analítica apresentada neste trabalho. O desenho ilustra a distribuição espacial desses pontos no plano cartesiano, proporcionando uma visualização clara do comportamento desse conjunto.

5.2 Germes de Conjuntos

Seja $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado. Dois subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, ambos contendo p , são equivalentes em p , e escreve-se $A \sim_p B$, se existe uma vizinhança aberta U de p tal que $A \cap U = B \cap U$. O germe do conjunto A em p , denotado por (A, p) , é a classe de equivalência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contêm p sob essa relação. Isto é,

$$(A, p) = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid p \in B \text{ e existe um aberto } U \ni p \text{ tal que } A \cap U = B \cap U\}.$$

Por exemplo, considere $k \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde $f(x) = kx^n$. Defina $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$. Assim, para cada representante $B \in (Graf(f), 0_{\mathbb{R}^2})$, existe um aberto U de $\mathbb{R}^2$, contendo $0_{\mathbb{R}^2}$, tal que

$$Graf(f) \cap U = B \cap U.$$

Definição 5. *Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado e $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos que contêm p . Diz-se que o germe de conjunto (C, p) é o conjunto de conflito gerado pelos germes (A, p) e (B, p) se, para quaisquer representantes $A_1 \in (A, p)$, $B_1 \in (B, p)$ e $C_1 \in (C, p)$, existe uma vizinhança aberta U de p tal que:*

$$Conf(A_1 \cap U, B_1 \cap U) = C_1 \cap U.$$

A definição 5 está bem definida. Isto é, o resultado depende apenas dos germes (A, p) e (B, p) , e não das escolhas dos representantes. A saber, tome $A_1, A_2 \in (A, p)$ e $B_1, B_2 \in (B, p)$. Pela definição de germes de conjuntos, podemos garantir uma vizinhança aberta U de p tal que:

$$A_1 \cap U = A_2 \cap U \text{ e } B_1 \cap U = B_2 \cap U.$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$d(x, A_1 \cap U) = d(x, A_2 \cap U) \text{ e } d(x, B_1 \cap U) = d(x, B_2 \cap U).$$

Por outro lado, dado $y \in Conf(A_1 \cap U, B_1 \cap U)$, temos

$$d(y, A_1 \cap U) = d(y, B_1 \cap U).$$

Logo,

$$d(y, A_2 \cap U) = d(y, A_1 \cap U) = d(y, B_1 \cap U) = d(y, B_2 \cap U).$$

Assim,

$$d(y, A_2 \cap U) = d(y, B_2 \cap U) \Rightarrow y \in \text{Conf}(A_2 \cap U, B_2 \cap U).$$

Portanto, concluímos que

$$\text{Conf}(A_1 \cap U, B_1 \cap U) = \text{Conf}(A_2 \cap U, B_2 \cap U).$$

□

Exemplo 7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$. Então, pelo corolário 1 temos que $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\left\{ (0, y) \mid y \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \right\} \cup \left\{ \left(\frac{p + p\sqrt{1 + 4p^2}}{2}, \frac{4p^2 - \sqrt{1 + 4p^2} + 1}{4} \right) \right\}_{p \in \mathbb{R}^*}.$$

Assim, para os germes de conjuntos $(\text{Graf}(f), 0_{\mathbb{R}^2})$ e $(Ox, 0_{\mathbb{R}^2})$ teremos

$$\text{Conf}((\text{Graf}(f), 0_{\mathbb{R}^2}), (Ox, 0_{\mathbb{R}^2})) = (\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox), 0_{\mathbb{R}^2}).$$

□

Exemplo 8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = -x^4$. Portanto, pelo corolário 2 temos que $\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox)$ será

$$\left\{ (0, y) \mid y \in \left(-\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}, +\infty \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{3p + p\sqrt{1 + 16p^6}}{4}, \frac{\sqrt{1 + 16p^6} - 16p^6 - 1}{16p^6} \right) \right\}_{p \in \mathbb{R}^*}.$$

Assim, para os germes de conjuntos $(\text{Graf}(f), 0_{\mathbb{R}^2})$ e $(Ox, 0_{\mathbb{R}^2})$ teremos

$$\text{Conf}((\text{Graf}(f), 0_{\mathbb{R}^2}), (Ox, 0_{\mathbb{R}^2})) = (\text{Conf}(\text{Graf}(f), Ox), 0_{\mathbb{R}^2}).$$

□

O conceito de germe de conjunto constitui uma estratégia importante para a análise de propriedades locais de subconjuntos em espaços topológicos, permitindo isolar, e estudar, o comportamento desses conjuntos nas imediações de um ponto fixado. Para um estudo mais aprofundado sobre o tema, recomenda-se a leitura de [8].

6 Considerações finais

Neste trabalho, desenvolvemos uma investigação sobre os conjuntos de conflito, com ênfase na análise de diferentes tipos de conjuntos equidistantes e em algumas de suas propriedades geométricas. Em particular, apresentamos uma caracterização explícita do conjunto de conflito

resultante da interação entre o gráfico da função $f(x) = kx^{2n}$, com $k \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, e o eixo das abscissas Ox .

Os resultados obtidos contribuem, assim, para o entendimento da estrutura dos conjuntos de conflito no plano, revelando como o comportamento local de dois subconjuntos interage para gerar regiões equidistantes. Esse estudo está inserido em um contexto mais amplo, relacionado à análise de germes de conjuntos reais. Por meio da noção de germes, torna-se possível compreender a geometria local de curvas, superfícies e demais variedades, cuja estrutura global, em muitos casos, é derivada a partir de informações locais.

O caso em que o expoente é ímpar encontra-se em investigação. Diferentemente do caso em que o expoente n é par, essa situação apresenta ramificações geométricas adicionais que tornam a análise mais rica e complexa. As diferenças estruturais decorrentes da paridade ímpar introduzem assimetrias nas curvas envolvidas, o que não apenas aprofunda a compreensão dos conjuntos de conflito, como também amplia o escopo e a aplicabilidade dos resultados obtidos.

Espera-se que os resultados aqui apresentados sirvam de base para investigações futuras, tanto no sentido de generalizar os conjuntos de conflito para espaços métricos ou topológicos mais gerais, quanto no de aprofundar o estudo das propriedades métricas, diferenciais e topológicas dos germes de conjuntos reais. Tais pesquisas podem ampliar o escopo teórico da área, bem como fornecer novos instrumentos para a resolução de problemas aplicados em matemática pura e aplicada.

Referências

- [1] Antonio Caminha Muniz Neto. *Geometria*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2022. ISBN: 9788583371854.
- [2] Plácido de Jesus da Silvo Leitão Junior. *Geometria das Hipersuperfícies de Conflito*. Master of Thesis. São Paulo, Brasil, 2002.
- [3] J. B. WILKER. Equidistant Sets and their Connectivity Properties. Em: *Proceedings of The American Mathematical Society* 47 (1975), pp. 446–452.
- [4] Dirk Siersma. Properties of conflict sets in the plane. Em: *Banach Center Publications* 1 (1999), pp. 267–276.
- [5] Lev Birbrair e Dirk Siersma. Metric properties of conflict sets. Em: *Houston Journal of Mathematics* 35 (2009), pp. 73–80.
- [6] Mario Ponce e Patricio Santibáñez. On equidistant sets and generalized conics: the old and the new. Em: *The American Mathematical Monthly* 121 (2014), pp. 18–32.

-
- [7] Leonardo Brandão de Araújo et al. Espaçamento Uniforme: Parametrizando conjuntos de conflitos no plano. Em: *XXV Encontro de Iniciação Científica: Desafios, interfaces e contribuições da Ciência para o desenvolvimento sustentável no semiárido cearense*. Sobral-CE: UVA, 2024, pp. 511–516. URL: https://drive.google.com/file/d/1mXLZvpKkaFRv2pagrDHCrmvYdy5_1FR/view.
- [8] Jiri Lebl. Singularities and complexity in CR geometry. Thesis. San Diego, USA, 2007.

Corresponding Author:

Edvalter da Silva Sena Filho, edvalter_silva@uvanet.br

Submitted: June 14, 2025

Accepted: July 01, 2026

Published: July 21, 2026

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>