

Educação Matemática

INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS:

abstração como primeiro ou último passo?

Gabriel Henrique de Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: gabrielhenrique25052003@gmail.com<https://orcid.org/0009-0004-2266-9271> 

Érika Maria Chioca Lopes

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística, Uberlândia, MG, Brazil.

E-mail: erikalopes@ufu.br<https://orcid.org/0000-0003-3817-5511> **Mathematics Subject Classification (MSC):** 97U70, 97H40.

Resumo. Em geral, observa-se uma grande dificuldade dos estudantes na compreensão de conceitos abstratos em disciplinas de Álgebra, como as condições que definem um grupo, quando são trazidos exemplos não corriqueiros de conjuntos. O objetivo deste artigo é relatar uma experiência didática desenvolvida na disciplina Informática e Ensino, do curso de Matemática de uma universidade federal, proposta como uma aula introdutória à Teoria de Grupos. Com apoio em um roteiro de instruções e perguntas que provocassem a investigação e manipulação de um objeto de aprendizagem adaptado para a experiência, buscou-se instigar a curiosidade e motivar os estudantes para os estudos na disciplina subsequente de Álgebra. Em suma, concluímos que a experiência realizada com a turma proporcionou um envolvimento ativo dos estudantes e trouxe indícios de uma boa aceitação do conteúdo abordado, além de evidenciar uma forma não usual de abordar conteúdos abstratos, por meio do diálogo professor-estudantes, tendo o computador como um instrumento importante para a construção de conhecimentos.

Palavras-chave. Teoria de grupos, tecnologias digitais, educação matemática, GeoGebra, ensino superior.

INTRODUCTION TO GROUP THEORY:

abstraction as the first or last step?

Abstract. In general, students have great difficulty understanding abstract concepts in Algebra subjects, such as the conditions that define a group, when non-common examples of sets are brought up. The objective of this article is to report a didactic experience developed in the Computer Science and Teaching discipline, of the Mathematics course at a federal university, proposed as an introductory class to

Group Theory. With the support of a script of instructions and questions that provoked the investigation and manipulation of a learning object adapted for the experience, we sought to instigate curiosity and motivate students to study in the subsequent discipline of Algebra. In short, we conclude that the experience carried out with the class provided active involvement of the students and brought evidence of good acceptance of the content covered, in addition to highlighting an unusual way of approaching abstract content, through teacher-student dialogue, with the computer as an important instrument for the construction of knowledge.

Keywords. Group theory, digital technologies, mathematics education, GeoGebra, higher education.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRUPOS:

¿la abstracción como primer o último paso?

Resumen. Por lo general, se observa una gran dificultad de los estudiantes en la comprensión de conceptos abstractos en disciplinas de Álgebra, tales como las condiciones que definen un grupo, cuándo son traídos ejemplos no habituales de conjuntos. El objetivo de este artículo es relatar una experiencia didáctica desarrollada en la disciplina Informática y Enseñanza, del curso de Matemática de una universidad federal, propuesta como una clase introductoria a la Teoría de Grupos. Con apoyo en un guía de instrucciones y preguntas que provocaran la investigación y manipulación de un objeto de aprendizaje, adaptado para la experiencia, se intentó instigar la curiosidad y motivar los estudiantes para los estudios en la disciplina subsecuente de Álgebra. En resumen, concluimos que la experiencia realizada con el grupo proporcionó una implicación del alumnado y trajo indicios de una buena aceptación del contenido abordado, además de evidenciar una forma inusual de abordar contenidos abstractos, por medio del diálogo professor-estudiantes, teniendo el ordenador como un instrumento importante para la construcción de conocimientos.

Palabras clave. Teoría de Grupos, tecnologías digitales, educación matemática, GeoGebra, enseñanza universitaria.

1 Introdução

Apresentamos o relato de uma experiência didática desenvolvida e realizada na disciplina Informática e Ensino, do curso de Matemática de uma universidade federal, proposta como uma aula introdutória à Teoria de Grupos. A disciplina busca, como objetivo geral, implementar práticas educativas com tecnologias digitais de informação e comunicação no processo de ensinar e aprender matemática. Especificamente, objetiva-se promover reflexões sistemáticas sobre propostas educativas no contexto da cultura digital e vivenciar a execução de projetos de aulas de matemática em ambiente informatizado (Uberlândia, 2018).

Por se tratar de uma componente curricular do 3º período do curso, quando os graduandos ainda não optaram por Licenciatura ou Bacharelado, a escolha do conteúdo matemático a ser ensinado por meio de uma proposta didática informatizada ficou a critério de cada estudante matriculado na disciplina. Sendo o primeiro autor deste texto um estudante que já realiza Iniciação Científica na área de Álgebra, e que tem a intenção de cursar o Bacharelado em Matemática, elaboramos uma proposta didática voltada para o ensino introdutório do conteúdo Grupos, que faz parte de disciplina da área de Álgebra, presente no 4º período da grade curricular do curso.

De modo geral, observa-se uma grande dificuldade dos estudantes da disciplina de Álgebra na compreensão de conceitos abstratos, como as condições que definem um grupo, quando são trazidos exemplos de conjuntos que não são numéricos. A partir das buscas que realizamos em bases de dados, identificamos poucas pesquisas sobre o ensino da Teoria de Grupos em cursos de Licenciatura em Matemática. Na tese de Soares (2009), o levantamento realizado identificou apenas três pesquisas de doutorado voltadas para esse tema, onde registra-se que o programa de disciplinas específicas sobre estruturas algébricas é geralmente trabalhado de forma axiomática, limitado à demonstração e aplicação de determinados teoremas. Tais conceitos, em aula, são abordados de forma abstrata, com pouca ou nenhuma representação de sua aplicação.

Em (Sousa; Alves; Aires, 2024), os autores argumentam que o estudo dos grupos de simetrias oferece exemplos que enriquecem a compreensão da estrutura de um grupo e propõem uma abordagem para os grupos diedrais finitos, um tipo especial de grupos de simetrias associado a figuras geométricas. A partir do levantamento exploratório realizado, também encontramos o trabalho de Cançado (2016), que apresenta um estudo dos grupos diedrais em polígonos regulares, o qual consideramos um exemplo não corriqueiro de grupo, que pode ser abordado intuitivamente, a partir de visualização geométrica. Tais grupos abordam as simetrias em um polígono regular, neste caso, a composição de funções R , que rotacionam polígonos regulares, e funções S , que fazem a reflexão destes polígonos em torno de uma reta interna a ele.

Por outro lado, com base nas leituras e debates realizados em Informática e Ensino, refletimos que o professor, ao invés de atuar como simples transmissor de conteúdos, com controle quase total sobre as situações em que os estudantes são receptores passivos, pode criar situações desafiadoras e propor explorações, de modo que seus estudantes levanten conjecturas, testem hipóteses e eles próprios tirem conclusões (Carneiro; Passos, 2014; Valente, 2018).

Dessa forma, buscamos elaborar a proposta didática no formato de oficina, realizada durante duas horas-aula em laboratório de informática da universidade, na qual os participantes, seis estudantes do curso de Matemática, pudessem manipular polígonos por meio do *software* GeoGebra e, conduzidos pelos diálogos com o graduando que conduziu a proposta, percebessem os conceitos da Teoria de Grupos presentes nessa situação geométrica. Com essa proposta, de introdução ao conceito de Grupos, esperávamos instigar a curiosidade e motivar os estudantes para os estudos na disciplina subsequente de Álgebra.

Nas próximas seções, são apresentadas as reflexões que serviram de referência para este texto e uma descrição dos momentos que compuseram a proposta realizada.

2 Fundamentação teórica

Nessa proposta, usamos um Objeto de Aprendizagem, comumente abreviado para OA, que é definido por Wiley como “qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino” (Wiley, 2000, p.3). Buscamos usar tecnologias digitais para que os estudantes tenham mais interesse e “fujam” da aula comum do dia a dia; mas para isso, é necessário por parte do professor mudanças em suas crenças baseadas em senso comum, possibilitando assim inovações em suas metodologias de ensino. Segundo Valente (Valente, 1993, p.6) é necessária uma mudança da função do computador no campo educacional.

A mudança da função do computador como meio educacional acontece juntamente com um questionamento da função da escola e do papel do professor. A verdadeira função do aparato educacional não deve ser a de ensinar, mas sim a de criar condições de aprendizagem. Isso significa que o professor precisa deixar de ser o repassador de conhecimento – o computador pode fazer isso e o faz muito mais eficientemente do que o professor – e passar a ser o criador de ambientes de aprendizagem e o facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno.

Assim, como professores, temos o dever de nos adequar às novas tecnologias que se tornam comuns na vida das pessoas, mas tornando-as ferramentas de desenvolvimento do conhecimento e intelecto do estudante, não uma fonte de conhecimento inesgotável que o torne passivo perante o saber.

Nesse sentido, para o ensino e aprendizagem de matemática, muitas pesquisas apontam que os recursos e ferramentas do software GeoGebra permitem criar objetos de aprendizagem que possibilitam colocar o aluno mais ativo, com uma postura de exploração, descoberta e desenvolvimento de raciocínios matemáticos, das quais citamos (Bairral; Barreira, 2017; Scaldelai, 2014; Settimy; Bairral, 2020). O GeoGebra é considerado um software de matemática dinâmica, podendo ser usado para todos os níveis de ensino, que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma.

O estudo de Bairral e Barreira (Bairral; Barreira, 2017, p. 62), ao refletir sobre o trabalho interativo realizado por um usuário ao criar e manipular objetos no GeoGebra, pontua: “O movimento dinâmico não é o mesmo que o ato de desenhar no papel. A construção é diferente, porque pode ser transformada e modificada, conservando características invariantes.”. Nesse estudo, eles sistematizaram algumas particularidades do GeoGebra em situações presenciais: clicar, arrastar e explorar; fazer um desenho, construir uma classe de figuras; observar variantes e invariantes; raciocinar de forma ascendente ou descendente. Os autores enfatizam:

[...] a geometria produzida em um AGD [ambiente de geometria dinâmica] como o GeoGebra é outra, pois temos novas formas de manifestação da linguagem (ícones variados, formas de medição, observação simultânea de propriedades e formas etc.), de descoberta e verificação de propriedades. (Bairral; Barreira, 2017, p. 62)

Segundo esses autores, esse conjunto de elementos permite emergir várias formas de construir, explorar, convencer e raciocinar, o que permite refletir sobre mudanças possibilitadas na aprendizagem em geometria.

Já no livro “O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica”, Scaldelai (Scaldelai, 2014, p. 16) apresenta os recursos mais comuns do software e observa:

Por possibilitar o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos (algébricos, geométricos e aritméticos) simultaneamente e de forma dinâmica, ele possibilita a elaboração de tarefas exploratórias que proporcionam ao aluno pensar e fazer matemática, de modo a construir e significar ideias matemáticas com certa autonomia, rompendo com o ensino pautado na “transmissão de conhecimento”.

Por outro lado, assim como Valente (Valente, 1993), esse autor pondera sobre o papel do professor, que passa a ter a função de estruturar tarefas desafiadoras e que ofereçam as condições para o engajamento do aluno na atividade, enquanto interage com esse aluno para que as ideias sejam desencadeadas e articuladas.

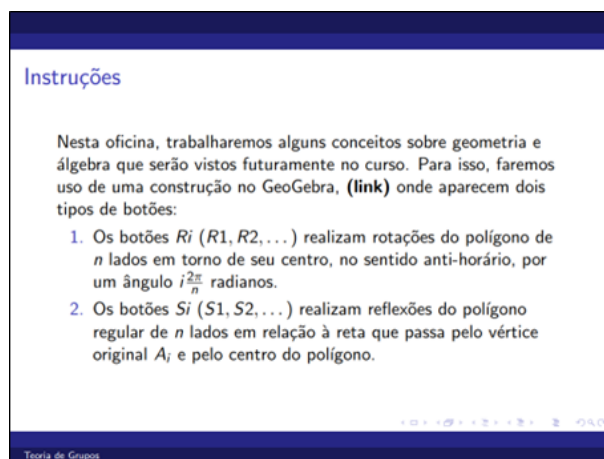
Por fim, Settimy e Bairral (Settimy; Bairral, 2020) trazem uma discussão sobre a relevância da visualização para a aprendizagem de geometria, destacando que “A formação de imagens mentais contribui para a compreensão matemática [...]” e que ‘aprender a ver’ “[...] é apenas possível mediante experiências contínuas seguidas de reflexão” (Settimy; Bairral, 2020, p. 192). Esse movimento de experimentação, formação de imagens mentais e reflexão é potencializado pelos recursos disponíveis em softwares de matemática dinâmica, como o GeoGebra.

3 A proposta didática

Inicialmente, foram procurados *applets* na plataforma do GeoGebra que tratassem sobre o tema. Um *applet*, de autoria de Armando Handaya, foi selecionado, por termos vislumbrado a possibilidade de usá-lo para trazer uma visualização dos conceitos relacionados aos grupos de simetrias em polígonos regulares com até oito lados, conforme desenvolvido em Cançado (Cançado, 2016). Buscamos editá-lo, para adequar seus recursos ao roteiro de instruções e perguntas que foi elaborado. A intenção era criar situações em que, por meio do roteiro e das interações sugeridas no *applet*, os estudantes pudessem explorar, observar padrões, conjecturar e testar, de forma a guiar seus pensamentos para os conceitos e propriedades que desejávamos abordar. Assim, o *applet* adaptado¹, juntamente com o roteiro entregue aos estudantes, tornou-se um Objeto de Aprendizagem (OA). O roteiro foi dividido em seções, sendo a primeira delas destinada à disponibilização do link, juntamente com a explicação dos botões presentes no OA, que serão utilizados para abordar as funções rotação R_i e as funções reflexão S_i de um polígono regular (Figura 1).

¹<https://www.geogebra.org/m/k3fp4dkz>

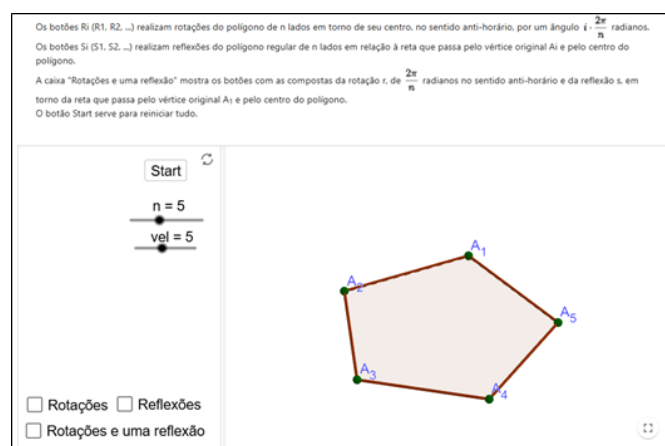
Figura 1: Apresentação do roteiro.



Fonte: Compilação dos autores.

Assim que os estudantes abriram o *applet*, o graduando, que estava conduzindo a proposta didática na turma, fez uma exploração inicial, por meio de projetor no laboratório, para mostrar os recursos disponíveis no OA, conforme Figura 2. São eles: o botão “Start”, para o estudante reiniciar o *applet*, depois de tê-lo manipulado; o controle deslizante “n” para o número de lados do polígono (variando de 3 a 8); o controle deslizante “vel” para a velocidade dos movimentos; as caixas “Rotações”, “Reflexões” e “Rotações e uma reflexão”, nas quais estão vinculados botões para realizar os respectivos movimentos no polígono, e que estavam inicialmente desmarcadas.

Figura 2: Tela inicial do OA utilizado para manipulação pelos estudantes.

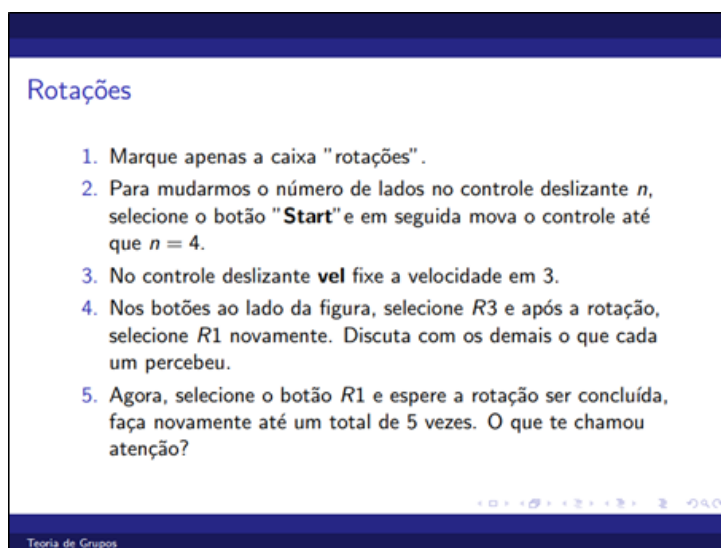


Fonte: Compilação dos autores.

Extração do texto da Figura 2: Os botões de R_i ($R_1, R_2, \dots$), realizam rotações do polígono de n lados em torno de seu centro, no sentido anti-horário, por um ângulo $i \cdot \frac{2\pi}{n}$ radianos. Os botões S_i ($S_1, S_2, \dots$), realizam reflexões do polígono regular de n lados em relação à reta que passa pelo vértice original A_i e pelo centro do polígono. A caixa “Rotações e uma reflexão” mostra os botões com as compostas da rotação r , de $\frac{2\pi}{n}$ radianos no sentido anti-horário e da reflexão s , em torno da reta que passa pelo vértice original A_1 e pelo centro do polígono. O botão Start serve para reiniciar tudo.

Na segunda seção, foram apresentadas instruções para que os estudantes visualizassem as rotações em um polígono regular de número n de lados, dando a eles tempo para que explorassem o OA por meio das instruções e de perguntas lançadas pelo graduando (Figuras 3 e 4).

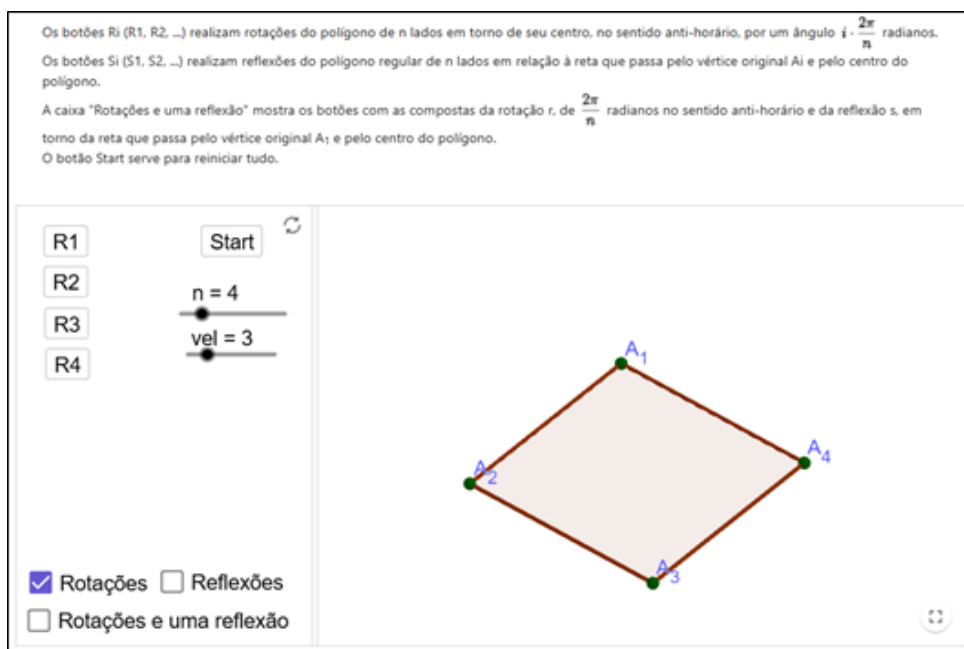
Figura 3: Início da segunda seção do roteiro.



Fonte: Compilação dos autores.

Com o tempo e discussão entre os estudantes, alguns deles formularam conjecturas, socializadas pelo graduando com a turma toda, e testadas coletivamente. Foi observado, por exemplo para $n = 8$, que a aplicação sucessiva da rotação R_3 com a rotação R_4 equivale a realizar apenas uma vez a rotação R_7 . Com perguntas que provocassem os estudantes a pensar, perceberam que esse padrão não permanece caso n seja menor que 7. Além disso, percebeu-se que n sucessivas rotações R_1 de um polígono de n lados faz com que o polígono volte à sua posição original, ou seja, a rotação R_n equivale a n sucessivas rotações R_1 . Essas e outras explorações permitiram que o graduando destacasse a operação de composição de funções e, considerando o conjunto das rotações munido dessa operação, abordasse a ideia de gerador desse conjunto, sendo neste caso a rotação R_1 .

Figura 4: OA utilizado para manipulação das rotações do polígono.

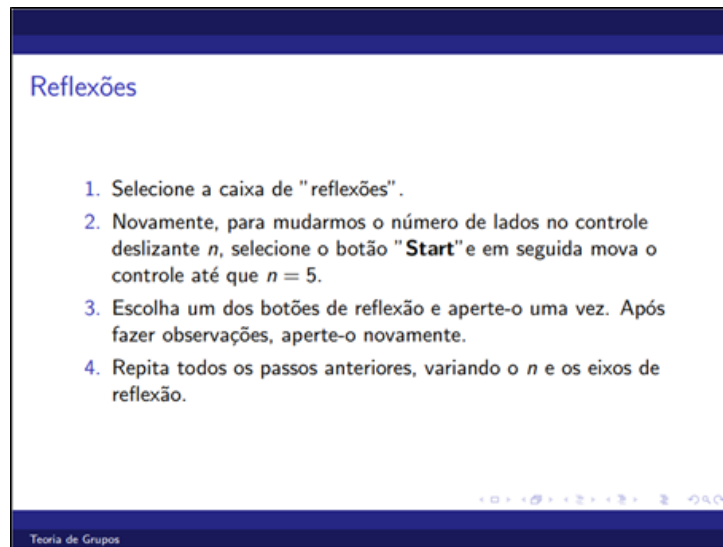


Fonte: Compilação dos autores.

Extração do texto da Figura 4: Os botões Ri (R1, R2, ...) realizam rotações do polígono de n lados em torno de seu centro, no sentido anti-horário, por um ângulo $i \cdot \frac{2\pi}{n}$ radianos. Os botões Si (S1, S2, ...) realizam reflexões do polígono regular de n lados em relação à reta que passa pelo vértice original Ai e pelo centro do polígono. A caixa "Rotações e uma reflexão" mostra os botões com as compostas da rotação r, de $\frac{2\pi}{n}$ radianos no sentido anti-horário e da reflexão s, em torno da reta que passa pelo vértice original A1 e pelo centro do polígono. O botão Start serve para reiniciar tudo.

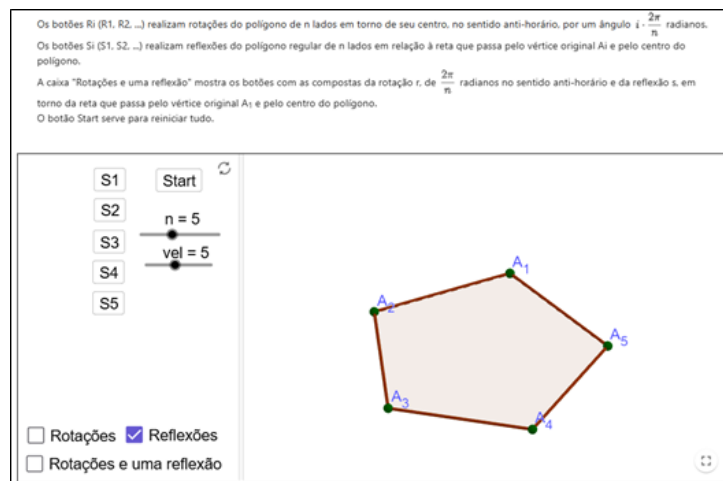
Assim, ficou claro para a turma que poderíamos simplificar a notação das rotações $R1, R2, \dots, Rn$, estabelecendo como gerador a rotação de $2\pi/n$ radianos no sentido anti-horário, renomeada como r . Dessa forma, esse conjunto de rotações ficaria representado como $r, r^2, \dots, r^n$, notação que passou a ser utilizada mais adiante, quando abordamos a composição dos movimentos de rotação e reflexão. Em seguida, o graduando apresentou a seção sobre reflexões (Figuras 5 e 6) na qual, após discussão, os estudantes apontaram observações sobre a mudança da disposição dos vértices em relação ao sentido horário e anti-horário, além de que uma composição Si com ela própria também fazia com que o polígono retornasse à sua posição original, para todo i .

Figura 5: Terceira seção do roteiro.



Fonte: Compilação dos autores.

Figura 6: OA utilizado para manipulação das reflexões do polígono.



Fonte: Compilação dos autores.

Extração do texto da Figura 6: Os botões R_i ($R_1, R_2, \dots$) realizam rotações do polígono de n lados em torno de seu centro, no sentido anti-horário, por um ângulo $i \cdot \frac{2\pi}{n}$ radianos. Os botões S_i ($S_1, S_2, \dots$) realizam reflexões do polígono regular de n lados em relação à reta que passa pelo vértice original A_i e pelo centro do polígono. A caixa “Rotações e uma reflexão” mostra os botões com as compostas da rotação r , de $\frac{2\pi}{n}$ radianos no sentido anti-horário e da reflexão s , em torno da reta que passa pelo vértice original A_1 e pelo centro do polígono. O botão Start serve para reiniciar tudo.

As duas seções anteriores eram uma preparação para a quarta seção, na qual o graduando abordou a composição de rotações com uma fixada reflexão s , por meio de indicações que levavam os estudantes a identificar padrões. Nesta seção, os estudantes foram direcionados à descoberta de uma propriedade importante na teoria de grupos de simetrias. Por meio de muitos exemplos concretos em polígonos de diferentes números de lados (Figura 7), percebeu-se que a aplicação de uma reflexão, seguida de i rotações, é equivalente a compormos $(n-i)$ rotações com uma reflexão.

Figura 7: Início da quarta seção do roteiro.

Rotações e uma reflexão

1. Selecione a caixa "rotações e uma reflexão" e em seguida, pressione o botão "Start".
2. Fixe o número de lados em $n = 6$ no controle deslizante.
3. Faça a reflexão S e a rotação r^4 .
4. Aperte o botão "Start", mude $n = 6$. Agora, faça r^2 e S .
5. Fixe o número de lados em $n = 5$ no controle deslizante.
6. Faça a reflexão S e a rotação r^2 .

Rotações e uma reflexão

1. Aperte o botão "Start", mude $n = 5$. Agora, faça r^3 e S .
2. Explore as rotações e a reflexão com diferentes valores para n e tente encontrar o padrão!

Dica

$n = 3 \Rightarrow sr^1 = r^2s$;

Fonte: Compilação dos autores.

Na parte final da oficina, em articulação com as questões exploradas no OA, foram apresentadas as definições formais e algumas propriedades (que são abstratas) do que seriam Grupos e Grupos Diedrais, com base em Herstein (Herstein, 1970) e Cançado (Cancado, 2016). Vejamos a definição de grupo, que abarca quatro condições para seus elementos, mostrada na Figura 8.

Figura 8: Formalização da definição de grupo.

Grupos

Definição: Grupos

Chamaremos um conjunto G não vazio de **grupo** se em G está definida uma operação binária, denominada multiplicação e indicada por $\cdot$ tal que:

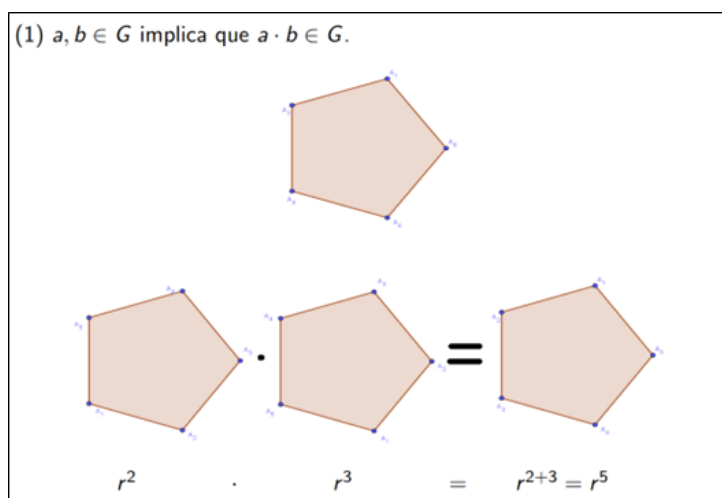
1. $a, b \in G$ implica que $a \cdot b \in G$ (fechamento).
2. $a, b, c \in G$ implica que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (lei associativa).
3. Existe um elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$ (existência de um elemento unidade em G).
4. Para todo $a \in G$ existe um elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (existência de inversos em G).

Fonte: Compilação dos autores.

O plano de aula foi elaborado previamente, para esse momento, com comentários sobre cada uma das condições, por meio do OA, para ilustrar que o conjunto das rotações r^i de um polígono regular de n lados, com i variando de 1 a n , munido da operação de composição, forma um grupo.

Retomando as explorações no OA, feitas a partir das perguntas da segunda seção do roteiro (Figura 3), constatamos com a turma que, a partir de duas rotações de um certo polígono regular, obtinha-se outra rotação do mesmo polígono. Isso pode ser observado na Figura (9) a seguir, elaborada a partir da junção de prints do OA, no qual aciona-se inicialmente o botão r^2 e, em seguida, o botão r^3 . Com o destaque dado pelo graduando para seguirem com o olhar o movimento de um determinado vértice, por exemplo, A_1 , alguns estudantes espontaneamente disseram que esses dois movimentos combinados significavam o mesmo que fazer apenas a rotação r^5 e, como o polígono testado tinha 5 lados, isso significava que voltamos à posição original do polígono. Ressalvamos que, na oficina, essa observação pode ser mais explorada, por

Figura 9: Um exemplo da composição de duas rotações em um pentágono regular no OA.



Fonte: Compilação dos autores.

conta da dinamicidade do GeoGebra, que permitia a alteração no número de lados do polígono e de quais rotações seriam utilizadas. Em diálogo com a turma, constatou-se a primeira condição da definição de grupo, chamada “fechamento”, para o conjunto das rotações r^i de um polígono regular de n lados, i variando de 1 a n , munido da operação de composição. Além disso, os estudantes observaram que o elemento neutro será r^n . De forma análoga, cada condição da definição de grupo foi discutida, a partir das manipulações feitas no OA com base no roteiro, resultando na Proposição apresentada na Figura 10, que afirma que esse conjunto será um grupo.

Figura 10: Primeiro exemplo de grupo discutido na aula.

Definição

Seja r a rotação de $\frac{2\pi}{n}$ radianos no sentido anti-horário de um polígono de n lados e indiquemos a composição da função r i vezes por r^i . Podemos então definir o conjunto de todas as rotações r de um polígono de n lados como

$$R_n = \{r^1, \dots, r^n\}.$$

Proposição

O conjunto R_n com a operação composição de funções é um grupo, e seu elemento neutro é r^0 .

Fonte: Compilação dos autores.

O graduando mencionou que as demonstrações formais e detalhamentos importantes seriam feitos posteriormente, ao aprofundarem os estudos em disciplinas específicas de Álgebra e que, naquele momento, importava dar sentido aos conceitos apresentados, por meio das manipulações feitas no GeoGebra. Por fim, para se chegar à definição de grupo diedral, foram abordadas as observações feitas pelos estudantes ao combinarem rotações e uma determinada reflexão no OA, para que percebessem empiricamente que o conjunto formado por esses elementos é um grupo, culminando com a apresentação da definição de grupo diedral (Figura 11).

Figura 11: Segundo exemplo de grupo discutido na aula.

Definição

Seja V um dos vértices de um polígono regular de n lados. Sejam r a rotação no sentido anti-horário de $\frac{2\pi}{n}$ radianos desse polígono e seja s uma reflexão fixada sobre uma reta que passa por V e o centro do polígono. Indicaremos por r^i e s^j a composição das funções r i vezes consigo mesma e s j vezes consigo mesma. Definiremos o conjunto

$$D_n = \{r^i s^j | i, j = 1, \dots, n\},$$

onde $r^i s^j$ é a composição de r^i e s^j .

Proposição

O conjunto D_n é um grupo com a operação composição de funções, conhecido como grupo diedral.

No grupo D_n destacaremos que:

1. O elemento neutro do grupo é $r^n s^{2k}$.
2. Os elementos de D_n satisfazem a seguinte relação

$$sr^i = r^{n-i}s$$

3. A representação do grupo D_n também pode ser feita da seguinte maneira

$$D_n = \{e, r^1, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, rs^{n-1}\}.$$

Fonte: Compilação dos autores.

Essa síntese mostrou aos estudantes as ligações entre o OA elaborado e o conteúdo que queríamos apresentar. Por ser uma proposta de aula introdutória à Teoria de Grupos, não tínhamos a pretensão de demonstrar os resultados apresentados, e sim de instigar a curiosidade e trazer significado geométrico aos conceitos e propriedades, por meio do exemplo do grupo de simetrias de um polígono regular.

Refletindo sobre as potencialidades do GeoGebra, discutidas na seção 2, podemos observar nesse OA a presença de algumas das particularidades do software, destacadas em (Bairral; Barreira, 2017). Ao clicar em um dos botões, o estudante pode visualizar o polígono em movimento e, combinando uma sequência de movimentos de rotação e/ou reflexão, pode observar invariantes (o elemento neutro, por exemplo). Além disso, por meio do controle deslizante n , o estudante tinha acesso a uma classe de polígonos regulares, e não apenas ao desenho estático de um deles, o que favoreceu diálogos em torno de regularidades que poderiam depender do número de lados do polígono. Naturalmente, pela proposta ter sido elaborada na perspectiva de exploração a partir de um roteiro de perguntas, podemos mencionar que o OA favoreceu que o estudante raciocinasse de forma ascendente, ou seja, da construção para a teoria, que foi sistematizada pelo graduando na parte final da aula.

4 Considerações finais

O intuito da proposta didática era possibilitar o contato dos estudantes com uma situação geométrica, por meio de um Objeto de Aprendizagem elaborado no GeoGebra, e a partir de então introduzirmos conceitos abstratos. Destacamos a importância de termos as tecnologias digitais, principalmente os computadores, como aliadas no ensino de matemática, desde que guiadas pelo professor, que estabelece objetivos e proporciona aos estudantes uma experiência para construção do conhecimento. Como afirma Valente ((Valente, 1993, p.13)), “o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador.”. Por meio da manipulação do *applet* no GeoGebra, em conjunto com os diálogos proporcionados pelo roteiro disponibilizado aos estudantes, percebe-se que foi criado um ambiente que favoreceu a visualização, troca de ideias, elaboração de conjecturas e testes, o que permitiu que o conceito de grupo fosse apresentado em uma perspectiva visual.

Foi possível perceber que os estudantes se envolveram ativamente nas discussões provocadas pelo graduando. Suas manifestações, durante a exposição do graduando na parte final da aula, indicam que receberam com naturalidade os conceitos abstratos apresentados. Esses indícios nos fazem refletir sobre a questão do concreto/abstrato no ensino de matemática, materializada na pergunta sobre iniciar o ensino através da abstração, e então procurar situações concretas onde o conteúdo é aplicado; ou partir do concreto, e então abstrair para casos gerais. Recorremos ao entendimento dos termos “concreto” e “abstrato” do ponto de vista da

filosofia da experiência, de John Dewey, contextualizado sob a perspectiva da aprendizagem de matemática em (Barbosa; Maltempi, 2024, p. 5):

O termo *concreto* [se aplica] quando o que é observado exprime tão diretamente o seu significado ao observador que não requer qualquer esforço reflexivo para ser interpretado. Já o conceito de *abstrato* se refere àquelas coisas cujos significados só são apreendidos quando primeiro se evoca pelo significado de coisas mais familiares, buscando por relações estes significados e o que ainda não é compreendido.

Assim, a diferenciação entre concreto e abstrato para uma pessoa depende do seu próprio nível de conhecimento ou desenvolvimento intelectual. Para a proposta didática realizada numa turma de 3º período do curso de Matemática, com estudantes que já haviam cursado a disciplina Geometria Plana e Desenho Geométrico, entendemos que as rotações e reflexões de polígonos regulares feitas no OA correspondem a conhecimentos concretos, apreendidos rapidamente pelo grupo. Os autores em (Barbosa; Maltempi, 2024) concluem que

o processo de “partir do concreto para o abstrato” deve começar com situações práticas, migrar para um interesse indireto pelo conhecimento intelectual e, finalmente, levar os alunos a apreciar o pensamento abstrato em si mesmo, transformando a visão do aprendiz sobre o valor e a beleza dos assuntos puramente intelectuais. ((Barbosa; Maltempi, 2024, p. 13))

Por ter sido realizada em apenas 2 horas-aula, como aula introdutória ao conceito de grupo, entendemos que o trabalho precisaria ser continuado em aulas subsequentes, para que fosse possível chegar à apreciação dos conceitos abstratos abordados por eles mesmos. Por isso entendemos essa aula como uma forma de motivar os estudantes para os estudos na disciplina subsequente de Álgebra, onde tais conceitos seriam formalmente apresentados. Nossos estudos na disciplina Informática e Ensino mostraram caminhos alternativos para o ensino de conteúdos abstratos, como o conceito de grupo e grupo diedral, e a experiência realizada com a turma indicou uma boa aceitação do conteúdo abordado.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Agradecimentos

Os autores agradecem as sugestões dos avaliadores (anônimos), que contribuíram para novas reflexões e possibilidades de aprofundamento futuro do trabalho.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

As obras submetidas ao jornal BEJOM estão sujeitas à licença [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Sob esta licença, os autores concedem aos leitores o direito de compartilhar, adaptar e utilizar as obras, inclusive para fins comerciais, desde que o crédito apropriado seja dado aos autores. Quaisquer modificações devem ser indicadas. Não há restrições adicionais além das estabelecidas pela licença.

Referências

- BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, I. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 6, n. 2, p. 46–64, 2017.
- BARBOSA, L. L.; MALTEMPI, M. V. O percurso do concreto ao abstrato na educação matemática: uma ressignificação de acordo com John Dewey. **Revista Catarinense de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 1–14, 2024.
- CANÇADO, A. P. **Grupo diedral: o estudo de grupos de simetrias em polígonos regulares**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Matemática) – São João del Rei.
- CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização de tecnologias da informação e comunicação nas aulas de Matemática: limites e possibilidades. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 8, n. 2, p. 101–119, 2014.
- HERSTEIN, I. N. **Tópicos de Álgebra**. São Paulo: Polígono, 1970.
- SCALDELA, D. O software GeoGebra. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. (ed.). **O GeoGebra e a matemática na educação básica**. Curitiba: Ithala, 2014. p. 13–23.
- SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **Vidya**, v. 40, n. 1, p. 177–195, 2020.
- SOARES, N. C. **O ensino de teoria de grupos nos cursos de licenciatura em matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – São Paulo.
- SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F. O GeoGebra no ensino de Álgebra Abstrata: uma abordagem dos grupos diedrais via Engenharia Didática. **Ciência&Educação**, v. 30, p. 1–17, 2024.

UBERLÂNDIA, U. F. de. **Ficha de componente curricular de Informática e Ensino (PROINTER II) do Curso de Graduação em Matemática**. [S. l.: s. n.], 2018. Faculdade de Matemática, Uberlândia.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. *In*: VALENTE, J. A. (ed.). **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: UNICAMP, 1993. p. 1–28.

VALENTE, J. A. Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais. *In*: VALENTE, J. A.; FREIRE, F. M. P.; ARANTES, F. L. (ed.). **Tecnologia e Educação: passado, presente e o que está por vir**. Campinas: NIED/UNICAMP, 2018. p. 17–25.

WILEY, D. A. **Learning object design and sequencing theory**. 2000. Doctoral dissertation.

Corresponding Author:

Érika Maria Chioca Lopes, erikalopes@ufu.br

Submitted: March 04, 2025

Accepted: July 24, 2025

Published: February 20, 2026

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>