



SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM COM TERMO FONTE SINGULAR USANDO MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Santos Alberto Enriquez Remigio

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: santos.er@ufu.br

<https://orcid.org/0000-0002-5088-7311> 

Davi de Mélo Cordeiro

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: dmelo.cordeiro@ufu.br

<https://orcid.org/0009-0002-2649-0194> 

Mathematics Subject Classification (MSC): 65L05, 65L06, 34A37.

Resumo. Este trabalho investiga numericamente problemas de valor inicial modelados por equações diferenciais ordinárias com termos fonte do tipo delta de Dirac, utilizando uma abordagem direta baseada em métodos clássicos de Runge–Kutta. Diferentemente da literatura sobre sistemas impulsivos, que trata as singularidades por meio de condições de salto, a singularidade é considerada explicitamente por meio de uma regularização do delta de Dirac, empregando cinco funções de aproximação: uma com suporte não compacto e quatro com suporte compacto, estas últimas amplamente utilizadas em problemas de interação fluido–estrutura no contexto do método da fronteira imersa de Peskin. Os métodos explícitos RK4 clássico e RK46 foram implementados em linguagem C e inicialmente validados por meio de problemas teste com soluções suaves, nos quais ambos apresentaram a ordem de convergência teórica esperada. Quando aplicados a problemas com fontes singulares, os resultados evidenciam uma perda significativa da ordem de convergência, com valores inferiores a um, indicando limitações da abordagem direta. Ainda assim, o método RK46 apresentou desempenho ligeiramente superior ao RK4 em termos de erro absoluto, e a função de regularização com suporte não compacto produziu os melhores resultados entre as aproximações consideradas. Esses resultados constituem uma contribuição relevante ao documentar o comportamento de métodos clássicos na presença de singularidades tratadas diretamente e ao evidenciar a necessidade do desenvolvimento de esquemas numéricos mais robustos para essa classe de problemas, bem como do estudo e da proposição de novas funções de regularização para a aproximação do delta de Dirac, visando à obtenção de melhores resultados numéricos.

Palavras-chave. Runge-Kutta de quarta ordem. Verificação numérica. Delta de Dirac.

NUMERICAL SOLUTION OF SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR SOURCE TERM USING FOURTH-ORDER RUNGE-KUTTA METHODS

Abstract. This work numerically investigates initial value problems governed by ordinary differential equations with source terms of Dirac delta type, using a direct approach based on classical Runge–Kutta methods. In contrast to the literature on impulsive systems, where singularities are handled through jump conditions at known times, the singularity is explicitly treated via a regularization of the Dirac delta. Five approximation functions are considered: one with non-compact support and four with compact support, the latter being widely used in fluid–structure interaction problems within the framework of Peskin’s immersed boundary method. The classical RK4 and the RK46 methods were implemented in the C programming language and first validated using test problems with smooth solutions, for which both methods achieved the expected fourth-order convergence. When applied to problems with singular sources, the results reveal a significant loss of convergence order, with observed values below one, indicating limitations of the direct approach. Nevertheless, the RK46 method showed slightly better performance than RK4 in terms of absolute error, and the regularization function with non-compact support yielded the best results among the approximations considered. These findings provide a systematic assessment of the behavior of classical methods in the presence of directly treated singularities and highlight the need for the development of more robust numerical schemes for this class of problems. They also motivate further investigation into alternative regularization functions for approximating the Dirac delta, aiming at improved numerical accuracy.

Keywords. Fourth-order Runge-Kutta. Numerical verification. Dirac Delta.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN CON TÉRMINO FUENTE SINGULAR MEDIANTE MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

Resumen. Este trabajo investiga numéricamente problemas de valor inicial modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias con términos fuente de tipo delta de Dirac, utilizando un enfoque directo basado en métodos clásicos de Runge–Kutta. A diferencia de la literatura sobre sistemas impulsivos, que trata las singularidades mediante condiciones de salto, la singularidad se considera explícitamente mediante una regularización de la delta de Dirac, empleando cinco funciones de aproximación: una con soporte no compacto y cuatro con soporte compacto, estas últimas ampliamente utilizadas en problemas de interacción fluido–estructura en el contexto del método de la frontera inmersa de Peskin. Los métodos explícitos RK4 clásico y RK46 fueron implementados en lenguaje C y validados inicialmente mediante problemas de prueba con soluciones suaves, en los que ambos presentaron el orden de convergencia teórico esperado. Al aplicarlos a problemas con fuentes singulares, los resultados evidencian una pérdida significativa del orden

de convergência, com valores inferiores a uno, lo que indica limitaciones del enfoque directo. No obstante, el método RK46 mostró un desempeño ligeramente superior al RK4 en términos de error absoluto, y la función de regularización con soporte no compacto produjo los mejores resultados entre las aproximaciones consideradas. Estos resultados constituyen una contribución relevante al documentar el comportamiento de métodos clásicos en presencia de singularidades tratadas directamente y al evidenciar la necesidad de desarrollar esquemas numéricos más robustos para esta clase de problemas, así como de estudiar y proponer nuevas funciones de regularización para la aproximación de la delta de Dirac, con el objetivo de obtener mejores resultados numéricos.

Palabras clave. Runge-Kutta de cuarto orden. Verificación numérica. Delta de Dirac.

1 Introdução

Muitos fenômenos naturais e processos do dia a dia podem ser descritos matematicamente por sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Exemplos incluem o movimento de um pêndulo simples, a trajetória de uma bola ao ser lançada, a oscilação de uma mola após um impulso e até mesmo modelos epidemiológicos, como o modelo SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) com vacinação impulsiva [1].

Em diversas aplicações, eventos instantâneos, como impactos mecânicos, descargas elétricas e intervenções pontuais em sistemas dinâmicos, são modelados matematicamente por meio da função delta de Dirac. Essa função captura a ideia de um impulso concentrado em um único instante de tempo, sendo amplamente utilizada para representar termos fonte em equações diferenciais.

Um exemplo notável dessa abordagem ocorre no estudo da interação entre um fluido e uma estrutura elástica, no qual modelos matemáticos utilizam a função delta de Dirac para representar o acoplamento entre os meios. Em particular, Peskin [2] modelou a interação entre o sangue e o coração, considerando este como uma estrutura elástica imersa no fluido, de modo que há escoamento tanto no interior quanto no exterior do órgão. Nesse contexto, um termo fonte é incorporado às equações de Navier–Stokes que governam o escoamento, representando a influência da estrutura elástica. Na resolução numérica dessas equações, a função delta de Dirac é substituída por uma função regularizada, construída de modo a preservar propriedades essenciais e a reproduzir adequadamente o comportamento da delta de Dirac [2].

Outro exemplo do uso do delta de Dirac surge no contexto da solução numérica de equações diferenciais parciais hiperbólicas singulares, nas quais a função delta depende tanto do espaço quanto do tempo [3]. Nesses casos, para garantir a convergência da metodologia numérica, o delta de Dirac é substituído por uma função regularizada que obedece a um conjunto de propriedades específicas [3]. No entanto, as aproximações consideradas neste trabalho correspondem àquelas amplamente utilizadas no método da fronteira imersa de Peskin, sendo adaptadas ao

contexto das equações diferenciais ordinárias estudadas.

No contexto de modelos epidemiológicos com vacinação impulsiva, as EDOs são frequentemente modificadas para incluir termos de impulso que representam vacinações aplicadas em momentos específicos. No entanto, a abordagem mais comum na literatura para tratar esses problemas baseia-se na separação do sistema em dois conjuntos de equações: (1) EDOs contínuas, que descrevem a evolução da doença entre os impulsos, e (2) condições de salto, que representam a variação instantânea das variáveis de estado nos momentos da vacinação. Tanto os estudos teóricos quanto os numéricos costumam seguir essa abordagem, sem explorar diretamente a solução numérica do sistema sem essa divisão [4, 5, 6, 7, 8].

A presença da função delta de Dirac em equações diferenciais ordinárias introduz dificuldades matemáticas e computacionais relevantes. A literatura sobre sistemas impulsivos, em geral, trata tais singularidades por meio de condições de salto e da decomposição do problema em subproblemas. Contudo, no contexto de equações diferenciais ordinárias, não há conhecimento de trabalhos que abordem a resolução numérica direta de problemas de valor inicial com termos fonte do tipo delta de Dirac utilizando métodos clássicos, como os de Runge–Kutta, em conjunto com aproximações suaves para o delta, sem recorrer à separação das equações. Nesse contexto, o presente trabalho explora essa abordagem alternativa, resolvendo sistemas de equações diferenciais ordinárias com termos fonte do tipo delta de Dirac sem decomposição em subproblemas. Para isso, o delta de Dirac é aproximado por funções suaves e métodos numéricos clássicos são empregados na resolução das equações.

A validação da implementação dos métodos numéricos é realizada por meio de experimentos computacionais voltados à determinação da ordem de convergência. Em geral, quando a ordem observada coincide com a prevista teoricamente, a implementação pode ser considerada correta. Esse procedimento costuma utilizar problemas com soluções analíticas conhecidas; no entanto, mesmo nesses casos, as hipóteses teóricas que garantem a convergência — como a diferenciabilidade adequada da solução — podem não ser plenamente satisfeitas no domínio considerado. Nesse contexto, analisa-se o comportamento dos métodos numéricos ao resolver diretamente EDOs com termos do tipo delta de Dirac, investigando tanto o erro das soluções numéricas quanto a manutenção da ordem de convergência esperada.

No presente trabalho, estuda-se o comportamento de dois métodos numéricos explícitos amplamente utilizados pela comunidade científica na solução numérica de equações diferenciais. O primeiro é o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios, descrito na literatura, como em Zill e Cullen [9]. O segundo é o método de Runge-Kutta de quarta ordem e seis estágios, reportado por Allampalli et al. [10], amplamente empregado na simulação numérica da dinâmica de fluidos [11].

Os códigos utilizados neste trabalho foram implementados na linguagem C e desenvolvidos para resolver Problemas de Valor Inicial (PVI) associados a sistemas de equações diferenciais

ordinárias de primeira ordem, obtidos a partir da reformulação de EDOs de segunda ordem. Esses sistemas são escritos na forma

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (1)$$

em que (1) representa um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, $\mathbf{y}(t)$ é o vetor de soluções procurado, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ é uma função vetorial dada, t_0 denota o tempo inicial e $\mathbf{y}_0$ é o vetor de condições iniciais associado.

2 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Entre os diferentes métodos de Runge–Kutta explícitos de quarta ordem, destacam-se dois que são frequentemente utilizados em simulações numéricas, em particular em problemas envolvendo interação fluido–estrutura no contexto do método da fronteira imersa. Esses métodos são apresentados a seguir.

Método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico

Este é o método clássico de Runge–Kutta de quarta ordem com quatro estágios, amplamente reportado e utilizado na literatura [12]. Seus coeficientes são escolhidos de modo que a expansão da solução numérica coincida com a expansão em série de Taylor da solução exata até termos de quarta ordem. Embora existam diferentes métodos de quatro estágios que satisfazem essas condições, o esquema clássico é o mais utilizado. A seguir, apresenta-se sua formulação:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta t \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right), \\ t_{i+1} &= t_i + \Delta t. \end{aligned} \quad (2)$$

em que Δt é o passo no tempo e as funções $k_1, \dots, k_4$ representam os incrementos intermediários do método de Runge–Kutta, definidos por:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), & k_2 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \frac{\Delta t}{2}k_2\right), & k_4 &= f(t_i + \Delta t, y_i + \Delta tk_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Método de Runge–Kutta de quarta ordem e seis estágios

O método de Runge–Kutta de quarta ordem e seis estágios (RK46), proposto por Allampalli et al. [10], tem sido utilizado em simulações numéricas, especialmente em problemas de dinâmica dos fluidos. Trata-se de um método desenvolvido com foco em eficiência computacional e propriedades numéricas específicas, como redução de dispersão e dissipação, conforme discutido

na literatura. No presente trabalho, esse método é utilizado com o objetivo de analisar seu desempenho na solução de EDOs com termo fonte singular, em termos de erro numérico e ordem de convergência. Segue o algoritmo deste método:

Algoritmo 1 Método RK46 (Allampalli et al.)

```

1: Dados:  $t_0, y_0, \Delta t, s = 6$ 
2:  $y^{(0)} \leftarrow y_0, t^{(0)} \leftarrow t_0$ 
3:  $w_1 \leftarrow 0$  (ou inicialização conforme tabela)
4: para  $i = 1$  to  $s$  faça
5:    $w_{i+1} = \alpha_i w_i + \Delta t f(t^{(i-1)}, y^{(i-1)})$ 
6:    $y^{(i)} = y^{(i-1)} + \beta_i w_{i+1}$ 
7:    $t^{(i)} = t_0 + c_i \Delta t$ 
8: fim para
9:  $y(t_0 + \Delta t) = y^{(s)}$ 

```

Os coeficientes α_i , β_i e c_i são apresentados na Tabela 1 [10], sendo $s = 6$ o número de estágios do método.

Estágio	α_i	β_i	c_i
1	0.000000000000	0.122000000000	0.000000000000
2	-0.691750960670	0.477263056358	0.122000000000
3	-1.727127405211	0.381941220320	0.269115878630
4	-0.694890150986	0.447757195744	0.447717183551
5	-1.039942756197	0.498614246822	0.749979795490
6	-1.531977447611	0.186648570846	0.898555413085

Tabela 1: Coeficientes do método HALE-RK de seis estágios.

3 Verificação numérica da ordem de convergência

Ambos os métodos de Runge–Kutta considerados possuem ordem quatro. Assim, fixado um tempo final de análise t_f , escolhido para fins de avaliação da convergência, e assumindo que as hipóteses de regularidade da solução estejam satisfeitas, espera-se que o quociente entre os erros obtidos com passos Δt e $\Delta t/2$ tenda a 2^p .

De fato, sendo o método de ordem p , o erro global pode ser escrito como

$$e(\Delta t) \approx C(\Delta t)^p, \quad (4)$$

onde C é uma constante independente de Δt . Consequentemente,

$$\frac{e(\Delta t)}{e(\Delta t/2)} \approx \frac{C(\Delta t)^p}{C(\Delta t/2)^p} = 2^p. \quad (5)$$

Em particular, para métodos de quarta ordem, esse quociente tende a $2^4 = 16$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Mais precisamente, define-se

$$q = \frac{\|y_e - y_a\|_{\Delta t}}{\|y_e - y_a\|_{\Delta t/2}}, \quad (6)$$

onde y_a e y_e denotam as soluções aproximada e exata, respectivamente, e espera-se que $q \approx 16$ no regime assintótico.

A norma do erro é calculada por meio da norma euclidiana,

$$\|e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad (7)$$

em que $e = y_e - y_a$ é o vetor erro e n representa o número de componentes do sistema.

A relação entre a razão dos erros e a ordem do método, $e(\Delta t)/e(\Delta t/2) \rightarrow 2^p$, é um resultado clássico da teoria de convergência de métodos de passo único para EDOs [13]. O procedimento de verificar numericamente esta ordem é um passo fundamental na verificação de código (code verification), um conceito consolidado por [14] e detalhado por [15], sendo recomendado para garantir a correta implementação computacional dos esquemas numéricos.

3.1 Problema 1

Considera-se inicialmente o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = w, \\ w' = -2 \sin(t) - v. \end{cases} \quad (8)$$

O sistema é resolvido no intervalo $t \in [12, 20]$. A partir da solução analítica $u(t) = t \sin t$, $v(t) = \sin t + t \cos t$ e $w(t) = 2 \cos t - t \sin t$, determinam-se as condições iniciais em $t_0 = 12$.

Considerando o tempo final de análise $t = 20$, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 2.

Observa-se que, à medida que o passo temporal é refinado, os quocientes entre erros sucessivos aproximam-se de 16, em concordância com a ordem teórica quatro dos métodos considerados. Essa tendência é consistente ao longo dos refinamentos, com pequenas variações nos

dt	Erro RK4	Quociente	Erro RK46	Quociente
0,1	1,299992E-04		4,447432E-05	
0,05	8,013518E-06	16,2225	2,742630E-06	16,2159
0,025	4,973515E-07	16,1124	1,702302E-07	16,1113
0,0125	3,096738E-08	16,0605	1,059501E-08	16,0670
0,00625	1,947998E-09	15,8970	6,777702E-10	15,6322

Tabela 2: Erros para o problema 1

últimos níveis, possivelmente associadas a efeitos de arredondamento ou limitações de precisão numérica. Além disso, o método RK46 apresenta erros sistematicamente menores que o RK4 para todos os valores de Δt , indicando maior precisão para o problema analisado.

3.2 Problema 2

De forma análoga ao problema anterior, considera-se o seguinte sistema, que também possui solução analítica. O sistema é resolvido em $t \in [0, 4]$, sendo composto por quatro equações.

$$\begin{cases} u' = -2u - v - w - 2s, \\ v' = u - 2v + 2w - s, \\ w' = -u - 2v - 2w - s, \\ s' = 2u - v + w - 2s. \end{cases} \quad (9)$$

A condição inicial é $u(0) = 1$, $v(0) = 1$, $w(0) = 1$ e $s(0) = -1$, e a solução analítica do sistema é dada por $u(t) = e^{-t} \sin t + e^{-3t} \cos t$, $v(t) = e^{-t} \cos t + e^{-3t} \sin t$, $w(t) = -(e^{-t} \sin t + e^{-3t} \cos t)$ e $s(t) = -(e^{-t} \cos t + e^{-3t} \sin t)$.

A Tabela 3 apresenta os erros e os respectivos quocientes obtidos no tempo final $t = 4$.

dt	Erro RK4	Quociente	Erro RK46	Quociente
0,1	5,333085E-07		1,772584E-07	
0,05	3,194949E-08	16,6922	1,061922E-08	16,6922
0,025	1,955066E-09	16,3419	6,498177E-10	16,3418
0,0125	1,209068E-10	16,1700	4,018517E-11	16,1706
0,00625	7,515505E-12	16,0876	2,496010E-12	16,0998

Tabela 3: Erros para o problema 2

Observa-se que os quocientes entre erros sucessivos aproximam-se de 16, confirmando a ordem teórica quatro dos métodos considerados. Além disso, nota-se que o método RK46 produz erros sistematicamente menores que o RK4 para todos os valores de Δt . Em particular, a razão entre os erros dos dois métodos permanece aproximadamente constante e próxima de 3, indicando que o RK46 é cerca de três vezes mais preciso que o RK4 neste problema.

3.3 Problema 3

Considera-se o seguinte sistema de quatro equações, resolvido no intervalo $t \in [0, 5]$:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = w, \\ w' = s, \\ s' = -(wu^2 + \frac{\sin t \cos t}{2}). \end{cases} \quad (10)$$

Dadas as condições iniciais $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $w(0) = 0$ e $s(0) = -1$, a solução analítica é $u(t) = \sin t$, $v(t) = \cos t$, $w(t) = -\sin t$ e $s(t) = -\cos t$.

A Tabela 4 apresenta os erros e os quocientes obtidos.

dt	Erro RK4	Quociente	Erro RK46	Quociente
0,1	1,770231E-05		9,048461E-06	
0,05	1,026541E-06	17,2446	5,495334E-07	16,4657
0,025	6,146524E-08	16,7012	3,375764E-08	16,2788
0,0125	3,754735E-09	16,3701	2,090137E-09	16,1509
0,00625	2,319284E-10	16,1892	1,299657E-10	16,0822

Tabela 4: Erros para o problema 3

Os resultados confirmam o comportamento esperado para métodos de quarta ordem, com quocientes próximos de 16. Além disso, observa-se que o método RK46 apresenta erros ligeiramente menores, indicando melhor desempenho em termos de precisão para este conjunto de testes.

4 Solução numérica de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

Os problemas apresentados a seguir consistem em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, cuja solução numérica pode ser obtida por métodos diretos, como em [16], ou por meio de uma abordagem indireta. Esta última consiste em transformar uma equação diferencial ordinária de ordem n em um sistema equivalente de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Neste trabalho, optou-se pela abordagem indireta, aplicando os métodos de Runge–Kutta descritos anteriormente.

As equações diferenciais consideradas incluem um termo fonte singular proporcional à distribuição de Dirac, denotada por $\delta(t)$. A distribuição delta é um funcional linear contínuo que associa a cada função teste $\phi(t)$ (suave e de suporte compacto) o valor $\phi(0)$, i.e., $\delta[\phi] = \phi(0)$. Em problemas físicos, essa distribuição modela impulsos concentrados em um ponto. Contudo,

numericamente não é possível trabalhar diretamente com a singularidade; por isso, aproxima-se δ por uma família de funções regulares (sequência delta) da forma [3]

$$\delta_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta t} \phi\left(\frac{t}{\Delta t}\right), \quad \Delta t \rightarrow 0^+, \quad (11)$$

onde $\phi(t)$ é uma função geradora integrável, chamada núcleo de regularização, que satisfaz a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1. \quad (12)$$

Tal sequência converge para δ no sentido das distribuições [3]. A qualidade da aproximação é caracterizada pela ordem p , definida pelos momentos da função ϕ [2, 17]:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \phi(x) dx = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, p-1, \\ \neq 0, & k = p. \end{cases} \quad (13)$$

No presente trabalho, são consideradas diferentes funções regularizadas ϕ para aproximar a delta de Dirac, todas satisfazendo a condição de integral unitária $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1\right)$. Pode-se mostrar que a função ϕ_0 possui ordem de aproximação $p = 1$ e não apresenta suporte compacto, enquanto as funções ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 possuem ordem de aproximação $p = 2$, sendo todas de suporte compacto.

As funções de regularização consideradas são apresentadas a seguir, e seu comportamento é ilustrado na Figura 1.

$$\phi_0(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^2} e^{-1/r}, & r > 0, \\ 0, & r \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

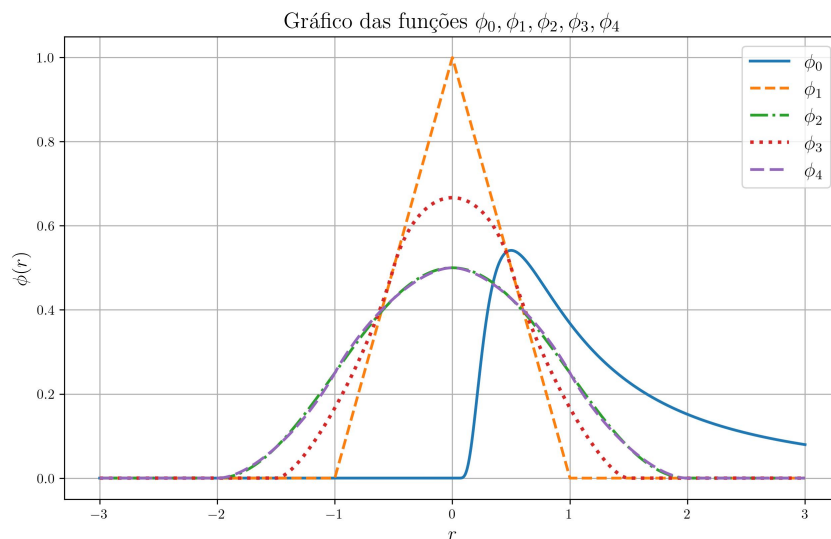
$$\phi_1(r) = \begin{cases} 1 - |r|, & |r| \leq 1, \\ 0, & |r| > 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$\phi_2(r) = \begin{cases} \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)}{4}, & |r| \leq 2, \\ 0, & |r| > 2, \end{cases} \quad (16)$$

$$\phi_3(r) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 - 3r^2}}{3}, & |r| \leq 0.5, \\ \frac{5 - 3|r| - \sqrt{1 - 3(1 - |r|)^2}}{6}, & 0.5 < |r| \leq 1.5, \\ 0, & |r| > 1.5, \end{cases} \quad (17)$$

$$\phi_4(r) = \begin{cases} \frac{3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}}{8}, & |r| \leq 1, \\ \frac{5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}}{8}, & 1 < |r| \leq 2, \\ 0, & |r| > 2, \end{cases} \quad (18)$$

Figura 1: Funções de regularização ϕ utilizadas na aproximação do delta de Dirac, incluindo funções com suporte compacto e não compacto.



A função ϕ_0 foi introduzida em [3], ao passo que as funções ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 são descritas em [2, 17]. A escolha da função ϕ_0 neste trabalho deve-se ao fato de ela ser não nula apenas para argumentos positivos ($r > 0$), ou seja, para tempos posteriores ao instante do impulso. Dessa forma, sua utilização preserva explicitamente uma relação de causalidade, uma vez que a influência do impulso ocorre apenas após sua aplicação. Em contraste, as funções ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 são simétricas e assumem valores não nulos tanto antes quanto depois do instante do impulso. Embora tais funções sejam amplamente utilizadas como aproximações da delta de Dirac na literatura, sua aplicação em problemas dependentes do tempo pode introduzir contribuições associadas a instantes anteriores ao impulso, motivo pelo qual se optou por incluir também a função causal ϕ_0 na presente investigação.

Antes de apresentar os resultados numéricos, cabe destacar que, ao utilizar as funções ϕ_3 e ϕ_4 como aproximações para a delta de Dirac, observou-se divergência numérica nas soluções computadas, tanto com o método de Runge–Kutta clássico quanto com o método de seis estágios (RK46). Dessa forma, optou-se por apresentar, a seguir, apenas os resultados correspondentes às funções ϕ_0 , ϕ_1 e ϕ_2 , para as quais foram obtidas soluções numéricas estáveis.

4.1 Força impulsiva

A segunda lei de Newton para uma força impulsiva atuando sobre uma partícula de massa m no instante $t_0 > 0$ é modelada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = I \delta(t - t_0), \quad (19)$$

em que I representa a intensidade da força impulsiva e δ denota a função delta de Dirac. Assume-se como condição inicial que a partícula está em repouso imediatamente antes de t_0 .

Utilizando a transformada de Laplace, obtém-se a seguinte solução analítica para a posição:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{I}{m}(t - t_0), & t \geq t_0, \end{cases} \quad (20)$$

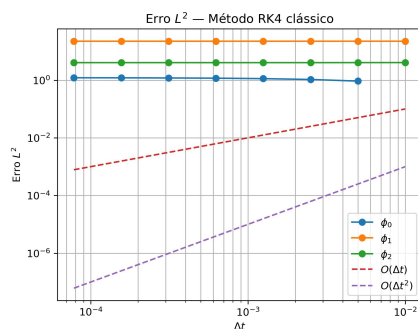
que é contínua, porém não diferenciável em $t = t_0$. A derivada da solução é dada por

$$x'(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{I}{m}, & t > t_0. \end{cases} \quad (21)$$

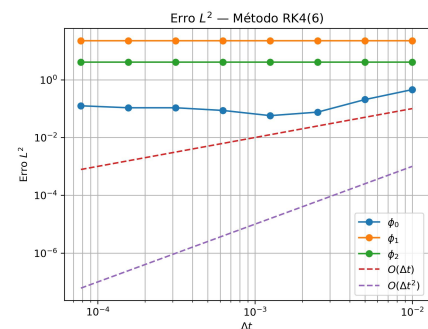
Do ponto de vista numérico, o problema é resolvido a partir do instante inicial $t = 0$, com condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$. A ação do impulso é incorporada por meio do termo fonte $I\delta(t - t_0)$, cuja contribuição é efetivamente capturada no instante t_0 durante a integração temporal.

A Figura 2 apresenta os erros em escala log-log obtidos com os métodos RK4 e RK46 para as diferentes funções de regularização consideradas, mostrados nas subfiguras 2a e 2b, respectivamente. Além disso, são indicadas retas de referência correspondentes a métodos de primeira e segunda ordem.

Figura 2: Erros em escala log-log para o problema de força impulsiva (PFI), utilizando diferentes funções de regularização.



(a) RK4



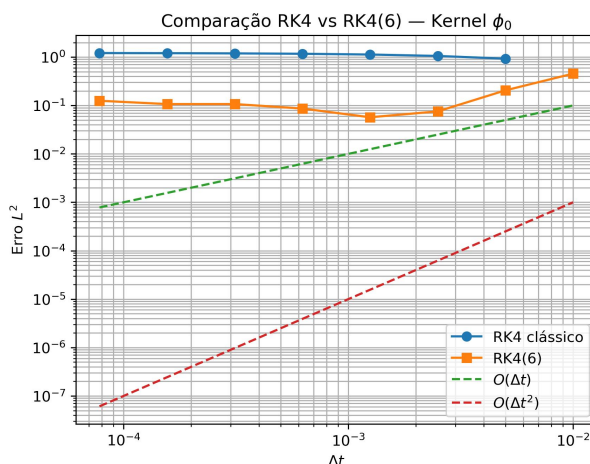
(b) RK46

Observa-se que, para todas as funções ϕ consideradas, os erros não apresentam o comportamento típico de métodos de quarta ordem. Em particular, nota-se que a redução do passo Δt não conduz à diminuição significativa do erro, indicando perda de ordem de convergência. Esse comportamento está diretamente relacionado à presença do termo singular na equação, que introduz uma descontinuidade na derivada da solução. Como consequência, as hipóteses de suavidade necessárias para a convergência de ordem quatro dos métodos de Runge–Kutta não são satisfeitas.

Comparando as diferentes funções de regularização, verifica-se que a escolha de ϕ influencia significativamente a magnitude do erro. Em particular, a função ϕ_0 , associada a uma aproximação de primeira ordem para o delta de Dirac, produz erros menores do que as funções ϕ_1 e ϕ_2 , associadas a aproximações de segunda ordem. Entretanto, nenhuma das regularizações consideradas permite recuperar a ordem teórica dos métodos numéricos.

A Figura 3 apresenta uma comparação direta entre os métodos RK4 e RK46 utilizando a função ϕ_0 . Observa-se que, embora ambos os métodos apresentem comportamento semelhante, o método RK46 tende a produzir erros ligeiramente menores em algumas faixas de Δt , indicando melhor desempenho relativo nesse contexto.

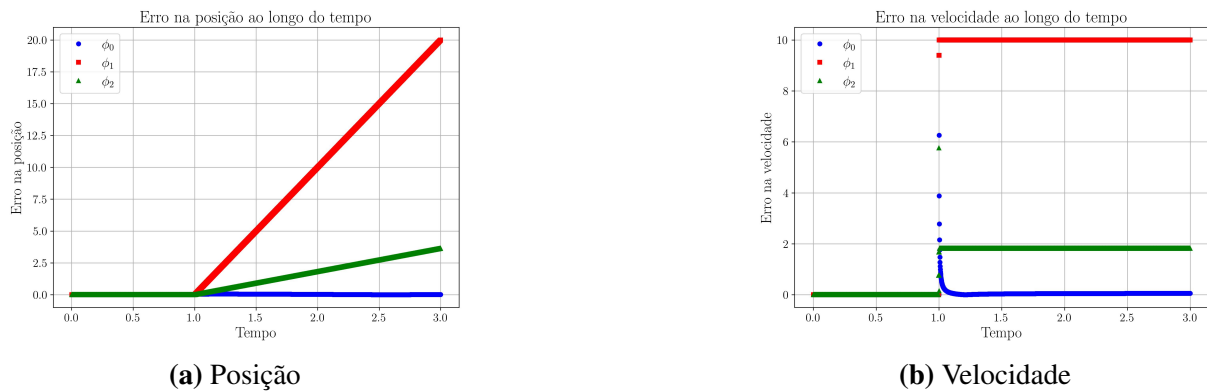
Figura 3: Erros em escala log–log para o problema de força impulsiva (PFI) com ϕ_0 , comparando os métodos RK4 e RK46.



Nas Figuras 4a e 4b, apresentam-se, respectivamente, o módulo do erro na posição e o módulo do erro na velocidade, definidos como o valor absoluto da diferença entre a solução numérica e a solução analítica para cada grandeza.

Observa-se que, para $t < t_0 = 1$, os erros são praticamente nulos em todos os casos, o que está de acordo com o fato de que, antes da aplicação da força impulsiva, o problema é suave e o sistema encontra-se em repouso. No entanto, no instante do impulso, ocorre uma descontinuidade na velocidade, o que introduz dificuldades na aproximação numérica.

Figura 4: Módulo do erro na posição e na velocidade em todo o intervalo temporal, para diferentes ϕ ($\Delta t = 0.00125$).



Nota-se que a escolha da função ϕ influencia significativamente o comportamento do erro nas proximidades de t_0 . Em particular, a função ϕ_0 apresenta os menores erros tanto na posição quanto na velocidade, indicando uma melhor capacidade de capturar o efeito do impulso.

Por outro lado, as funções ϕ_1 e ϕ_2 introduzem erros mais pronunciados logo após t_0 , evidenciando que a forma da regularização afeta diretamente a representação numérica da descontinuidade. Esse erro inicial na velocidade se propaga ao longo do tempo e impacta também a solução da posição, refletindo a natureza acoplada do sistema.

Assim, os resultados indicam que a escolha da função ϕ é crucial para a precisão da solução numérica em problemas com termos singulares do tipo impulso, especialmente na captura correta do salto na velocidade.

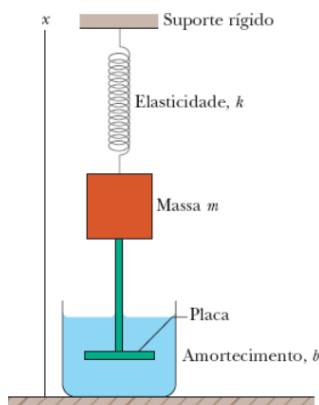
4.2 Oscilador harmônico amortecido

Um oscilador harmônico é um sistema físico no qual ocorrem oscilações em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos clássicos incluem o movimento de um pêndulo e o de um bloco preso a uma mola, como ilustrado na Figura 5.

Um oscilador harmônico amortecido pode ser descrito como um sistema que oscila em torno de uma posição de equilíbrio sob a ação de uma força dissipativa, que reduz a amplitude do movimento ao longo do tempo. No exemplo da Figura 5, essa dissipação pode ser associada à resistência imposta pelo meio ou por um dispositivo acoplado ao sistema. Na ausência de amortecimento, o movimento seria periódico, com amplitude constante; entretanto, na presença de amortecimento, a energia do sistema é dissipada e a amplitude das oscilações decresce ao longo do tempo.

Para um oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força externa, segundo [19], o mo-

Figura 5: Oscilador harmônico amortecido. Fonte: Halliday, Resnick e Walker [18].



vimento é descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t), \quad (22)$$

onde m é a massa da partícula, b é o coeficiente de amortecimento viscoso, k é a constante elástica da mola e $f(t)$ representa a força externa aplicada ao sistema.

No presente trabalho, considera-se uma força impulsiva da forma

$$f(t) = I\delta(t - t_0), \quad (23)$$

onde I representa a intensidade do impulso aplicado no instante t_0 . Assume-se que o sistema encontra-se em repouso imediatamente antes da aplicação do impulso, isto é,

$$x(t_0^-) = 0, \quad x'(t_0^-) = 0. \quad (24)$$

Utilizando a Transformada de Laplace e a propriedade de deslocamento associada à delta de Dirac, obtém-se a seguinte solução analítica para a posição:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{I}{mw} e^{-\lambda(t-t_0)} \sin(w(t-t_0)), & t \geq t_0, \end{cases} \quad (25)$$

e, para a velocidade,

$$x'(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{I}{mw} e^{-\lambda(t-t_0)} [w \cos(w(t-t_0)) - \lambda \sin(w(t-t_0))], & t > t_0, \end{cases} \quad (26)$$

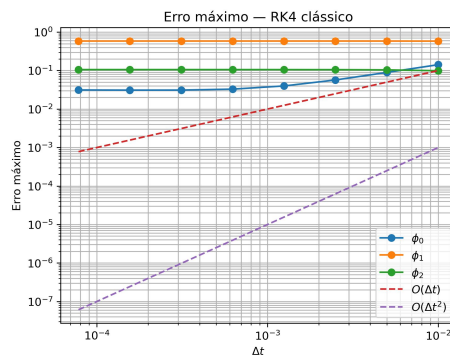
em que

$$w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}, \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda = \frac{b}{2m}. \quad (27)$$

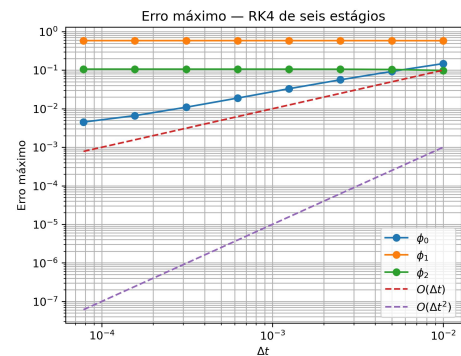
Do ponto de vista numérico, o sistema é resolvido a partir de $t = 0$, com condições iniciais homogêneas $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$, análogas às consideradas no problema anterior. A ação do impulso é incorporada via termo fonte $I\delta(t - t_0)$, cuja contribuição singular ocorre no instante $t = t_0$, induzindo uma descontinuidade na derivada da solução.

A Figura 6 apresenta, em escala log-log, os erros obtidos com os métodos RK4 e RK46 para as diferentes funções de regularização consideradas, conforme ilustrado nas subfiguras 6a e 6b, respectivamente. Em ambas as subfiguras, são indicadas retas de referência correspondentes a métodos de primeira e segunda ordem.

Figura 6: Erros em escala log-log para o problema do oscilador harmônico amortecido, utilizando as funções ϕ_0 , ϕ_1 e ϕ_2 . As retas indicam ordens de convergência 1 e 2.



(a) RK4



(b) RK46

Assim como observado no problema de força impulsiva, os erros não apresentam o comportamento típico de métodos de quarta ordem: a redução do passo Δt não se traduz em ganhos proporcionais de precisão, evidenciando novamente a perda de convergência decorrente da singularidade. A escolha da função de regularização também influencia diretamente a magnitude do erro, sendo a função ϕ_0 a que novamente produz os menores erros entre as aproximações testadas.

A Figura 7 apresenta uma comparação direta entre os métodos RK4 e RK46 utilizando a função ϕ_0 . Observa-se que ambos os métodos apresentam comportamento qualitativamente semelhante, porém o método RK46 tende a produzir erros menores para valores mais refinados de Δt , indicando melhor desempenho relativo também neste caso.

Nas Figuras 8a e 8b apresentam-se, respectivamente, o módulo do erro na posição e o módulo do erro na velocidade para o problema do oscilador harmônico amortecido, considerando diferentes escolhas da função de regularização ϕ e passo de tempo $\Delta t = 0.00125$.

Figura 7: Comparação dos erros em escala log-log para o oscilador harmônico amortecido utilizando a função ϕ_0 , com os métodos RK4 e RK46.

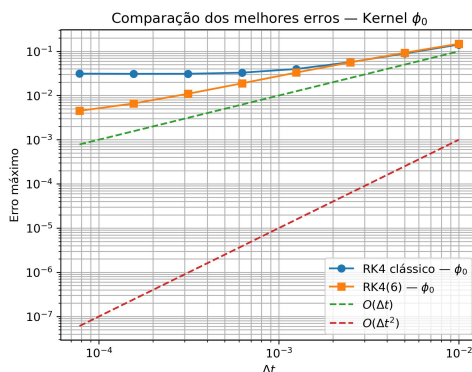
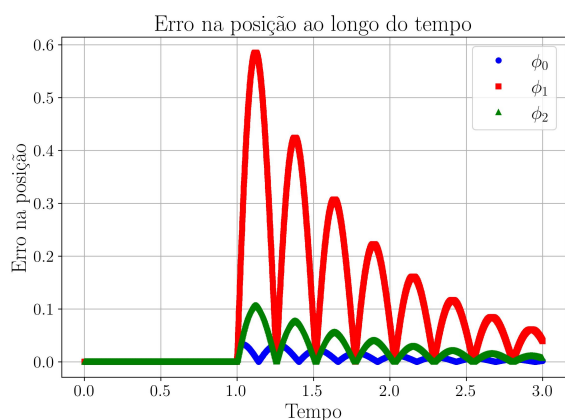
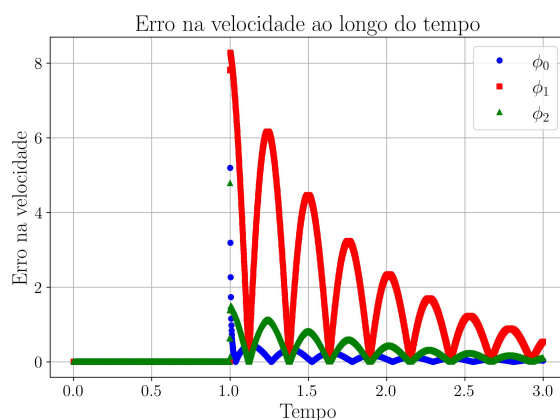


Figura 8: Módulo do erro na posição e na velocidade para o oscilador amortecido, com $\Delta t = 0.00125$.



(a) Erro na posição.



(b) Erro na velocidade.

Assim como no caso da força impulsiva sem amortecimento, observa-se que, para $t < t_0 = 1$, os erros são desprezíveis, uma vez que o termo fonte é nulo nesse intervalo e a solução exata é trivial (identicamente nula), sendo reproduzida sem erro significativo pelo método numérico. No instante do impulso, a contribuição singular do termo $I\delta(t - t_0)$ induz uma descontinuidade na velocidade, o que compromete a precisão da aproximação numérica, dependendo da função de regularização ϕ adotada.

Entretanto, diferentemente do caso não amortecido, nota-se que os erros introduzidos após t_0 tendem a decair ao longo do tempo. Esse comportamento é consequência direta da presença do termo dissipativo no sistema, que atua atenuando tanto a solução quanto os erros numéricos associados.

Ainda assim, nas proximidades do instante do impulso, observa-se que a escolha da função

ϕ desempenha papel fundamental na qualidade da aproximação. Em particular, a função ϕ_0 novamente apresenta melhor desempenho, produzindo erros menores tanto na posição quanto na velocidade. As funções ϕ_1 e ϕ_2 , por sua vez, introduzem erros mais significativos imediatamente após t_0 , especialmente na variável velocidade, onde a descontinuidade é mais pronunciada.

Esses resultados indicam que, embora o amortecimento contribua para reduzir os erros ao longo do tempo, a escolha da função de regularização continua sendo crucial para a correta captura do comportamento singular no instante do impulso.

5 Conclusão

Neste trabalho, investigou-se a solução numérica de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com termo fonte singular, utilizando métodos explícitos de Runge–Kutta de quarta ordem. As equações foram reformuladas como sistemas de primeira ordem, e os métodos RK4 clássico e RK46 foram implementados em linguagem C. A convergência numérica foi avaliada por meio de refinamentos sucessivos do passo no tempo, considerando problemas com e sem a presença de singularidades.

Para equações com soluções suficientemente suaves, ambos os métodos apresentaram a ordem de convergência teórica esperada, com desempenho ligeiramente superior do método RK46. Por outro lado, nos casos envolvendo termos fonte do tipo delta de Dirac regularizado, observou-se uma perda significativa da ordem de convergência. Essa degradação pode ser atribuída, por um lado, à falta de suavidade da solução associada à presença do termo singular e, por outro, ao erro introduzido pela regularização utilizada para aproximar o delta de Dirac, o qual pode dominar o erro de discretização dos métodos numéricos.

Além disso, verificou-se que a escolha da função de regularização exerce influência direta na precisão das soluções numéricas. Em particular, a função ϕ_0 , apesar de não possuir suporte compacto e não ser usualmente empregada em problemas de interação fluido–estrutura, apresentou os melhores resultados em termos de erro absoluto entre as funções consideradas. Vale ressaltar que, diferentemente de ϕ_1 a ϕ_4 , a função ϕ_0 não preserva exatamente a massa unitária no contexto discreto (sua soma sobre os inteiros é ≈ 0.846422). Esse resultado indica que a precisão na aproximação da delta de Dirac não é determinada unicamente pela conservação da massa discreta; propriedades como causalidade, suavidade e decaimento podem ser igualmente ou mais relevantes.

Cabe observar que, embora as funções de regularização utilizadas sejam classificadas na literatura segundo diferentes ordens de aproximação para a delta de Dirac, não foi objetivo deste trabalho realizar uma verificação numérica independente dessas propriedades. Assim, foram adotadas as ordens de aproximação reportadas na literatura especializada. Da mesma forma, a presente investigação teve como foco principal avaliar a influência da escolha da função de regularização sobre a solução numérica, não sendo realizada uma análise específica da relação

entre a ordem da aproximação da delta de Dirac e a ordem de convergência dos métodos de Runge–Kutta empregados. A compreensão mais aprofundada dessa interação requer um estudo teórico e computacional dedicado, que extrapola o escopo do presente trabalho.

Os resultados obtidos evidenciam, de forma sistemática, as limitações dos métodos clássicos frente a fontes singulares e reforçam a necessidade do desenvolvimento de abordagens numéricas mais robustas para esse tipo de problema. Como direções futuras, destacam-se o desenvolvimento e análise de funções de regularização com maior ordem de aproximação, a investigação do papel do suporte das funções de regularização na precisão numérica, bem como o uso de estratégias adaptativas de passo no tempo e métodos especificamente projetados para lidar com descontinuidades na solução e em suas derivadas.

Por fim, este trabalho abre caminho para investigações mais aprofundadas sobre a interação entre erro de regularização e erro de discretização, visando à construção de métodos numéricos mais precisos e eficientes para problemas com fontes singulares.

Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) pelo apoio concedido ao desenvolvimento deste trabalho. Agradecemos também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pela bolsa de Iniciação Científica concedida a Davi de Mélo Cordeiro, sob orientação do prof. Santos Alberto Enriquez Remigio.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

As obras submetidas ao jornal BEJOM estão sujeitas à licença [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Sob esta licença, os autores concedem aos leitores o direito de compartilhar, adaptar e utilizar as obras, inclusive para fins comerciais, desde que o crédito apropriado seja dado aos autores. Quaisquer modificações devem ser indicadas. Não há restrições adicionais além das estabelecidas pela licença.

Referências

- [1] Abouelkheir, I.; El Kihal, F.; Rachik, M.; Elmouki, I. Optimal impulse vaccination approach for an SIR control model with short-term immunity. *Mathematics* **7** (2019), no. 5, 420. DOI: 10.3390/math7050420.
- [2] Peskin, C. S. The immersed boundary method. *Acta Numerica* **11** (2002), 479–517. DOI: 10.1017/S0962492902000077.
- [3] Suarez, J. P. et al. A high-order Dirac-Delta Regularization with optimal scaling in the spectral solution of one dimensional singular hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing* **36** (2014), no. 4, A1831–A1849. DOI: 10.1137/130939341.
- [4] Bainov, D. D.; Simeonov, P. *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1995.
- [5] Liang, H.; Song, M. H.; Liu, M. Z. Stability of the analytic and numerical solutions for impulsive differential equations. *Applied Numerical Mathematics* **61** (2011), no. 11, 1103–1113. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.12.005.
- [6] Santos, L. H. C. Equações diferenciais impulsivas: uma abordagem sobre estabilidade e métodos numéricos. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática* **23** (2023), no. 1, 111–140.
- [7] Li, C.; Hui, F.; Li, F. Stability of differential systems with impulsive effects. *Mathematics* **11** (2023), no. 20, 4382. DOI: 10.3390/math11204382.
- [8] Xing, B. et al. Neural network methods based on efficient optimization algorithms for solving impulsive differential equations. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence* **5** (2024), no. 3, 1067–1076. DOI: 10.1109/TAI.2022.3217207.
- [9] Zill, D. G.; Cullen, M. R. *Equações Diferenciais*. São Paulo: Pearson, 2001.
- [10] Allampalli, V. et al. High accuracy large-step explicit Runge-Kutta (HALE-RK) schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics* **228** (2009), no. 10, 3837–3850. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.05.030.
- [11] Monteiro, L. M.; Mariano, F. P. Flow modeling over airfoils and vertical axis wind turbines using Fourier Pseudo-Spectral method and coupled Immersed Boundary Method. *Axioms* **12** (2023), no. 2, 212. DOI: 10.3390/axioms12020212.

-
- [12] Scherer, C. *Métodos Computacionais da Física*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [13] Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 2^a ed. Springer, 1993.
- [14] Roache, P. J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers, 1998.
- [15] Roy, C. J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *Journal of Computational Physics* **205** (2005), no. 1, 131–156. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.10.036.
- [16] Rufato, R. C.; Enriquez-Remigio, S. A.; Morais, T. S. Application of direct integration methods in the solution of a nonlinear beam problem. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática* **7** (2021), no. 1, e3002. DOI: 10.35819/remat2021v7i1id4277.
- [17] Yang, X. et al. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations. *Journal of Computational Physics* **228** (2009), no. 20, 7821–7836. DOI: 10.1016/j.jcp.2009.07.023.
- [18] Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J. *Fundamentos de Física 1: Mecânica*. 10^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [19] Butkov, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

Corresponding Author:

Santos Alberto Enriquez Remigio, santos.er@ufu.br

Submitted: April 22, 2025

Accepted: June 02, 2026

Published: July 01, 2026

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>