

**Matemática Aplicada****MODELAGEM MATEMÁTICA COM O MODELO SIR APLICADO A  
EPIDEMIOLOGIA: UM ESTUDO BIBLIOGRÁFICO**

Letícia Alencar Mendes Martinho

Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, RO,  
Brazil.*E-mail:* alencarleticia6@gmail.com<https://orcid.org/0009-0006-5873-1262> 

Marcio Costa Araújo Filho

Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, RO,  
Brazil.*E-mail:* marcio.araujo@unir.br<https://orcid.org/0000-0001-5344-0892> 

Reginaldo Tudeia dos Santos

Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, RO,  
Brazil.*E-mail:* rtudeia@unir.br<https://orcid.org/0000-0003-4986-2720> **Mathematics Subject Classification (MSC):** 00A69, 00A71, 92D30.

**Resumo.** A presente pesquisa teve como objetivo fazer um estudo bibliográfico da aplicação do modelo SIR (Suscetíveis, Infectados, Recuperados) em alguns estudos de situações de epidemia ou de pandemia, para alguns estados do Brasil. A metodologia foi de revisão de alguns trabalhos que abordaram aplicações de equações diferenciais utilizando o SIR, dos quais foram escolhidos para análise três trabalhos: o primeiro aborda a hepatite A no município de Juruti no Pará; o segundo aborda a dengue, com dados empíricos e com dados modelados em Mossoró no Rio Grande do Norte; o terceiro trata sobre a propagação do COVID 19 no Estado do Maranhão. Os resultados da pesquisa apontaram que a utilização de ferramentas de modelagem, como o modelo SIR, pode ser fundamental para a compreensão de como se dá a propagação de doenças contagiosas, de maneira que permita as autoridades públicas a tomarem as decisões mais adequadas para mitigação da doença e dos problemas colaterais que essas causam à população.

**Palavras-chave.** Epidemiologia, propagação de doença, modelo SIR.**MATHEMATICAL MODELING WITH THE SIR MODEL APPLIED TO  
EPIDEMIOLOGY: A BIBLIOGRAPHIC STUDY**

**Abstract.** The present research aimed to carry out a bibliographic study of applying the SIR model in some studies of epidemic or pandemic situations for some States in Brazil. The methodology was to review some works that address applications of differential equations using SIR from which three works were chosen for analysis: the first dealing with hepatitis A in the municipality of Juruti in Pará, the

second dealing with dengue fever in Mossoró in Rio Grande do Norte; and the third dealing with the spread of COVID 19 in the State of Maranhão. The research results indicated that the use of modeling tools, such as the SIR model, can be fundamental in helping to understand how contagious diseases spread, this allows public authorities to make the most appropriate decisions to mitigate the disease and the collateral problems that it causes to the population.

**Keywords.** Epidemiology, spread of disease, SIR model.

## MODELACIÓN MATEMÁTICA CON EL MODELO SIR APLICADO A LA EPIDEMIOLOGÍA: UN ESTUDIO BIBLIOGRÁFICO

**Resumen.** Esta investigación tuvo como objetivo realizar una revisión bibliográfica de la aplicación del modelo SIR (Susceptible, Infectado, Recuperado) en estudios de situaciones epidémicas o pandémicas en varios estados brasileños. La metodología consistió en una revisión de varios estudios que abordaron la aplicación de ecuaciones diferenciales utilizando el SIR, de los cuales tres fueron seleccionados para su análisis: el primero aborda la hepatitis A en el municipio de Juriti, Pará; el segundo aborda el dengue, utilizando datos empíricos y datos modelados de Mossoró, Rio Grande do Norte; y el tercero aborda la propagación de la COVID-19 en el estado de Maranhão. Los resultados de la investigación indicaron que el uso de herramientas de modelado, como el modelo SIR, puede ser crucial para comprender cómo se propagan las enfermedades contagiosas, permitiendo a las autoridades públicas tomar las decisiones más adecuadas para mitigar la enfermedad y los daños colaterales que causa a la población.

**Palabras clave.** Epidemiología, propagación de enfermedades, modelo SIR.

## 1 Introdução

A partir de situações envolvendo a saúde pública e a transmissão de doenças, como o COVID-19, surgiu a Epidemiologia, que segundo Martins *et al.* [1] é um campo das ciências da saúde, que tem como objetivo, estudar a ocorrência de doenças em diferentes populações e/ou grupos, bem como a distribuição de fatores determinantes dos eventos relacionados à saúde coletiva. Ou seja, a epidemiologia é uma área da ciência onde se busca elaborar medidas de combate, controle e prevenção de doenças, diante de uma epidemia.

A epidemiologia se apoia em diversas áreas do conhecimento, incluindo a matemática. Na Epidemiologia Matemática são desenvolvidos modelos matemáticos epidemiológicos para investigar a transmissão de uma doença, em um determinado período. Modelos que, segundo Bassanezi [2], pressupõe a interpretação/tradução do problema de alguma realidade para Matemática.

O modelo Epidemiológico mais utilizado é o SIR, proposto por “Kermack e McKendrick, no início do século XX, para descrever a dinâmica de uma epidemia de peste bubônica ocorrida

na Índia” [3, p. 70]. Esse modelo divide a população em três categorias, a saber: os suscetíveis (S) composto por indivíduos que ainda não foram infectados pela doença, os infectados (I) são os indivíduos que já contraíram a doença e estão em fase de transmissão da infecção, enquanto os recuperados (R) são os indivíduos que contraíram a doença e já se recuperaram dela e se tornaram imunes à nova infecção.

O modelo SIR utiliza equações matemáticas como as Equações Diferenciais para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos, que mudam ao longo do tempo, e dependem de uma variável independente, além de serem utilizadas em modelagem de previsão. De modo geral, pode-se dizer que uma equação diferencial descreve a taxa de variação de uma função em relação à sua variável independente, além de outras informações relevantes, em uma pesquisa. Segundo Boyce, Diprima e Meade [4, p. 1], uma equação diferencial que descreve algum processo físico pode ser dita de um modelo matemático do processo (...).

De maneira geral, pode-se dizer que equações diferenciais são ferramentas importantes para descrever análises de sistemas dinâmicos em uma variedade de campos científicos e técnicos, dentre eles, os modelos epidemiológicos. Esses modelos podem ser usados para fazer previsões sobre a propagação de doenças em diferentes cenários, além de permitir a avaliação da eficácia de intervenções, em diferentes cenários de uma epidemia.

Os resultados obtidos, a partir desses modelos, podem ser utilizados para orientar políticas públicas no sentido de mitigar ou interromper a propagação de doenças. Segundo Cristovão [5, p. 12] “a avaliação de formas de controle das doenças também é uma importante contribuição da epidemiologia matemática, principalmente para a avaliação de políticas públicas para o controle das doenças”.

Assim, a matemática se mostra uma ciência essencial para a compreensão e enfrentamento desse tipo de problemática, já que os modelos matemáticos podem auxiliar no mapeamento de doenças infecciosas. Também podem auxiliar aos governantes a tomarem decisões para a prevenção e previsão da evolução de uma doença, ao longo do tempo, além de possibilitar a avaliação da eficácia de medidas de controle adotadas ou a serem adotadas.

Diante do exposto, surgiram alguns questionamentos: Como os modelos matemáticos podem auxiliar no mapeamento e prevenção das epidemias? O que é o modelo SIR e como ele pode ser utilizado para descrever epidemias? Para responder a esses questionamentos foram feitos estudos de alguns trabalhos que utilizaram o modelo SIR em epidemias de três estados do Brasil.

## 2 Metodologia

Essa pesquisa traz um estudo bibliográfico que, segundo Gil [6, p. 44], é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros, revistas, entre outros, tal pesquisa, tem como objetivo “fornecer fundamentação teórica ao trabalho, bem como a identificação do

estágio atual do conhecimento referente ao tema.” Dessa forma, a pesquisa bibliográfica busca identificar e analisar os trabalhos já publicados sobre o assunto em questão, permitindo que o pesquisador possa compreender o estado e as tendências da área de estudo.

Também foi feito estudo sobre modelagem matemática e com deduções de equações matemáticas utilizadas no modelo SIR, por meio do método dedutivo, o qual, segundo Gil [7] é amplamente utilizado nas ciências formais, como a matemática e a lógica, bem como nas ciências sociais, em que se busca a explicação de fenômenos a partir de teorias gerais. Além disso, [7] apresenta o método dedutivo como um processo lógico que parte de uma premissa geral para chegar a uma conclusão específica, amplamente utilizado na Matemática.

A presente pesquisa traz um estudo de três trabalhos que utilizaram o SIR e algumas de suas aplicações como a Hepatite A [5], a COVID-19 [8] e a Dengue [9], para mostrar como o referido modelo pode ser utilizado para prever a evolução de uma doença contagiosa e auxiliar em tomadas de decisões de intervenções eficazes, além de discutir os resultados obtidos.

A escolha dos referidos trabalhos se deu pela facilidade de compreensão da aplicação do modelo SIR, trazidas por eles, além da diversidade de perspectivas abordadas, tais como:

O estudo sobre hepatite A chamou a atenção por tratar da vacinação como forma de prevenção da doença em crianças, em uma cidade com alto índice de casos de hepatite A, em crianças de 1 a 6 anos, o que foi bem representado pelo modelo para crianças de 1 e 2 anos e de 5 e 6 anos, mas falhou para crianças de 3 e 4 anos, uma vez que essas já passaram da fase oral, de por os objetos na boca.

Já o trabalho sobre a COVID-19 destacou o uso de software de simulação como uma ferramenta que pode auxiliar as autoridades na tomada de decisões que mitiguem a propagação da doença, porém deixou lacunas, por não considerar, como parâmetro do modelo, questões como as de eliminação de focos do mosquito, recomendados pelas autoridades, além da realização de fumacê que contribuiu para eliminação dos mosquitos procriadores.

Por fim, a escolha do trabalho sobre a dengue se deu porque ele comparou os casos reais da doença com as projeções feitas pelo modelo SIR, o que permitiu uma análise interessante da eficácia do modelo, também por ser uma doença endêmica no estado de origem dos autores, Rondônia, o que permitirá replicar tal estudo, para a região e contribuir para melhoria da saúde local.

### 3 Modelagem Matemática

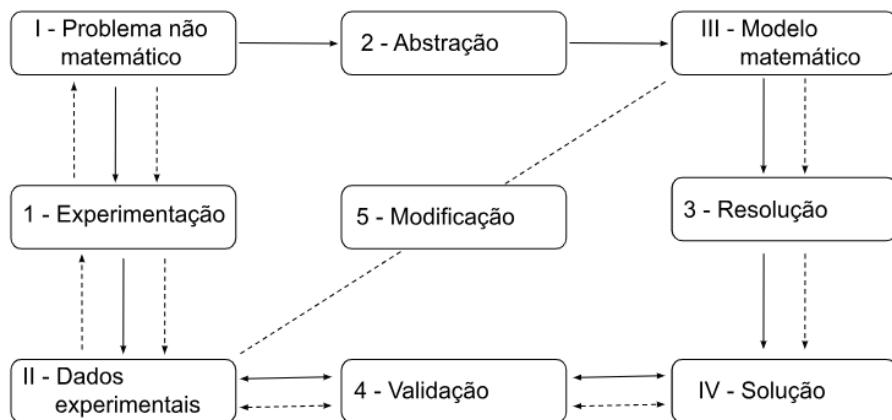
Modelagem Matemática, segundo [2], é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com finalidade de previsão de tendências. Ele ainda destaca que a modelagem consiste em transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Ainda, segundo [2], os dados da situação real são utilizados para comparar e

validar os dados obtidos a partir da modelagem.

A Modelagem Matemática possibilita que os problemas do mundo real sejam representados e analisados de forma quantitativa, o que pode facilitar a identificação de padrões e tendências, a previsão de comportamentos futuros e a tomada de decisões frente as informações obtidas do modelo.

O desenvolvimento da modelagem, segundo [2], requer uma sequência de ações como seleção das variáveis; formulação do problema teórico; formulação de hipóteses e simplificação do modelo. Além de uma sequência lógica de etapas, conforme Figura 1.

Figura 1: Processo de Modelagem Matemática.



Fonte: Autores, (2024).

Dentre as etapas observadas na Figura 1 está a de *experimentação*, uma atividade laboratorial centrada na obtenção de dados; a *abstração*, na qual ocorre a elaboração dos Modelos Matemáticos; a *validação* do modelo que envolve a testagem das hipóteses, momento em que é possível confrontar os resultados simulados com os dados empíricos, para verificar se as soluções obtidas se aproximam dos valores reais.

A melhor precisão nos resultados modelados é crucial para a validação do modelo, o que pode levar à aceitação ou à rejeição do modelo proposto. Já que um modelo eficiente deve, no mínimo, explicar os fatos que o originaram e permite prever novos fatos ou relações inesperadas.

Caso os resultados obtidos da modelagem não sejam bons, passa-se à fase que permite a modificação do modelo, ou sua rejeição, essa última se dá quando os resultados não correspondem às previsões esperadas dos dados de saída do modelo.

Dentro do processo de modelagem, existem equações como as diferenciais que são importantes, pois ajudam a representar a situação pretendida. De acordo com Zill [10, p. 2] “uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas (ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial (ED)”. Dentre elas, temos a equação diferencial conhecida como o modelo

de *Verhulst*, que descreve o crescimento e ou decrescimento populacional,

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P, \quad (1)$$

onde  $\frac{dP}{dt}$  representa a variação da população  $P$  em relação ao tempo  $t$ , de acordo com uma constante de proporcionalidade. Na referida equação, faz-se a suposição de que a taxa de crescimento da população é proporcional à população existente em um determinado período. O leitor interessado em mais detalhes sobre o modelo de *Verhulst* pode consultar [11] e [12].

Modelos que utilizam equações diferenciais, como o modelo SIR, segundo López-Flores *et al* [13], são amplamente utilizados para auxiliar na previsão da propagação de doenças. Esses modelos dividem a população em compartimentos e descrevem a evolução das frações da população nesses compartimentos ao longo do tempo, permitindo representar a população como um todo.

## 4 O modelo SIR

O modelo SIR, segundo Silva e Rosa [14], foi proposto por Kermack e McKendrick, para explicar o crescimento e o declínio repentino do número de pacientes infectados pela peste bubônica, durante a epidemia ocorrida na Índia, entre 1905 e 1906. Esse modelo divide a população em três classes, sendo a primeira composta por indivíduos saudáveis e podem ser contaminados pelo contato com indivíduos infectados, considerado os suscetíveis (S). A segunda classe é constituída por indivíduos que foram infectados e possuem a doença na fase ativa, denominados infectados (I), enquanto a terceira é composta por indivíduos já recuperados ou falecidos, imunes a doença, chamados de removidos (R).

O modelo SIR, segundo Bassanezi e Ferreira [15, p. 400], é representado pelas seguintes equações:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \quad (3)$$

e

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I, \quad (4)$$

onde suscetíveis diminuem a uma taxa proporcional ( $\beta$ ) ao número de encontros com infectados, enquanto estes aumentam os suscetíveis diminuem, ou seja,  $\alpha$  é a taxa de infecção e  $\beta$  é a taxa de

remoção. A variação dos recuperados  $\frac{dR}{dt}$  é proporcional à quantidade de indivíduos infectados por uma taxa de proporção ( $\alpha$ ). Assim,  $\frac{dS}{dt}$  é a taxa de mudança de suscetíveis, que diminui à medida que o número de infectados aumentam. Já  $\frac{dI}{dt}$  representa a taxa de infectados em relação ao tempo.

Com base nas equações (2), (3) e (4) será desenvolvida uma proposta para o modelo SIR, conforme a literatura, de forma a obter a expressão que representa o número de recuperados ou de mortos por unidade de tempo, dada por  $R(t)$ . Nessa proposta,  $S(t)$  representa as pessoas saudáveis,  $I(t)$  representa os infectados, enquanto  $R(t)$  os mortos ou imunes,  $\beta > 0$  indica a taxa de contato,  $\alpha > 0$  a mortalidade ou a taxa de cura. Já a equação  $S + I + R = N$  representa a população total, que pode ser denotada pela equação,

$$I = N - S - R. \quad (5)$$

A equação (5) levada em (4), resulta na equação

$$\frac{dR}{dt} = \alpha(N - S - R). \quad (6)$$

Utilizando-se a Regra da Cadeia e as igualdades (2) e (4), tem-se:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = -\frac{\beta}{\alpha}S. \quad (7)$$

Cuja separação de variáveis leva à equação

$$\frac{dS}{S} = -\frac{\beta}{\alpha}dR. \quad (8)$$

Integrando a equação (8), tem-se:

$$\int \frac{1}{S}dS = \int \frac{-\beta}{\alpha}dR = \frac{-\beta}{\alpha} \int dR \Rightarrow \ln(S) = \frac{-\beta}{\alpha}R + \ln(C),$$

onde  $\ln(C)$  é uma constante de integração, logo

$$\ln(S) - \ln(C) = \frac{-\beta}{\alpha}R \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{C}\right) = \frac{-\beta}{\alpha}R.$$

Como  $S(0) = S_0$  e  $R(0) = 0$ , tem-se

$$\ln\left(\frac{S_0}{C}\right) = 0 \Rightarrow e^0 = \frac{S_0}{C} \Rightarrow \frac{S_0}{C} = 1 \Rightarrow C = S_0.$$

Logo

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = \frac{-\beta}{\alpha}R \Rightarrow \frac{S}{S_0} = e^{\frac{-\beta}{\alpha}R},$$

ou seja,

$$S = S_0 e^{\frac{-\beta}{\alpha}R}. \quad (9)$$

Substituindo (9) na equação (6) obtém-se

$$\frac{dR}{dt} = \alpha(N - S_0 e^{\frac{-\beta}{\alpha}R} - R). \quad (10)$$

Como, a partir da equação (10) não é possível obter  $R$  de forma explícita em  $t$ , pode-se fazer a expansão do termo exponencial em potências de  $R$  e assumir que  $R$  é pequeno, comparado com a unidade, (Kermack e Mckendrick [16, p. 713], tradução nossa). Utilizando-se séries de Taylor, ver Lima [17, p. 200], pode-se aproximar

$$e^{-u} \simeq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad \text{onde} \quad u = \frac{-\beta}{\alpha}R,$$

sendo assim, temos

$$e^{\frac{-\beta}{\alpha}R} \simeq 1 - \frac{\beta}{\alpha}R + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}R^2. \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10), tem-se:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha \left[ N - S_0 + \left( \frac{\beta}{\alpha}S_0 - 1 \right) R - \frac{S_0\beta^2}{2\alpha^2}R^2 \right].$$

Com o auxílio da equação de *Riccati* a solução se torna explícita e fornece o número de mortes por unidade de tempo, Bacaer [18, p. 404]. Outra possibilidade de solução é utilizar a integração por frações parciais, [15, p. 402], e obter

$$R = \frac{\alpha^2}{\beta^2 S_0} \left[ \frac{\beta}{\alpha}S_0 - 1 + \sqrt{-q} \tanh \left( \frac{\sqrt{-q}}{2}\alpha t - \phi \right) \right], \quad (12)$$

onde

$$\sqrt{-q} = \left( \left( \frac{\beta}{\alpha}S_0 - 1 \right)^2 + 2S_0 I_0 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \phi = \tanh^{-1} \left( \frac{\frac{\beta}{\alpha}S_0 - 1}{\left( \left( \frac{\beta}{\alpha}S_0 - 1 \right)^2 + 2S_0 I_0 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Assim, a equação (12) fornece o número de mortes ou recuperados por unidade de tempo, o que permite o planejamento e implementação de políticas públicas de saúde, em situação de

pandemia.

De acordo com [15, p. 402], a partir da equação (12), “a variação das pessoas isoladas  $\frac{dR}{dt}$  será dada por:

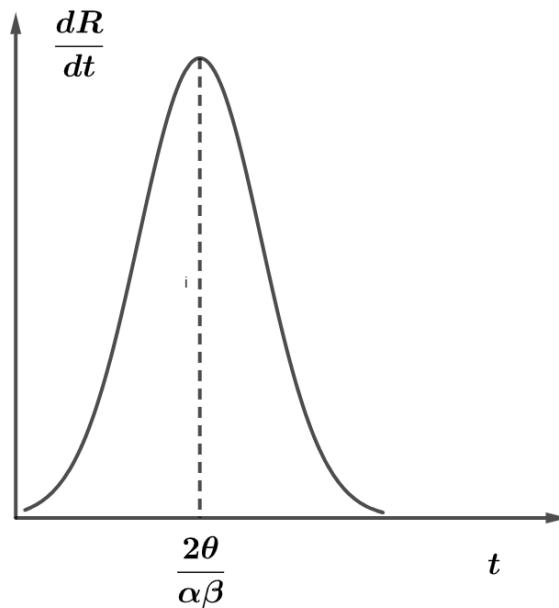
$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta^3}{2\alpha^2 S_0} \sqrt{-q} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{-q}}{2} \beta t - \phi \right),$$

onde

$$\frac{dR}{dt} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{\sqrt{-q}}{2} \beta t - \phi = 0, \quad \text{ou seja,} \quad t = \frac{2\phi}{\sqrt{-q}\beta}.$$

Uma representação da taxa de variação da curva de mortes com o tempo está na Figura 2.

Figura 2: Representação da curva epidêmica.



Fonte: Bassanezi e Ferreira [15, p. 403].

A curva de  $\frac{dR}{dt}$  representa a taxa de variação do número de mortes/recuperados em uma situação de epidemia. A Figura mostra que o maior número de mortes ocorre no meio do período pandêmico, representado por  $t = \frac{2\theta}{\alpha\beta}$ . O que parece condizente já que no início da epidemia existem muitas pessoas sem imunidade e que são contaminadas a medida que o tempo passa e parte delas vão a óbito. Com o decorrer do tempo, o número de pessoas sem imunidade reduz a medida que aumenta a quantidade de pessoas imunes, consequentemente, também reduz o número de óbitos.

#### 4.1 Algumas aplicações do modelo SIR

Esta subseção trará algumas aplicações do modelo SIR com base em estudos de Cristovão [5], Costa *et al.* [8] e Bezerra [9].

##### 4.1.1 Modelo SIR aplicado a propagação de hepatite A

Em seu trabalho, Cristovão [5] aplicou o modelo SIR para estudos de propagação de Hepatite A, cujo contágio se dá por meio do contato fecal-oral ou por meio de alimentos contaminados. O referido autor utilizou como base, dados coletados em um estudo de Nunes *et al.* [19], realizado em um hospital do município de Juruti, oeste do Pará, Brasil.

O estudo de [5] considerou a taxa de transmissão da Hepatite A entre crianças de 1 a 6 anos. Em um primeiro momento, o autor considerou a inexistência de um programa de vacinação, em sua simulação com o modelo SIR. Ele considerou que a doença estaria em equilíbrio quando  $R_0 = 1$ , ou seja, o número de infectadas permanecesse inalterado.

Posteriormente, Cristovão simulou o impacto da vacinação em dois grupos de crianças, o primeiro de crianças de 1 a 2 anos e o segundo de crianças de 5 e 6 anos. A simulação mostrou que o programa de vacinação foi eficiente para crianças de 1 a 2 anos, com redução significativa do número de novas infecções, o que parece condizente já que é uma fase em que a criança coloca tudo que encontra na boca e está mais sujeita a infecção por meio oral.

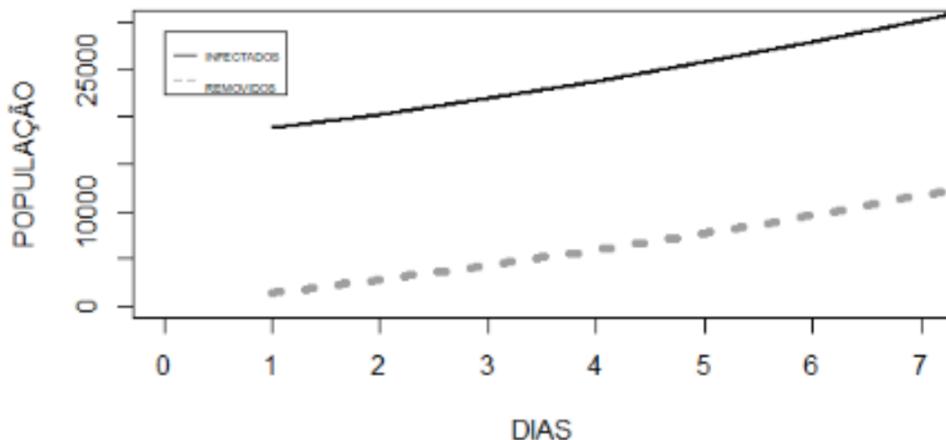
Por outro lado, a vacinação das crianças de 5 e 6 anos não teve impacto significativo, já que a redução dos níveis de novas infecções tiveram uma queda muito pequena, mostrando que a vacinação nessa faixa não seria uma boa estratégia. O que pode ter relação com a saída da criança da fase oral, o que reduz a contaminação por esse meio.

##### 4.1.2 Modelo SIR aplicado a propagação do COVID 19

O trabalho de Costa *et al.* [8] utilizou o modelo SIR para simular o comportamento do COVID-19, no Estado do Maranhão, Brasil, com base em dados reais disponíveis no site da Secretaria Estadual em 2020. Na pesquisa, os autores estimaram a taxa  $R_0$  dos infectados pelo coronavírus, que representam o número de casos secundários produzidos quando um infectado é introduzido em uma população completamente suscetível.

Dentre os resultados apontados pelos autores, destaca-se a relação entre infectados (linha cheia) e removidos ou recuperados (linha pontilhada) em uma população de 25000 pessoas, durante a primeira semana de análise. Nela, pode-se observar o aumento na propagação do vírus, que atingiu 25000 pessoas infectadas no sétimo dia da simulação, enquanto o número de recuperados foi pouco maior que 10000 pessoas, no sétimo dia de análise. Figura 3.

Figura 3: Primeira semana de análise da evolução do COVID 19, com  $R_0 = 2.1$ .

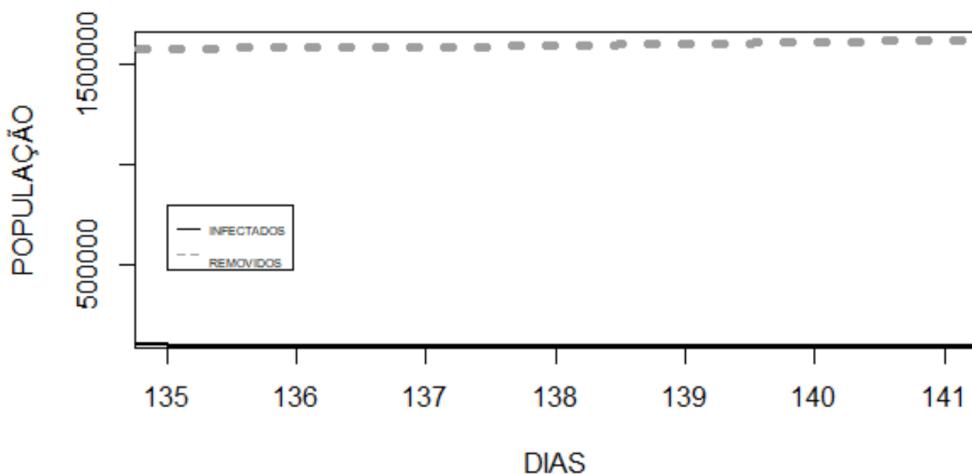


Fonte: Costa *et al.* [8, p. 26].

O crescimento significativo do número de infectados, nos sete dias analisados, pode ter relação com o alto número de pessoas suscetíveis, na fase inicial da pandemia de COVID 19. Enquanto os recuperados aumentam com a cura dos infectados.

A Figura 4, traz uma análise da simulação realizada para a 20<sup>a</sup> semana de evolução do COVID 19, nela é possível notar que o ritmo de contágio atingiu uma estabilidade em torno de 25000 pessoas por dia, enquanto o dos recuperados superou os 150000. O ritmo de contágio atingiu a estabilidade ou diminuiu em função da redução do número de suscetíveis ou ainda, devido as medidas de prevenção recomendadas pelos governantes e adotadas pela população. Já o número de recuperados aumentou, significativamente, a medida que o tempo passou e mais pessoas completaram o período de recuperação da doença.

Figura 4: Vigésima semana de análise da evolução do COVID 19, com  $R_0 = 2.1$ .

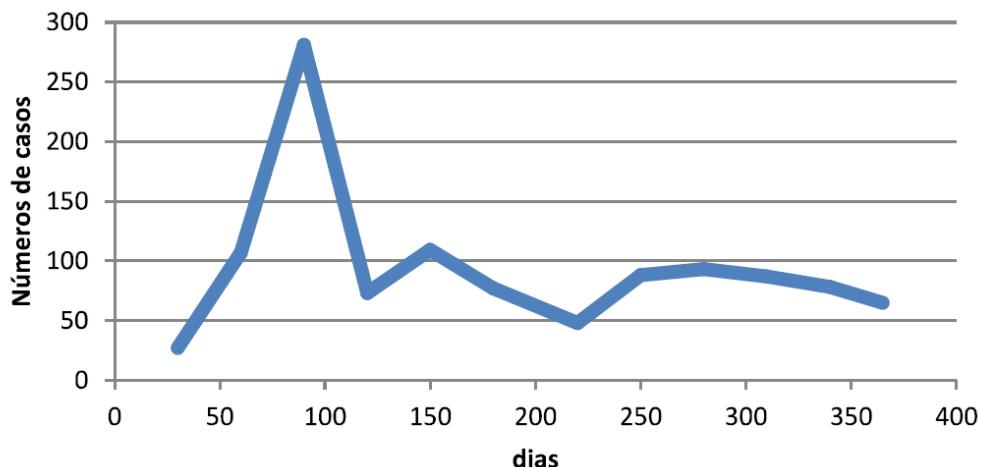


Fonte: Costa *et al.* [8, p. 33].

#### 4.1.3 Modelo SIR aplicado ao comportamento da dengue

A pesquisa de Bezerra [9] estudou o comportamento dos casos de dengue confirmados na cidade de Mossoró, Rio Grande do Norte, Brasil, em 2016, cidade com uma população de 297.378 pessoas, em 2019. O estudo de Bezerra comparou os 3058 casos reais registrados ao longo de 2016 (Figura 5), no referido município, aos dados projetados pelo modelo SIR (Figuras 6 e 7).

Figura 5: Amostra empírica do número de infectados com Dengue em 2016, na cidade de Mossoró-RN.

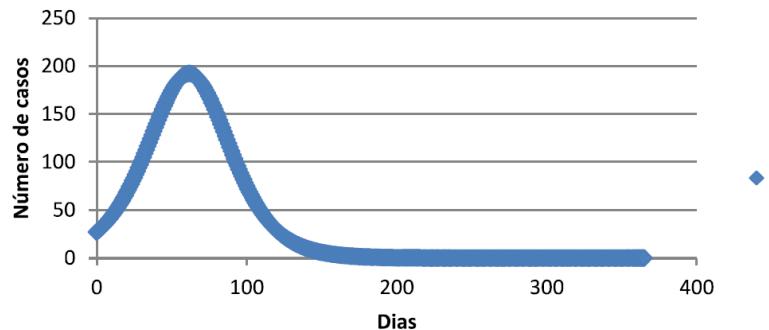


Fonte: Bezerra [9, p. 10].

A Figura 5 mostra que o pico, próximo aos 300 registros por dia, do número de casos de dengue ocorreu por volta do centésimo dia do início dos registros de dengue em Mossoró. Após atingir o pico, o número de casos foi diminuindo, ao longo do ano, até ficar pouco mais de 50 casos diários, o que tem relação com a redução do número de pessoas suscetíveis à doença, além das medidas tomadas pelo poder público, como fumace e ações da própria comunidade, a exemplo, eliminar recipientes com água parada.

Por outro lado, [9] analisou o número de casos de dengue com o modelo SIR, Figura 6. Ele levou em consideração a taxa de transmissibilidade  $\beta = 1,50$  e a de remoção  $\alpha = 1,45$  ao longo do ano de 2016, para uma população suscetível  $S(0) = 297.378$ . Ele considerou ainda que o número de infectados nos primeiros dias eram  $I(0) = 27$ , como dados de entrada do modelo.

Figura 6: Infectados com Dengue em 2016 na cidade de Mossoró-RN, segundo o modelo SIR, com  $\alpha = 1,45$  e  $\beta = 1,50$ .

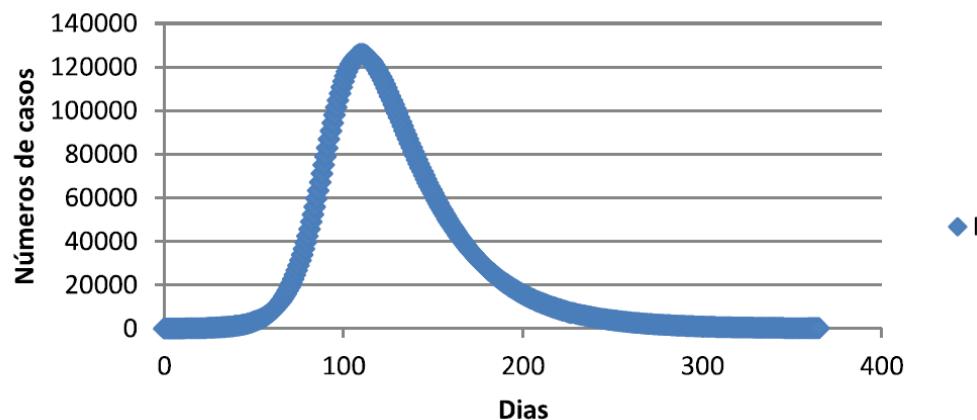


Fonte: Bezerra [9, p. 10].

Os resultados empíricos e os modelados tiveram curvas semelhantes, Figura 6, mostraram que o pico de infectados ocorreu antes do obtido na curva dos dados empíricos, Figura 5, o que pode ter relação com as taxas de transmissibilidade e de remoção, consideradas no modelo. Outro dado importante a ser destacado foi que o número de casos zeraram após os 120 dias iniciais, diferindo do que mostrou os dados empíricos, que ficaram próximos aos 50 casos registrados por dia.

Em uma nova rodada de simulação com o SIR, Bezerra [9], considerou a taxa de transmissibilidade  $\beta = 0,13$  e a de remoção  $\alpha = 0,03$  ao longo de 2016, para a população suscetível  $S(0) = 297.378$  e infectados iniciais de  $I(0) = 27$ . A Figura 7 mostra que, com esses dados, o modelo superestimou o número de infectados que superou, logo após os 100 primeiros dias, os 120000 infectados. O que mostrou a necessidade de readequação dos parâmetros do modelo, para melhor representar o número de casos reais.

Figura 7: Infectados com dengue segundo modelo SIR, com  $\alpha = 0,03$  e  $\beta = 0,13$ .

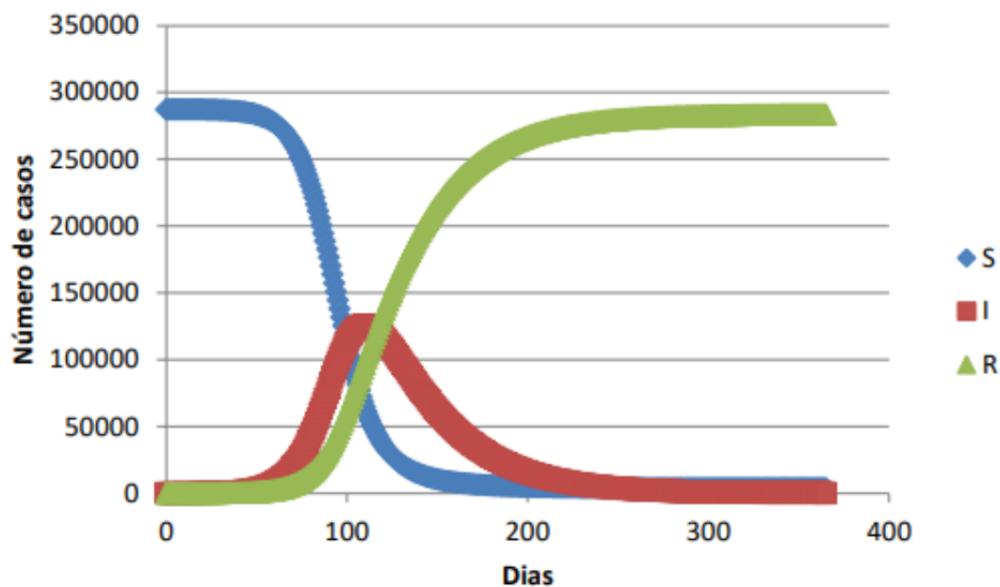


Fonte: Bezerra [9, p. 11].

É interessante observar que os parâmetros utilizados no modelo não consideraram as medidas adotadas pelo estado para controle e combate à doença, durante o período analisado, o que levou a uma divergência significativa na curva de infectados quando comparados aos dados simulados, Figura 6 e 7, aos reais registrados no referido município, Figura 5.

A comparação entre os suscetíveis (S), a evolução dos infectados (I) e dos recuperados (R) é ilustrada na Figura 8. A simulação inicia com toda a população considerada suscetível e, à medida que foram ocorrendo as infecções, esse número foi caindo. Além disso, a curva dos recuperados aumentou significativamente à medida que o número de infectados diminuiu. Esse comportamento é esperado, pois à medida que os indivíduos se infectam ou se recuperam, deixam de ser suscetíveis contribuindo para o crescimento da população recuperada ao longo do tempo.

Figura 8: Modelo SIR para os casos de dengue na cidade de Mossoró, em 2016, com  $\alpha = 0,03$  e  $\beta = 0,13$ .



Fonte:Bezerra [9, p. 11].

O número de infectados cresceu muito, nos primeiros 110 dias, e superou os 120000 casos, o que é condizente já que existia grande número de suscetíveis. Após esse período, o número de infectados reduziu significativamente, enquanto os recuperados se aproximou dos 300000.

Os resultados obtidos pelo autor, mostraram a necessidade de realização de mais simulações, com valores de parâmetros diferentes, até atingir valores bem próximos dos que foram registrados nos casos empíricos.

## 5 Considerações finais

A presente pesquisa fez um estudo bibliográfico de aplicações do modelo SIR. Nela, foram analisados trabalhos desenvolvidos por Cristovão [5] em casos de hepatite A, no município de Juriti, Pará, por Costa *et al* [8] que estudou casos de COVID 19 no Estado do Maranhão e por Bezerra [9] que estudou casos de dengue, registrados em 2016, na cidade de Mossoró, Rio Grande do Norte.

Cristovão simulou o impacto da vacinação na população de crianças de 1 a 2 anos de e de 5 a 6 anos de idade. Os resultados mostraram que a vacinação foi eficiente para crianças de 1 a 2 anos, com redução significativa do número de novas infecções, o que parece condizente pois nessa fase em que a criança tende a colocar objetos na boca e fica mais suscetível a contaminação por essa via. Na fase oral, parece relevante a vacinação para evitar novos contágios.

Porém, a vacinação das crianças de 5 e 6 anos levou a uma redução muito pequena no número de novos casos, mostrando que a vacinação nessa faixa não seria uma estratégia eficiente. A redução insignificante no número de novos casos, na população de 5 e 6 anos, pode ter relação com a saída dessas crianças da fase oral, o que reduz a contaminação por esse meio.

As simulações de [8] apontaram aumento da propagação do COVID 19, nos sete primeiros dias da análise, que atingiu 25000 pessoas infectadas no sétimo dia da simulação, enquanto o número de recuperados foi pouco maior que 10000 pessoas. O crescimento dos infectados estavam relacionados ao grande número de pessoas suscetíveis, na fase inicial da pandemia, enquanto os recuperados aumentaram com a cura dos infectados.

Por outro lado, na 20<sup>a</sup> semana de análise da evolução do COVID 19, o ritmo de contágio atingiu uma estabilidade e o número de recuperados superou os 150000. A redução dos suscetíveis levou a estabilidade ou redução do número de infectados. Já o número de recuperados aumentou, significativamente, à medida que o tempo passou e mais pessoas atingiram o tempo de recuperação da doença.

A pesquisa de [9], por sua vez, analisou a evolução da dengue em Mossoró, mas os parâmetros do modelo não consideraram as medidas adotadas pelas autoridades públicas e das pessoas em suas casas no controle e combate à doença, durante o período analisado, o que levou a uma divergência dos dados simulados, frente aos dados reais registrados no município.

Diante do exposto, a utilização de ferramentas de modelagem, como a do modelo SIR pode ser crucial no auxílio da compreensão de como se dá a propagação de doenças contagiosas, além de auxiliar na tomada de decisões, pelas autoridades públicas. Mas é necessário levar em consideração, nas simulações, a inserção de parâmetros referentes às medidas adotadas pelas autoridades públicas e pelas famílias para a contenção das doenças, entre outros, de forma que o modelo SIR possa representar, de forma mais aproximada possível, os dados de propagação e recuperação das doenças.

Portanto, é de fundamental importância a compreensão de como se comportam os parâmetros do modelo SIR e como cada um deles influenciam nas simulações para que as informações oriundas do modelo, possam ser o mais próximas possíveis dos dados reais. Dessa forma, os dados modelados podem servir de aliados das autoridades para a tomada das melhores decisões diante das epidemias.

Como sugestão de trabalhos futuros, seria interessante fazer uma análise que envolvesse mais artigos, que usaram o modelo SIR sobre epidemia de dengue, para uma análise comparativa e crítica sobre a eficiência do modelo, entre os artigos. Aplicar o modelo SIR para casos de Dengue, doença endêmica no Estado de Rondônia, sem considerar os parâmetros de mitigação da doença, no estado. Inserir no modelo SIR parâmetros que consideram as medidas tomadas pelas autoridades locais, para mitigar a doença, de forma que os dados modelados representem, de forma mais adequada, os dados de casos reais.

## Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado sem apoio financeiro.

## Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

## Licença

As obras submetidas ao jornal BEJOM estão sujeitas à licença [CC BY 4.0](#). Sob esta licença, os autores concedem aos leitores o direito de compartilhar, adaptar e utilizar as obras, inclusive para fins comerciais, desde que o crédito apropriado seja dado aos autores. Quaisquer modificações devem ser indicadas. Não há restrições adicionais além das estabelecidas pela licença.

## Referências

- [1] Martins, A. A. B. et al. *Epidemiologia*. Porto Alegre: SAGAH, 2018. ISBN: 9786556903651. URL: <https://books.google.com.br/books?id=wwMF0AEACAAJ>.

- [2] Bassanezi, R. C. *Ensino - aprendizagem com modelagem matemática*. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Contexto, 2002, p. 389. ISBN: 85-7244-207-3.
- [3] Alves, R. G. e Oliveira, M. R. A. “Modelagem matemática de sistemas epidemiológicos: um modelo SEIR para o sarampo”. Em: *Revista de Matemática da UFOP* 2 (2021), pp. 70–100. URL: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5148>.
- [4] Boyce, W. E., Diprima, R. C. e Meade, D. B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 11<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020, p. 425.
- [5] Cristovão, R. B. “Modelo SIR: uma aplicação à hepatite A”. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2015.
- [6] Gil, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 7<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: GEN Atlas, 2022, p. 208. ISBN: 978-6559771639.
- [7] Gil, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 7<sup>a</sup> ed. São Paulo: GEN Atlas, 2019, p. 248. ISBN: 978-8597020571.
- [8] Costa, F. et al. “Modelo SIR aplicado na dinâmica da COVID-19 no Estado do Maranhão, Brasil”. Em: *Revista de Matemática da UFOP* 1.1 (2021), pp. 18–34. URL: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/4845>.
- [9] Bezerra, E. O. “Comparação do modelo matemático SIR com dados reais de caso de dengue na cidade de Mossoró-RN”. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência e Tecnologia). Mossoró: Universidade Federal Rural do Semiárido, 2020.
- [10] Zill, D. G. *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*. 10<sup>a</sup> ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [11] Alitolef, S. S. et al. “História das equações diferenciais e algumas de suas aplicações”. Em: *Anais da X Semana de Matemática* (2010), pp. 75–84.
- [12] Silva, R. O. e Dutra, E. T. C. “Crescimento populacional da cidade de Ji-Paraná-RO utilizando o modelo logístico contínuo (modelo de Verhulst)”. Em: *Anais da XVII Semana de Matemática* (2017), pp. 183–195.
- [13] López-Flores, M. M. et al. *Como elaborar projetos de pesquisa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2021, p. 126.

- 
- [14] Silva, I. R. M. e Rosa, J. “Modelagem matemática aplicada à sistemas dinâmicos epidemiológicos”. Em: *Revista Científica Interdisciplinar INTERLOGOS* (2018), pp. 33–41.
  - [15] Bassanezi, R. C. e Junior, W. C. F. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988, p. 572.
  - [16] Kermack, W. O. e Mckendrick, A. G. “Contributions to the mathematical theory of epidemics”. Em: *Proc R Soc A* (1927), pp. 700–721.
  - [17] Lima, E. L. *Curso de análise*. 15<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.
  - [18] Bacaer, N. “Modelo de Kermack e McKendrick para a praga em Bombaim e a reproduibilidade de um tipo com sazonalidade”. Em: *Math. Biol* 64.403 (2012), p. 422. URL: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5148>.
  - [19] Nunes, H. M. et al. “Prevalência de infecção pelos vírus das hepatites A, B, C e D na demanda de um hospital no Município de Juruti, oeste do Estado do Pará, Brasil”. Em: *Revista Pan-Amazônica de Saúde* 2.2 (2010).

---

Corresponding Author:

Marcio Costa Araújo Filho, [marcio.araujo@unir.br](mailto:marcio.araujo@unir.br)

---

Submitted: February 26, 2025

Accepted: July 13, 2025

Published: November 28, 2025

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>