BEJOM

Brazilian Electronic Journal of Mathematics. 2026, v.7: e77771

https://doi.org/10.14393/BEJOM-v7-2026-77771

ISSN: 26751313 (online edition)

Matemática Aplicada

FUNÇÕES GERADORAS E A CONTAGEM DE MATRIZES (0,1) SIMÉTRICAS

Carlos Eduardo de Oliveira
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil.
E-mail: cadu.oliveira@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-2243-0055

José Plínio de Oliveira Santos
Universidade Estadual de Campinas, IMECC, Campinas, SP, Brazil.
E-mail: josepli@ime.unicamp.br
https://orcid.org/0000-0002-8869-8364

Mathematics Subject Classification (MSC): 05A15, 05A05, 97D50.

Resumo. Neste trabalho apresentaremos uma resolução original para a solução do problema: quantas matrizes (0,1) (cujas entradas são todas iguais a 0 ou 1) simétricas de ordem n podem ser construídas com a restrição adicional de que a soma dos elementos de qualquer linha é fixada para cada inteiro $0, 1, 2, \ldots, n$ como por exemplo:

- Quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem 5 podem ser construídas, de modo que a soma dos elementos de qualquer linha seja igual a 2?
- Quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem 4 podem ser construídas, de modo que $s(1) = 2$, $s(2) = s(3) = 3$ e $s(4) = 4$, onde $s(i)$ indica a soma dos elementos da linha i?

A estratégia de resolução deste problema envolve a utilização de funções geradoras, uma ferramenta de extrema importância e com diversas aplicações, mas pouco estudada em cursos superiores na área de matemática e ciências exatas. Neste sentido, este texto visa oferecer a introdução dessa ferramenta através de vários exemplos, incluindo o problema das matrizes simétricas, cuja solução pode ser modelada por uma função geradora de n variáveis com expansão polinomial em que o coeficiente de $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$, $t_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ expressa o número de matrizes em que a soma da linha i é igual a t_i. Este trabalho foi apresentado no formato de minicurso, sem publicação em anais, na XI Bienal de Matemática, realizada em São Carlos-SP, entre 29 de julho e 02 de agosto de 2024.

Palavras-chave. Combinatória, função geradora, matrizes, contagem, teoria dos números.

GENERATING FUNCTIONS AND COUNTING SYMMETRIC (0,1) MATRICES

Abstract. In this work we will present an original solution to the problem: how many symmetric (0,1) matrices (whose entries are all equal to 0 or 1) of order n can be constructed with the additional constraint that the sum of the elements of any row is fixed for each integer $0, 1, 2, \ldots, n$ as for example:

- How many symmetric (0,1) matrices of order 5 can be constructed such that the sum of the elements in any row is equal to 2?
- How many symmetric (0,1) matrices of order 4 can be constructed such that $s(1) = 2, s(2) = s(3) = 3$ and $s(4) = 4$, where $s(i)$ indicates the sum of the elements of row i?

The strategy for solving this problem involves the use of generating functions, an extremely important tool with diverse applications, but little studied in undergraduate courses in mathematics and exact sciences. In this sense, this text aims to offer an introduction to this tool through several examples, including the problem of symmetric matrices, whose solution can be modeled by a generating function of n variables with polynomial expansion in which the coefficient of $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$, $t_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ expresses the number of matrices in which the sum of row i is equal to t_i. This work was presented in the form of a minicourse, without publication in the proceedings, at the XI Bienal de Matemática, held in São Carlos-SP, between July 29 and August 2, 2024.

Keywords. Combinatorics, generating function, matrices, counting, number theory.

FUNCIONES GENERADORAS Y EL CONTEO DE MATRICES (0,1) SIMÉTRICAS

Resumen. En este trabajo presentaremos una resolución original para la solución del problema: cuántas matrices (0,1) (cuyas entradas son todas iguales a 0 o 1) simétricas de orden n pueden ser construidas con la restricción adicional de que la suma de los elementos de cualquier fila esté fijada para cada entero $0, 1, 2, \ldots, n$ como por ejemplo:

- ¿Cuántas matrices (0,1) simétricas de orden 5 pueden ser construidas, de modo que la suma de los elementos de cualquier fila sea igual a 2?
- ¿Cuántas matrices (0,1) simétricas de orden 4 pueden ser construidas, de modo que $s(1) = 2, s(2) = s(3) = 3$ y $s(4) = 4$, donde $s(i)$ indica la suma de los elementos de la fila i?

La estrategia de resolución de este problema implica la utilización de funciones generadoras, una herramienta de extrema importancia y con diversas aplicaciones, pero poco estudiada en cursos superiores en el área de matemáticas y ciencias exactas. En este sentido, este texto busca ofrecer una introducción a esta herramienta a través de varios ejemplos, incluyendo el problema de las matrices simétricas, cuya solución puede ser modelada por una función generadora de n variables con expansión polinomial en la que el coeficiente de $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$, $t_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ expresa el número de matrices en las que la suma de la fila i es igual a t_i. Este trabajo fue presentado en forma de minicurso, sin publicación en anales, en la XI Bienal de Matemáticas, realizada en São Carlos - SP, entre el 29 de julio y el 02 de agosto de 2024.

Palabras clave. Combinatoria, función generadora, matrices, conteo, teoría de números.

1 Introdução

O estudo das funções geradoras é fundamental em diversos campos da matemática e das ciências exatas aplicadas, sendo uma ferramenta poderosa e capaz de modelar e analisar uma ampla série de sequências. As funções geradoras são frequentemente utilizadas em análise combinatória, combinatória enumerativa, probabilidades, estatística, teoria dos números, teoria dos grafos e outras ramos da matemática. Elas podem oferecer uma estratégia elegante e eficaz de expressar sequências finitas ou infinitas de números ou eventos discretos, permitindo a simplificação e manipulação de problemas mais complexos como em [1, 2, 3, 4]. Além disso, as funções geradoras propiciam soluções analíticas para problemas que, de outra forma, seriam desafiadores de se estudar. Dessa forma, compreender e dominar as funções geradoras não apenas fortalece a base matemática, mas também abre portas para a resolução de uma variedade de problemas práticos em diversas áreas do conhecimento. Existem, na literatura atual, trabalhos que abordam a contagem de matrizes similares às que abordaremos no último tópico deste trabalho, como [5, 6, 7], porém com o intuito claro de observar o comportamento assintótico do número de matrizes com margem fixa. O fator inédito aqui apresentado consiste em adicionar condições adicionais às matrizes de modo a estabelecer contagens exatas para cada tipo de matriz proposta.

2 Funções geradoras

Dado um fenômeno discreto que possa ser descrito pela sequência $a_0, a_1, \ldots$, dizemos que a função f é a função geradora desta sequência se f for da forma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.x^i.$$

Um bom exemplo de aplicação dessa simples ideia pode ser visto através do problema: uma urna possui 3 bolas amarelas, 2 bolas brancas e 1 bola cinza. De quantas formas podemos retirar um grupo de n bolas dessa urna, onde $n = 0, 1, 2, \ldots, 6$?

Antes de proceder à função geradora, vamos tentar avaliar como podem se dar essas retiradas para alguns valores de n:

- se $n = 0$, existe apenas uma maneira de realizar a retirada, a saber, não retirando nada;
- se $n = 1$, as retiradas podem ser a, b, c, ou seja, existem 3 maneiras de realizar a retirada;
- se $n = 2$, as retiradas podem ser aa, bb, ab, ac, bc, ou seja, existem 5 maneiras de realizar a retirada.

Não é complicado notar que, à medida em que aumentamos a quantidade de bolas a ser retirada, bem como a quantidade total de bolas da urna no início do problema, que nossa tarefa de contar por exaustão pode se tornar impraticável. Nesse caso, trabalhar com uma função geradora pode ser uma estratégia interessante.

Note que em uma retirada qualquer, a quantidade de bolas amarelas retiradas pode ser $0, 1, 2, 3$, já que existem 3 bolas amarelas disponíveis na urna. Da mesma forma, a quantidade de bolas brancas pode ser $0, 1, 2$ e de bolas cinzas $0, 1$. Note também que a soma das quantidades de bolas amarelas, brancas e cinzas é o total de bolas retiradas. Assim, podemos lançar mão do princípio multiplicativo e controlar o aparecimento de bolas de uma determinada cor por um polinômio específico em que suas possíveis quantidades serão expressas nos expoentes de um certo polinômio, da seguinte maneira:

- polinômio que controla o aparecimento das bolas amarelas $(1 + x + x^2 + x^3)$, note que $1 = x^0$ representa a situação em que não é retirada nenhuma bola amarela;
- polinômio que controla o aparecimento das bolas brancas $(1 + x + x^2)$;
- polinômio que controla o aparecimento das bolas cinzas $(1 + x)$.

Ao multiplicarmos os três polinômios, obteremos todas as possíveis retiradas de bolas dessa urna:

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}_{amarelas}\underbrace{(1 + x + x^2)}_{brancas}\underbrace{(1 + x)}_{cinzas} = x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 3x + 1.$$

A interpretação deste resultado indica que o coeficiente de x^n, com $0 \leq n \leq 6$ indica o número de maneiras de se retirar n bolas da urna:

- o termo x^6 indica que existe apenas uma maneira de se retirar 6 bolas da urna, a saber, a retirada da todas as bolas: $aaabbc$;
- o termo $3x^5$ indica que existem 3 maneiras de se retirar 5 bolas da urna, são elas: aaabb, aaabc e aabbc;
- o termo $5x^4$ indica que existem 5 maneiras de se retirar 4 bolas da urna, são elas: aaab, aaac, aabb, aabc, abbc.

3 Aplicações clássicas das funções geradoras

O conceito das funções geradoras mostra-se como uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento da Combinatória Enumerativa, uma vez que estabelece um processo de contagem controlado por uma função algébrica e isso nos leva à possibilidade de interpretar essa função de diversas formas. O matemático indiano Srinivasa Ramanujan $(1887 - 1920)$ desenvolveu diversas interpretações e casos de usos das funções geradoras em seus trabalhos, especialmente sobre as partições de inteiros, presentes de forma abundante em [8].

Definição 1. *Dado um inteiro positivo n, define-se como partição λ de n, qualquer maneira de representar n como a soma de inteiros positivos $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ tais que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$. Neste caso, dizemos que a partição λ possui partes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$.*

Vejamos alguns casos particulares:

- $n = 3$ possui 3 partições, a saber: 3, $2 + 1$, $1 + 1 + 1$;
- $n = 4$ possui 5 partições, a saber: 4, $3 + 1$, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$;
- $n = 7$ possui 15 partições, a saber: 7, $6+1$, $5+2$, $5+1+1$, $4+3$, $4+2+1$, $4+1+1+1$, $3 + 3 + 1$, $3 + 2 + 2$, $3 + 2 + 1 + 1$, $3 + 1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 2 + 2 + 1$, $2 + 2 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Estabelecer processos de controle e contagem de partições é um dos principais atributos da combinatória enumerativa, em linhas gerais, diversos tipos de partições de inteiros podem ser controladas com o auxílio de uma função geradora, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1 (partições irrestritas de n)**.** *Observe que dado $n \in \mathbb{Z}_+^*$, podemos controlar o número de partições irrestritas de n pela função geradora:*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)\cdots \tag{1}$$

Veja que cada fator da expressão (1) controla a presença de um dado inteiro, pois:

- a expressão $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$ controla o aparecimento da parte 1, que pode não ser listada (1) ou ser listada apenas uma vez (x) ou ser listada duas vezes (x^2) e assim sucessivamente;
- a expressão $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)$ controla o aparecimento da parte 2, que pode não ser listada (1) ou ser listada apenas uma vez (x^2) ou ser listada duas vezes (x^4) e assim sucessivamente;
- a expressão $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$ controla o aparecimento da parte 3, que pode não ser listada (1) ou ser listada apenas uma vez (x^3) ou ser listada duas vezes (x^6) e assim sucessivamente.

Reescrevendo cada fator de (1) em uma série geométrica, temos que a função geradora das partições irrestritas pode ser escrita como:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}. \tag{2}$$

Note que o desenvolvimento da expressão (2) resulta na série:

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+\cdots$$

E não é por acaso que os coeficientes de x^3, x^4 e x^7 são, respectivamente, 3, 5 e 15, assim como exemplificado na Definição 1.

Também podemos lançar mão das funções geradoras para desenvolver expressões que controlam partições restritas de n, isto é, partições com alguma restrição imposta como um limitante no número de partições, o impedimento à repetição das partes, a paridade das partes, dentre outros.

Exemplo 2 (partições de n com partes distintas)**.** *Adicionado a restrição de que buscamos as partições de n cujas partes são distintas, então, a função que faz esse controle é dada por:*

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\cdots \tag{3}$$

Uma vez que cada parte pode não ser listada ou comparecer apenas uma vez na construção da partição.

Exemplo 3 (partições de n com partes ímpares)**.** *Adicionado a restrição de que buscamos as partições de n cujas partes são exclusivamente ímpares, então, a função que faz esse controle é dada por:*

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)\cdots \tag{4}$$

Que podem ser escritas como:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}. \tag{5}$$

Uma vez que cada parte pode se repetir, mas apenas partes ímpares $(1,3,5,7\ldots)$ podem aparecer na construção da partição.

Observe que a expansão das expressões equivalentes (4) e (5) também resulta no polinômio $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\cdots$, assim como em (3). De forma prática, podemos analisar as partições de 7, citadas na Definição 1 e notar que ali existem 5 partições em partes ímpares (7, $5+1+1$, $3+3+1$, $3+1+1+1+1$ e $1+1+1+1+1+1+1$) e também 5 partições em partes distintas (7, $6+1$, $5+2$, $4+3$ e $4+2+1$). Essa observação é, de fato, um importante Teorema da Combinatória Enumerativa:

Teorema 1. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. Tome a função geradora do número de partições em partes distintas descrita em (3):

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

Multiplicando essa função por $\frac{(1-x)}{(1-x)}\frac{(1-x^2)}{(1-x^2)}\frac{(1-x^3)}{(1-x^3)}\cdots$, temos:

$$\frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^3)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots}.$$

Agrupando os pares de produtos notáveis:

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots}.$$

Cancelando os termos iguais:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}.$$

□

Exemplo 4 (aplicação em soluções inteiras de equações)**.** *Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação $2x_1+3x_2+4x_3=13$?*

Podemos resolver um problema como este controlando cada uma da incógnitas x_1, x_2 e x_3 através de suas funções geradoras. Para isso note que:

- O resultado termo $2x_1$ admite apenas os valores da sequência $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$;
- O resultado termo $3x_2$ admite apenas os valores da sequência $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$;
- O resultado termo $5x_3$ admite apenas os valores da sequência $0, 5, 10, 15, \ldots$

Visto isso, vamos propor uma troca de variáveis $x_k \to y_k$ na equação de modo que a incógnita y_k seja controlada por uma função que percorre apenas os resultados possíveis de x_k com a restrição adicional que $y_k \leq 13$. Assim:

- A função geradora que controla y_1 é $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})$;
- A função geradora que controla y_2 é $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12})$;
- A função geradora que controla y_3 é $(1 + x^5 + x^{10})$.

E as soluções da equação são controladas pela função:

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12})(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12})(1 + x^5 + x^{10}). \tag{6}$$

Expandindo a expressão anterior:

$$\begin{aligned}x^{34} &+ x^{32} + x^{31} + x^{30} + 2x^{29} + 2x^{28} + 2x^{27} + 3x^{26} + 3x^{25} + 4x^{24} + 4x^{23} + 5x^{22} + \\ &+ 5x^{21} + 5x^{20} + 5x^{19} + 6x^{18} + 5x^{17} + 6x^{16} + 5x^{15} + 5x^{14} + 5x^{13} + 5x^{12} + 4x^{11} + \\ &+ 4x^{10} + 3x^9 + 3x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1.\end{aligned}$$

O termo $5x^{13}$ demonstra que a equação possui 5 soluções com as condições especificadas, são elas:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (0,1,2), (1,2,1), (2,3,0), (4,0,1), (5,1,0)\right\}.$$

Além disso, também é possível observar outros cenários para a equação inicial pois o termo $4x^{11}$ mostra que a equação $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11$ tem 4 soluções, o termo $3x^8$ mostra que a equação $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8$ tem 3 soluções, dentre outros. Por fim, observe que apesar da presença do termo $5x^{22}$, não podemos afirmar que a equação $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 22$ tem 5, uma vez que nossa estratégia de resolução estabeleceu um limite máximo para y_1, y_2 e y_3 como 12, 12 e 10, respectivamente. Neste sentido, o que o termo $5x^{22}$ garante é que a equação $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 22$ possui 5 soluções não negativas tais que $x_1 \leq 6$, $x_2 \leq 4$ e $x_3 \leq 2$.

Além de modelagens referentes a partições de inteiros, as funções geradoras podem ser utilizadas para descrever e modelar uma diversa gama de problemas de contagem. Algumas situações interessantes são as contagem de triângulos de lados inteiros, tema profundamente abordado em [1] e a demonstração de que qualquer inteiro positivo pode ser escrito de forma única como soma de potências distintas de 2, como em [9].

Exemplo 5 (número de triângulos com lados inteiros e perímetro fixo)**.** *Quantos triângulos, não congruentes entre si, de lados inteiros podem ser construídos com um dado perímetro n pré-definido?*

Sejam $a \leq b \leq c$ os três lados de um triângulo de perímetro n. Como a, b, c são inteiros positivos, é imediato que $a \geq 1$. Além disso, pela desigualdade triangular temos que:

$$a + b > c. \tag{7}$$

Um fator complicador para escrita das funções geradoras dos comprimentos dos três lados é que estas escolhas não são independentes e a desigualdade triangular deixa isso claro. No sentido de equacionar o perímetro do triângulo, vamos propor uma troca de variáveis como se segue:

$$\begin{aligned} a+b+c&=n\\ \Leftrightarrow 3a+2(b-a)+c-b&=n\\ \Leftrightarrow 3a+2y+z&=n, \end{aligned} \tag{8}$$

onde $y=b-a\geq 0$ e $z=c-b\geq 0$. Uma vez efetuadas estas substituições, as restrições na equação (8) ficam reduzidas para $a\geq 1$, $y\geq 0$ e $z\geq 0$. Porém, pela desigualdade triangular (7) ainda podemos observar que resta uma dependência entre as variáveis da equação (8):

$$a+b>c\Rightarrow a>c-b\Rightarrow a>z.$$

Esta desigualdade pode ser eliminada pela introdução da variável x, da seguinte maneira:

$$a=z+x,$$

onde $x\geq 1$. Substituindo $a=x+z$ em (8):

$$\begin{aligned} 3a+2y+z&=n\\ \Leftrightarrow 3(z+x)+2y+z&=n\\ \Leftrightarrow 3x+2y+4z&=n, \end{aligned} \tag{9}$$

onde $x\geq 1$, $y>0$ e $z>0$ e não restam dependências entre as variáveis.

Dessa forma, o problema fica reduzido às soluções da equação (9) com as condições especificadas, onde é imediato perceber que a função geradora que controla o aparecimento das variáveis $3x$, $2y$ e $4z$, nesta ordem, é:

$$\begin{aligned} &(x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots)\\ &=\frac{x^3}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}. \end{aligned} \tag{10}$$

Expandindo os fatores da equação (10):

$$x^3+x^5+x^6+2x^7+x^8+3x^9+2x^{10}+4x^{11}+3x^{12}+5x^{13}+4x^{14}+7x^{15}+\cdots \tag{11}$$

A leitura da equação (10) nos mostra o números de soluções para diversos perímetros:

- o termo x^3 mostra que existe apenas um triângulo de perímetro 3: $(1,1,1)$;

- a ausência do termo x^4 mostra que não existem triângulos de lados inteiros e perímetro igual a 4;

- o termo $3x^9$ mostra que existem três triângulos de perímetro 9: $(1, 4, 4)$, $(2, 3, 4)$ e $(3, 3, 3)$;

- o termo $7x^{15}$ mostra que existem sete triângulos de perímetro 15: $(1, 7, 7)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 6, 6)$, $(3, 5, 7)$, $(4, 5, 6)$, $(4, 4, 7)$ e $(5, 5, 5)$.

Exemplo 6 (escrita de inteiros positivos como soma de potências distintas de 2)**.** *Prove que qualquer inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como soma de potências distintas de* 2*.*

A função geradora das partições de $n \in \mathbb{Z}_+^*$ em potências de 2 distintas é:

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdots \tag{12}$$

Para provar que todo inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como soma de potências distintas de 2, basta mostrar que a expansão polinomial da expressão (12) resulta em um polinômio de coeficiente 1 para qualquer expoente n:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1 - x}. \tag{13}$$

Assim, a demonstração fica completa ao verificar a igualdade entre as expressões (12) e (13):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdots \\ 1 &= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdots \end{aligned}$$

E isto de fato ocorre pois agrupando sucessivamente os dois primeiros termos do lado direito desta igualdade, temos:

$$\begin{aligned} &(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdots = \\ &= (1 - x^2)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) \cdots \\ &= (1 - x^4)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32}) \cdots \\ &= (1 - x^8)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32})(1 + x^{64}) \cdots \\ &= 1. \end{aligned}$$

4 Aplicação ao problema proposto

Certa vez, um professor, durante suas aulas preparatórias de Análise Combinatória para Olimpíadas de Matemática, foi arguido por um colega se seria ou não possível contar matrizes simétricas, apenas com entradas 0 ou 1, de modo que a soma dos elementos de cada uma das linhas fosse pré estabelecida e dada por um número fixo, como por exemplo: quantas são as matrizes simétricas, de ordem 4, com entradas 0 ou 1, de modo que a soma dos elementos de qualquer linha seja igual a 2? A solução deste problema através das funções geradoras trouxe não só a resposta à pergunta inicial, como também mostrou ser possível flexibilizar o enunciado de modo a permitir que linhas diferentes possuam somas distintas. Atualmente há na matemática literatura similar ao problema proposto, denominadas matrizes de margens fixas. O tipo de matriz estudada neste tópico é um caso especial de matriz de margem fixa, mas com as restrições adicionais de que as entradas são todas 0 ou 1, além de ser uma matriz simétrica. É justamente em função dessas restrições que torna-se possível o estudo de uma fórmula que fornecerá aqui resultados exatos. Alguns trabalhos [5, 6, 7], sem as restrições adicionais, estudam os comportamentos assintóticos e limitadores da contagem do número de matrizes de margem fixa. Este tipo de matriz, com entradas binárias e com a restrição adicional de ser simétrica é um caso particular de matriz quadrada com margem fixa.

Desta forma, chegamos ao problema a ser resolvido com o auxílio das funções geradoras: quantas matrizes $(0,1)$ simétricas de ordem n podem ser construídas com a soma dos elementos de cada linha fixada para qualquer inteiro $0, 1, 2, \ldots, n$.

Para resolver o problema, vamos usar uma matriz de ordem 4 como fonte de observação e vamos nomear os elementos de suas linhas na forma de sequência x, y, z, w como se segue:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz é simétrica, se "dobrarmos" a matriz em torno da sua diagonal principal, sobreporemos elementos que são obrigatoriamente iguais:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2y_1 & x_3z_1 & x_4w_1 \\ & y_2 & y_3z_2 & y_4w_2 \\ & & z_3 & z_4w_3 \\ & & & w_4 \end{bmatrix}.$$

Ao notar, após esta "dobra", que há apenas uma intersecção entre elementos de duas linhas distintas (que denotamos por x, y, z, w) fica evidente que a prevalência dos índices passa a ser desnecessária e vamos retirá-los, trabalhando com a matriz no formato:

$$\begin{bmatrix} x & xy & xz & xw \\ & y & yz & yw \\ & & z & zw \\ & & & w \end{bmatrix}.$$

Por fim, podemos notar que cada entrada da matriz "dobrada" acima é igual a 0 ou 1. Essa afirmação é válida tanto para os elementos da diagonal principal que são "isolados", bem como para os demais que são "duplos" de mesmo valor, ou seja, ambos iguais a 0 ou ambos iguais a 1.

Exemplo 7. *Como exemplo ilustrativo, se escolhemos os elementos xy, xw, yz, w para assumirem o valor 1 e os demais 0, obtemos a matriz "dobrada":*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz "dobrada" esta que representa a matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, as 10 entradas dessa matriz "dobrada" são controladas individualmente pelas funções geradoras:

$$(1+x), (1+xy), (1+xz), (1+xw), (1+y), (1+yz), (1+yw), (1+z), (1+zw), (1+w)\cdot \quad (14)$$

E quando essas funções são multiplicadas, a potência de x do produto nos diz quantos números 1 aparecem na primeira linha (e consequentemente na primeira coluna, haja vista que a matriz é simétrica) da matriz binária correspondente. As potências de y, z e w carregam as mesmas informações referentes à segunda, terceira e quarta linhas, respectivamente. Na matriz do Exemplo 7, os monômios de valor 1 escolhidos foram xy, xw, yz, w, o que nos retorna o produto:

$$xy \cdot xw \cdot yz \cdot w = x^2y^2zw^2.$$

Isso representa (e pode ser verificado no Exemplo 7) que na na primeira linha (e primeira coluna) da matriz existem dois elementos iguais a 1, pois a potência de x é 2. De forma análoga,

y^2, z e w^2 indicam que as linhas seguintes possuem dois, um e dois elementos iguais a 1, respectivamente.

Dessa forma, fica evidente que o número de matrizes (0,1) simétricas, cuja soma dos elementos da linha n é dada por s_n pode ser obtido pela multiplicação das funções geradoras explícitas em (14). Multiplicando essas funções:

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+xy)(1+xz)(1+xw)(1+y)(1+yz)(1+yw)(1+z)(1+zw)(1+w)\\
&= x^4y^4z^4w^4 + x^3y^4z^4w^4 + x^4y^3z^4w^4 + 2x^3y^3z^4w^4 + x^2y^3z^4w^4 + x^3y^2z^4w^4\\
&+ x^2y^2z^4w^4 + x^4y^4z^3w^4 + 2x^3y^4z^3w^4 + x^2y^4z^3w^4 + 2x^4y^3z^3w^4 + 4x^3y^3z^3w^4\\
&+ 3x^2y^3z^3w^4 + xy^3z^3w^4 + x^4y^2z^3w^4 + 3x^3y^2z^3w^4 + 3x^2y^2z^3w^4 + xy^2z^3w^4\\
&+ x^3yz^3w^4 + x^2yz^3w^4 + x^3y^4z^2w^4 + x^2y^4z^2w^4 + x^4y^3z^2w^4 + 3x^3y^3z^2w^4\\
&+ 3x^2y^3z^2w^4 + xy^3z^2w^4 + x^4y^2z^2w^4 + 3x^3y^2z^2w^4 + 4x^2y^2z^2w^4 + 2xy^2z^2w^4\\
&+ \cdots + 4x^2y^2z^2w^4 + 2xy^2z^2w^4 + x^3yz^2w^4 + 2x^2yz^2w^4 + xyz^2w^4 + 3x^4y^2z^2w^3\\
&+ \cdots + 10x^3y^2z^2w^3 + 13x^2y^2z^2w^3 + 8xy^2z^2w^3 + 2y^2z^2w^3 + xz^2w^3 + x^3y^2z\\
&+ 3x^2y^2z + 3xy^2z + y^2z + 2xz + x^3yz + 3x^2yz + 4xyz + 2yz + z + 1.
\end{aligned}$$

A interpretação desse resultado nos mostra todas as quantidades de matrizes que podem ser construídas de acordo com as condições estabelecidas. Denotando por $s(i)$ a soma dos elementos da linha i, temos:

- Se $s(1) = s(2) = s(3) = s(4) = 4$, o termo $x^4y^4z^4w^4$, mostra que há apenas uma matriz com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

- Se $s(1) = 2$, $s(2) = s(3) = 3$ e $s(4) = 4$, o termo $3x^2y^3z^3w^4$, mostra que há três matrizes com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

- Se $s(1) = 1$, $s(2) = s(3) = 2$ e $s(4) = 3$, o termo $8xy^2z^2w^3$, mostra que há oito matrizes com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}.$$

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado sem apoio financeiro.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

Referências

[1] Santos, J. P. O., Mello, M. P. e Murari, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. 4ª ed. Ciência Moderna, 2008. ISBN: 978-8-57-393634-6.

[2] Grimaldi, R. P. *Discrete and combinatorial Mathematics: an applied introduction*. Cambridge University Press, 1976.

[3] Stanley, R. P. *Enumerative combinatorics*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1997.

[4] Wilf, H. S. *Generatingfunctionology*. 3ª ed. A K Peters, Ltd., 2006.

[5] Barvinok, A. “Matrices with prescribed row and column sums”. Em: *Linear Algebra and its Applications* 436 (2012), pp. 820–844.

[6] Greenhill, C. e McKay, B. D. “Asymptotic enumeration of sparse nonnegative integer matrices with specified row and column sums”. Em: *Advances in Applied Mathematics* 41 (2008), pp. 459–481.

[7] Mcleod, J. C. e McKay, B. D. “Asymptotic enumeration of symmetric integer matrices with uniform row sums”. Em: *Journal of the Australian Mathematical Society* 92 (2012), pp. 367–384.

[8] Andrews, G. E. *The theory of partitions*. Cambridge University Press, 1998.

[9] Santos, J. P. O. *Introdução à teoria dos números*. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. ISBN: 978-8-52-440496-2.

Corresponding Author:
Carlos Eduardo de Oliveira, *cadu.oliveira@ifsp.edu.br*

Submitted: April 13, 2025
Accepted: October 16, 2025
Published: March 31, 2026
https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index