BEJOM

Brazilian Electronic Journal of Mathematics. 2025, v.6: e76862

https://doi.org/10.14393/BEJOM-v6-2025-76862

ISSN: 26751313 (online edition)

Matemática Pura

ALGUNS RESULTADOS SOBRE ÓRBITAS PERIÓDICAS DE FUNÇÕES

Mayara Beatriz Ferreira Drumond
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil.
E-mail: maybfdrumond@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-1215-1661

Wenderson Marques Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil.
E-mail: wmf@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-8154-2968

Eder Marinho Martins
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil.
E-mail: eder@ufop.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-4710-9188

Mathematics Subject Classification (MSC): 47H10; 37C25.

Resumo. Neste trabalho estudaremos diversos conceitos relativos a funções contínuas em uma variável real, destacando-se teorias relativas a pontos fixos, órbitas periódicas e ao Teorema de Li-Yorke. Este último teorema estabelece que se uma função real aplicar o intervalo $[a, b]$ em si mesmo e possuir um ponto de período três, então tal função possuirá pontos periódicos de qualquer período inteiro positivo. A obtenção dos resultados será feita, principalmente, a partir de aplicações do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, dois resultados clássicos da Matemática, cuja formulação e interpretações geométricas são relativamente simples e cujas aplicações são bastante relevantes em diversas ciências.

Palavras-chave. Pontos periódicos, órbitas periódicas, Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Li-Yorke.

SOME RESULTS ON PERIODIC ORBITS OF FUNCTIONS

Abstract. In this work we will study several concepts related to real continuous functions in one variable, highlighting results related to fixed points, periodic orbits and the Li-Yorke Theorem. This last theorem establishes that if a real function applies the interval $[a, b]$ to itself and has a point of period three, then it will have periodic points of any positive integer period. The results will be obtained mainly through applications of the Intermediate Value Theorem and Brouwer Fixed Point Theorem, two classic results in Mathematics, whose formulation and geometric interpretations are relatively simple and whose applications are quite relevant in several sciences.

Keywords. Periodic points, periodic orbits, Intermediate Value Theorem, Li-Yorke Theorem.

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE ÓRBITAS PERIÓDICAS DE FUNCIONES

Resumen. En este trabajo se estudian diversos conceptos relacionados con funciones continuas de una variable real, con énfasis en teorías vinculadas a puntos fijos, órbitas periódicas y el Teorema de Li-Yorke. Este último establece que, si una función real mapea el intervalo [a,b] en sí mismo y posee un punto de período tres, entonces esta dicha función tiene puntos periódicos de todo período entero positivo. Los resultados se obtienen principalmente mediante aplicaciones del Teorema del Valor Intermedio y del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, dos resultados clásicos de las matemáticas, cuya formulación e interpretación geométrica son relativamente sencillas, y cuyas aplicaciones son de gran relevancia en diversas áreas del conocimiento científico.

Palabras clave. Puntos periódicos, órbitas periódicas, Teorema del Valor Intermedio, Teorema de Li-Yorke.

1 Introdução

O objetivo geral deste texto é o estudo de órbitas periódicas de funções. O estudo que apresentaremos está fortemente conectado às funções contínuas de uma variável real, conceito explorado por grandes matemáticos como Newton $(1642 - 1727)$, Leibniz $(1646 - 1716)$, e Euler $(1707 - 1783)$ (ver [1]). Não nos propomos a apresentar resultados inéditos, mas a trazer um texto que reúne teorias e exemplos clássicos sobre o assunto.

Após as definições e resultados preliminares, abordaremos o Teorema de Li-Yorke o qual garante, sob certas hipóteses, que a existência de um ponto de período três para uma função contínua, assegura a existência de pontos n-periódicos para qualquer n inteiro positivo. O Teorema de Li-Yorke faz referência aos pesquisadores T. Li e J. A. Yorke que, em 1975, publicaram o artigo *Period Three Implies Chaos* ([2]) na revista American Mathematical Monthly. Como observado em [1], tal resultado constitui-se em um caso particular do Teorema de Sarkovskii, publicado em 1964, e que é explorado, por exemplo, em [3].

De modo geral, os resultados que abordaremos correspondem a aplicações do Teorema do Valor Intermediário, um teorema clássico, cuja visualização geométrica é simples e intuitiva, mas cujas consequências são bastante relevantes. Um fato de destaque é sua equivalência com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (ver, por exemplo [4]), o que já nos indica sua relação com teorias de pontos fixos e órbitas periódicas.

Ao longo do texto estabeleceremos precisamente as definições de Ponto Periódico e Órbita Periódica de uma função contínua e apresentaremos alguns exemplos.

Na Seção 4, apresentaremos duas proposições que são de extrema importância para a demonstração do teorema principal do artigo. Veremos uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e um resultado auxiliar que estabelece que, sob certas condições, uma órbita ímpar tem seus pontos se alternando à esquerda e à direita de um ponto central. Este último resultado é interessante por si só e sua demonstração é bastante engenhosa e construtiva. A partir desses resultados, obteremos facilmente o Teorema de Li-Yorke.

Nosso objetivo não é apresentar todos os cálculos e demonstrações (muitos podem ser vistos em [5]), mas indicar os principais resultados e abordar a geometria dos problemas envolvidos, além de trazer exemplos. Os gráficos inseridos no texto foram criados com o uso do programa GeoGebra.

2 Alguns resultados clássicos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e definições que serão vistos no decorrer do texto. Nos basearemos principalmente nas obras: [6] e [7].

As funções consideradas são de domínios reais e contradomínios reais. Vamos iniciar pela definição de função contínua, sendo $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio dos números reais.

Definição 1. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos determinar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem em $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Simbolicamente:*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Vejamos agora o Lema de Permanência de Sinal que pode ser visto com mais detalhes em [5] ou em [7] . Tal lema nos garante que se a função f for contínua e se $f(x_0)$ for não nulo, então existe uma vizinhança de x_0 tal que a imagem de todos os seus pontos tem o mesmo sinal de $f(x_0)$.

Lema 1 (Lema da Permanência do Sinal). *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_0 \in I$ for tal que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

$\left(\text{resp. } f(x) < \dfrac{f(x_0)}{2}\right)$*. Em particular, f ainda é positiva (resp. negativa) em $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

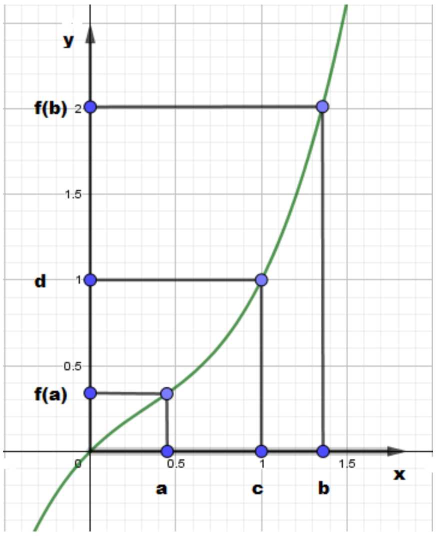
Outro teorema clássico da Análise Real é o Teorema do Valor Intermediário:

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

A demonstração no caso $f(a) < d < f(b)$ pode ser vista em [5].

Como Corolário imediato, no caso $d = 0$, obtemos o resultado a seguir

Figura 1: Ilustração do Teorema do Valor Intermediário. Observe que cada $d \in [f(a), f(b)]$ possui pré imagem por f em algum $c \in [a, b]$.



Fonte: os autores.

Corolário 1. *Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, isto é, se*

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ ou } f(b) < 0 < f(a),$$

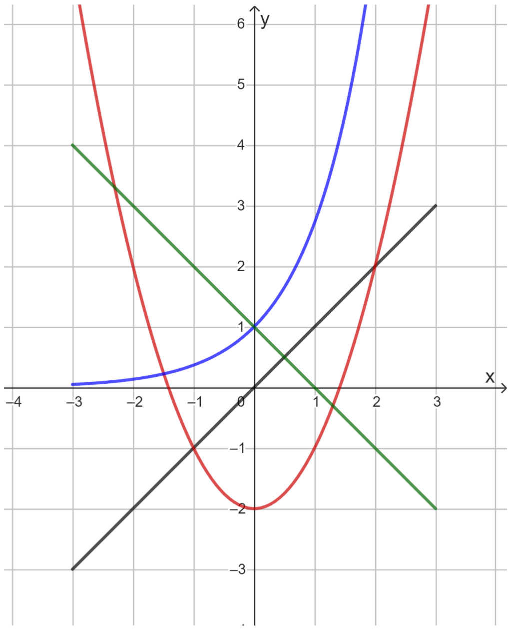
então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

O conceito de Ponto Fixo também será de grande relevância neste trabalho.

Definição 2 (Ponto Fixo)**.** *Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \to X$ uma função. Dizemos que um elemento $x_0 \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.*

Geometricamente, uma função real possui ponto fixo quando seu gráfico tem interseção com o gráfico da função de domínio real definida por $g(x) = x$.

Figura 2: Na figura vemos os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2$ (em vermelho), $g(x) = -x+1$ (em verde) e $h(x) = e^x$ (em azul), definidas no intervalo [-3,3] e suas interseções com o gráfico da função identidade (em preto) no mesmo intervalo. A cada interseção entre cada um dos gráficos das funções f, g e h com o gráfico da identidade, podemos identificar um ponto fixo da função correspondente.



Fonte: os autores.

Corolário 2. *Seja $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ intervalos fechados, $I \subset J$ e f uma função contínua. Se $f(I) \supset J$, então f possui um ponto fixo em I.*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, já temos um ponto fixo. Caso contrário, considere a função contínua $h(x) = f(x) - x$. Daí, como $I \subset J$ e $f(I) \supset J$ (logo, contém os pontos a e b), existe $x_1 > a,\ x_1 \in I$ tal que $f(x_1) = a$ e existe $x_2 < b,\ x_2 \in I$ tal que $f(x_2) = b$. Segue-se então

$$h(x_1) = f(x_1) - x_1 = a - x_1 < 0$$

e

$$h(x_2) = f(x_2) - x_2 = b - x_2 > 0.$$

Segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $x \in I$ tal que $h(x) = 0$, ou seja $f(x) = x$. Portanto f é uma função que possui ponto fixo. $\square$

Um dos mais importantes e conhecidos teoremas sobre pontos fixos é o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:

Teorema 2 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Então f possui ao menos um ponto ponto fixo.*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o resultado está provado. Caso contrário, considere, sem perda de generalidade, $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Seja $g(x) = f(x) - x$. Como f é contínua, temos que g é uma função contínua. Além disso,

$$g(a) = f(a) - a > 0$$

e

$$g(b) = f(b) - b < 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$g(x_0) = 0$$

ou seja,

$$f(x_0) = x_0$$

e provamos o teorema. □

Na verdade, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é equivalente ao Teorema do Valor Intermediário como pode ser visto em [4].

3 Pontos periódicos e órbitas

Nesta Seção abordaremos a noção de pontos periódicos de uma função f e definiremos órbitas periódicas. A nossa principal referência para esta seção é o artigo [1].

De agora em diante, utilizaremos a notação

$$f^n(x) = \begin{cases} x, & \text{se } n = 0, \\ f(x), & \text{se } n = 1, \\ f(f^{n-1}(x)), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Outra definição fundamental é a

Definição 3 (Ponto Periódico). *Se x_0 satisfizer*

$$\begin{cases} f^n(x_0) = x_0, \\ f^k(x_0) \neq x_0 \quad k = 1, 2, ..., n-1, \end{cases}$$

então x_0 é chamado ponto n-periódico de f e n é denominado período de x_0. Observe que se

x_0 *for um ponto de período* n *então* $f^{kn}(x_0) = x_0$ *para* k *inteiro positivo.*

Uma função f pode possuir pontos de diversos períodos e, claramente, os pontos fixos são pontos $1-$periódicos.

Nosso principal objetivo neste trabalho será apresentar um resultado clássico da matemática, que pode ser visto em [2]: se uma função possuir um ponto de período três, então possuirá pontos de quaisquer períodos inteiros positivos. Para tal, vejamos mais alguns resultados.

Definição 4 (Órbita periódica de f). *Se* x_0 *for um ponto* n*-periódico de f, chamamos de órbita periódica da função* f *o conjunto* $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\}$.

E, de posse da definição anterior, temos o

Teorema 3. *Seja* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$*. Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *for contínua e possuir um ponto de período* $k > 1$*, então* f *possuirá também um ponto de período* 1.

Demonstração. Isso segue do Teorema do Valor Intermediário. De fato, sejam f uma função contínua e x_0 um de seus pontos de período k, com $f^i(x_0),\ i = 0, 1, 2, 3, ..., k-1$ sendo os pontos da órbita de x_0.

Inicialmente escrevemos os pontos $x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)$ em uma sequência crescente e a renomeamos como

$$z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{k-1}.$$

Considere a função contínua $h(x) = f(x) - x$. Como f é uma função de período k, temos

$$h(z_0) = f(z_0) - z_0 = z_i - z_0 > 0, \text{ para algum } i = 1, 2, .., k-1,$$

e

$$h(z_{k-1}) = f(z_{k-1}) - z_{k-1} = z_i - z_{k-1} < 0, \text{ para algum } i = 0, 1, 2, ..., k-2.$$

Então, como h é contínua, existe $c \in [z_0, z_{k-1}]$ tal que $h(c) = 0$. Logo $f(c) = c$, o que nos garante um ponto fixo para f. □

Aplicando a contrapositiva ao resultado anterior, temos o seguinte corolário.

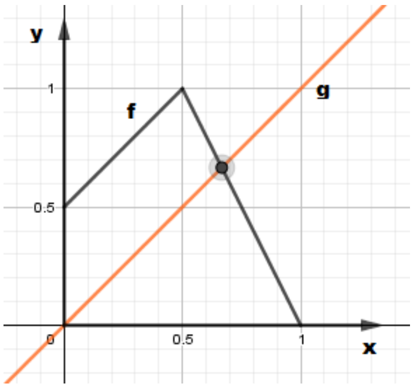
Corolário 3. *Seja* I *um intervalo. Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *for uma função contínua e não possui ponto fixo, então* f *não possui ponto de período* $k,\ k > 1$.

Vejamos agora alguns exemplos de pontos periódicos e órbitas. Mais detalhes e exemplos podem ser vistos em [1] e em [8].

Exemplo 1. *Considere* $f : [0,1] \to [0,1]$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Figura 3: A função $f(x)$ do Exemplo 1 f possui um ponto fixo no intervalo $[0, 1]$.



Fonte: os autores.

Observando os gráficos de $f(x)$ *e* $g(x) = x$ *na Figura 3, vemos uma única interseção. Resolvendo algebricamente temos*

$$x + \frac{1}{2} = x,$$

para valores de x *entre* $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, *não obtemos solução. Resolvendo*

$$2 - 2x = x$$

para valores de x *compreendidos em* $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, *obtemos a solução*

$$x = \frac{2}{3}$$

que é o ponto fixo de f. *A existência desse ponto já era esperada como consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.*

Temos também que $x = \dfrac{1}{3}$ *é ponto de período dois de* f *e sua órbita é* $\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{6}\right\}$. *De fato,*

$$f^0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},\ f^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6},\ f^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Ainda considerando a função f, temos que $x = 0$ é ponto de período três de f e sua órbita é $\left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

Exemplo 2. *A função $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}, \\ \\ 6 - 2x, & \dfrac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases}$$

tem pontos fixos em $x = 0$ e $x = 2$, e possui um ponto de período dois.

De fato, calculando os pontos fixos da função, observamos que a equação

$$2x = x$$

tem solução única para $x = 0$. Então há um ponto fixo para $x \leq \dfrac{3}{2}$. Além disso, resolvendo a equação

$$6 - 2x = x,$$

encontramos o valor

$$x = 2$$

o qual respeita a condição $\dfrac{3}{2} < x \leq 3$. Portanto, a função f possui dois pontos fixos.

Além disso, $x = \dfrac{12}{5}$ é um ponto de período dois e sua órbita é $\left\{\dfrac{12}{5}, \dfrac{6}{5}\right\}$. De fato,

$$f^0\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5},\ f^1\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{6}{5},\ f^2\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}.$$

O exemplo a seguir pode ser visto com mais detalhes em [5] e a ideia para sua elaboração pode ser encontrada em [8] e em [9]. Tal exemplo corresponde a uma função com as seguintes características: todos os pontos de seu domínio são n-periódicos e nenhum deles é ponto fixo.

Exemplo 3. *Seja $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$. A função $h(x,y) : S^1 \to S^1$ dada por*

$$h(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1}$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ é uma função que não possui pontos fixos e todos os pontos de S^1 são pontos $n-$periódicos de h.

4 A existência de pontos n-periódicos para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Vamos iniciar a seção apresentando alguns resultados que nos fornecem informações sobre as órbitas de funções reais que possuem um número ímpar de pontos periódicos, tendo como principal referência [1].

A Proposição a seguir é uma generalização do Teorema do Valor Intermediário. Na sequência do texto, utilizaremos a seguinte notação.

Notação 1. *$f(I_j) \supset I_{j+1}$ significa que a imagem de I_j por f contém I_{j+1}. De uma maneira geral, consideraremos*

$$I_i \to I_j \text{ ou } I_j \leftarrow I_i$$

se $f(I_i) \supset I_j$ ($f(I_i)$ contém I_j). Quando ocorrer $f(I_i) \supset I_i$, utilizaremos também a seguinte notação $\curvearrowright I_i$.

Proposição 1. *Sejam f uma função contínua em $[a, b]$ e $I_0, I_1, ..., I_{n-1}$ intervalos fechados contidos em $[a, b]$. Se*

$$\begin{aligned} &f(I_k) \supset I_{k+1}, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \\ &f(I_{n-1}) \supset I_0, \end{aligned}$$

então a equação

$$f^n(x) = x$$

tem pelo menos uma solução $x = x_0 \in I_k$ tal que

$$f^k(x_0) \in I_k, \;\; k = 0, 1, ..., n-1.$$

Demonstração. Se $n = 1$, temos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que já foi demonstrado.

Sabemos que a imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo. Como $f(I_{n-1}) \supset I_0$, existe $I^*_{n-1} \subset I_{n-1}$ tal que $f(I^*_{n-1}) = I_0$. Do mesmo modo, existe $I^*_{n-2} \subset I_{n-2}$ tal que $f(I^*_{n-2}) = I^*_{n-1}$.

Repetindo-se $n-1$ vezes esse raciocínio obtemos uma sequência de subintervalos $I^*_k \subset I_k$ tais que

$$f(I^*_k) = I^*_{k+1}, \;\; k = 0, 1, \cdots, \; n-2 \text{ e } f(I^*_{n-1}) = I_0.$$

Portanto,

$$f(I^*_0) = I^*_1,$$

$$f^2(I^*_0) = f(I^*_1) = I^*_2,$$

$$f^3(I^*_0) = f(I^*_2) = I^*_3,$$

$$\vdots$$

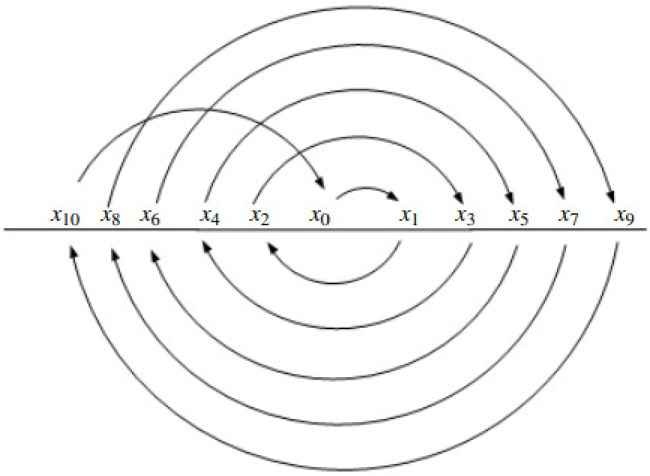
$$f^{n-2}(I_0^*) = f(I_{n-3}^*) = I_{n-2}^*,$$
$$f^{n-1}(I_0^*) = f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*,$$
$$f^n(I_0^*) = f(I_{n-1}^*) = I_0 \supset I_0^*.$$

Portanto, como f^n é contínua e I_0^* é fechado e limitado, existe $x_0 \in I_0^*$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Além disso, $f^k(x_0) \in I_k^* \subset I_k, \;\; k = 0, 1, \cdots, n-1.$ $\square$

Geometricamente $f^k(x_0) \in I_k$ significa que, aplicando-se f a x_0 e, em seguida, aplicando f sucessivamente às imagens obtidas, obteremos uma sequência de pontos, cada um deles pertencente a um dos conjuntos $I_1, I_2, ..., I_{n-1}$, e voltaremos a assumir o valor inicial x_0 na n-ésima aplicação de f.

Antes de utilizarmos a Proposição 1 para provarmos o Teorema de Li-Yorke, vamos apresentar, para completeza do texto, um resultado bastante curioso. Tal resultado é relativo à localização dos pontos periódicos de ordem ímpar e mostra que, sob certas condições, uma órbita ímpar (órbita com número ímpar de pontos) tem seus pontos se alternando à esquerda e à direita de um ponto central. Este resultado é o que se estabelece no seguinte Teorema.

Figura 4: Pontos de uma órbita alternando-se à esquerda e à direita de um ponto central.



Fonte: os autores.

Teorema 4. *Seja I um intervalo. Seja $f : I \to I$ uma função contínua, e suponha que f tenha uma órbita $(2n+1)-$periódica $\{x_k = f^k(x_0),\; k = 0, 1, ..., 2n\}$ e que f não possua uma órbita $(2m+1)-$periódica para $1 \leq m < n$. Suponha também que, escrevendo a sequência ordenada dos x_i's em ordem crescente, x_0 seja seu termo central. Então é válida uma das duas permutações* *i)* $x_{2n} < x_{2n-2} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n-3} < x_{2n-1}$,

ii) $x_{2n-1} < x_{2n-3} < \cdots < x_1 < x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n}$,

O resultado anterior é bastante interessante e sua demonstração, muito engenhosa e construtiva, pode ser vista em [1] ou em [5]. Além disto, os ciclos que aparecem no Teorema 4 são denominados Ciclos de Stefan (ver [10]).

Aplicaremos a Proposição 1 para provar que a existência de um ponto de período 3 para uma função contínua que deixe um intervalo fechado $[a, b]$ invariante implica na existência de pontos n-periódicos para qualquer n natural. Este é o conhecido Teorema de Li-Yorke que veremos a seguir.

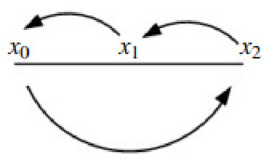
Teorema 5. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$, com $f([a, b]) \subset [a, b]$. Se a função f possuir um ponto 3-periódico, então também possuirá um ponto n-periódico para todo inteiro positivo n.*

Demonstração. Sejam x_0, x_1 e x_2 pontos de uma órbita 3-periódica de f tal que $x_0 < x_1 < x_2$. Mostraremos que f possui um ponto n-periódico para todo inteiro positivo n.

Começaremos mostrando que f possui um ponto fixo. Existem duas possibilidades para o valor de $f(x_1) : f(x_1) = x_0$ ou $f(x_1) = x_2$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $f(x_1) = x_0$. Então $f(x_0) = x_2, f(x_2) = x_1$, com isso, $f(x_1) = x_0 < x_1$ e $f(x_0) = x_2 > x_0$.

Defina a função $g(x) = f(x) - x$. Temos que $g(x_1) < 0$ e $g(x_0) > 0$. Como g é contínua, segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que $g(c) = 0$. Tal ponto é o ponto fixo de f que procuramos.

Figura 5: Representação da órbita de período três tal que $f(x_0) = x_2, f(x_2) = x_1$ e $f(x_1) = x_0$.



Fonte: os autores.

Demonstremos a existência de pontos periódicos de ordem maior que 1. O caso $n = 3$ é válido por hipótese. Passemos aos demais casos, assumindo a notação: $I_0^* = [x_0, x_1], I_1^* = [x_1, x_2]$.

Pela continuidade de f em $[a, b]$, segue-se que f é contínua em cada subintervalo de $[a, b]$. Daí, temos,

1. $f([x_0, x_1]) \supset [x_0, x_2] \supset [x_0, x_1]$;

2. $f([x_0, x_1]) \supset [x_0, x_2] \supset [x_1, x_2]$;

3. $f([x_1, x_2]) \supset [x_0, x_1]$.

Ou seja,

1. $f(I_0^*) \supset I_0^*$;

2. $f(I_0^*) \supset I_1^*$;

3. $f(I_1^*) \supset I_0^*$,

e, usando a notação que temos adotado,

$$I_0^* \to I_0^* \to I_1^* \to I_0^*,$$

que também pode ser indicada por

$$\curvearrowright I_0^* \rightleftarrows I_1^*,$$

em que o símbolo $\curvearrowright$ significa que I_0^* é aplicado nele mesmo.

Considere agora os intervalos

$$I_0 = I_1 = \cdots = I_{n-2} = I_0^*$$

e

$$I_{n-1} = I_1^*.$$

Pela Proposição 1, existe $x_0^* \in I_0^*$ tal que $f^n(x_0^*) = x_0^*$ para n inteiro positivo e

$$f^k(x_0^*) \in I_0^*, \quad k = 0, 1, ..., n-2,$$

$$f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^*.$$

Afirmamos que $x_0^*, f(x_0^*), \cdots, f^{n-1}(x_0^*)$ são todos distintos. De fato, se não forem, $f^{n-1}(x_0^*)$ deveria ser igual a um dos $f^k(x_0^*)$, com $k = 0, 1, \cdots, n-2$. Mas,

- Se $f^{n-1}(x_0^*) = x_0^*$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = \{x_1\}$;
- Se $f^{n-1}(x_0^*) = f(x_0^*)$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = \{x_1\}$;
- ...
- Se $f^{n-1}(x_0^*) = f^{n-2}(x_0^*)$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = \{x_1\}$.

Em todos os casos teríamos $f^{n-1}(x_0^*) = x_1$, o que corresponde a $f^n(x_0^*) = f(x_1)$.

Como x_0^* é um ponto fixo de f^n, segue-se que

$$f^n(x_0^*) = x_0^*.$$

Além disso, pelas últimas identidades,

$$f(x_1) = x_0^*.$$

E sendo $f(x_1) = x_0$, concluímos que $x_0^* = x_0$.

Aplicando novamente f, temos $f(x_0^*) = f(x_0)$. Por construção, $f(x_0^*) \in I_0^*$, mas, $f(x_0) = x_2 \in I_1^*$, e $x_2 \notin I_0^*$. Dessa forma, obtemos uma uma contradição.

Portanto todos os elementos $x_0^*, f(x_0^*), \cdots, f^{n-1}(x_0^*)$ são distintos e a prova do Teorema está completa. □

5 Exemplos

Vejamos alguns exemplos relativos aos resultados que apresentamos.

O primeiro exemplo mostra a importância de se ter um intervalo fechado no domínio da função do Teorema que acabamos de demonstrar:

Exemplo 4. *Se tomarmos $n = 3$ no Exemplo 3, teremos uma função contínua, cujo domínio é um conjunto fechado, porém não é um intervalo. Tal função não possui pontos fixos visto que apenas rotaciona os pontos de S^1 de um ângulo $\frac{\pi}{3}$.*

A continuidade também é fundamental no Teorema 5 como pode ser visto no Exemplo a seguir, no qual é exibida uma função com (apenas) 3 pontos de período 3, mas sem pontos de outros períodos.

Exemplo 5. *Seja $\{x_n\}$ uma enumeração dos racionais pertencentes a [0,1] e defina a função $f : [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por*

$$f(x_n) = x_{n+1}, \text{ se } n \geq 3,$$

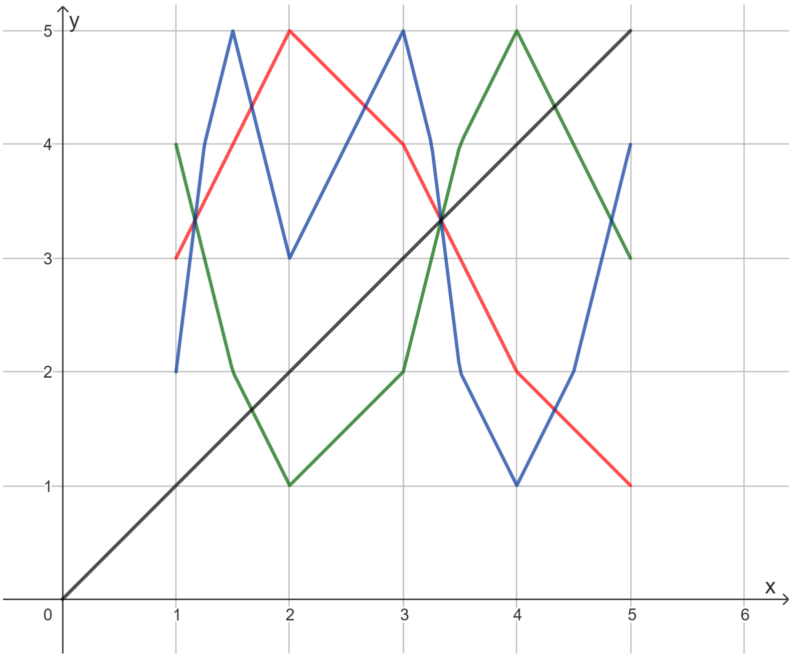
$f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2$ e $f(x_2) = x_0$. Observe que os pontos x_0, x_1 e x_2 são 3-periódicos e não há outros pontos periódicos.

Por fim, apresentamos exemplos mostrando que uma função que possua um ponto 5-periódico não terá, necessariamente, um ponto 3-periódico. O primeiro desses exemplos é clássico e se encontra em diversos artigos sobre o tema, como, por exemplo, em [2].

Exemplo 6. *Seja $f : [1,5] \to [1,5]$ tal que $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = 2, f(5) = 1$ e sendo linear em cada intervalo $[n, n+1]$, $1 < n < 4$.*

É possível notar, com cálculos diretos, que os inteiros do intervalo [1,5] são pontos 5-periódicos de f.

Figura 6: Gráficos das funções funções f, em vermelho); f^2, em verde; f^3, em azul e da função identidade, em preto (esta última definida no intervalo [0,5]).



Fonte: os autores.

A Figura 6 apresenta os gráficos das funções f, f^2 *e* f^3, *além de suas interseções com o gráfico da função identidade. Este gráfico nos permite visualizar geometricamente as propriedades das funções envolvidas que se seguem.*

Não há pontos fixos para a função $f^3 := f \circ f \circ f$ *no intervalo [1,2], ou seja, não há pontos 3-periódicos de* f *neste intervalo. De fato, é imediato verificarmos que 1 e 2 não são pontos fixos. Também é válido que*

$$f^3([1,2]) = f^2([3,5]) = f([1,4]) = [2,5].$$

Como mesmo procedimento vemos que não há pontos 3-periódicos em [2,3] e nem em [4,5]. Portanto, resta apenas verificarmos se há um ponto 3-periódico em [3,4].

Como

$$f^3([3,4]) = f^2([2,4]) = f([2,5]) \supset [3,4],$$

temos a garantia de que há um ponto fixo p *para* f^3 *em [3,4].*

Afirmamos que este ponto, além de único, é também ponto fixo de f, *ou seja, 3 não é seu* *menor período (notemos que p é diferente de 3 e de 4 já que tais pontos não são pontos fixos de f^3).*

De fato, seja $p \in [3,4]$ um ponto fixo de f^3. Neste caso,

$$f(p) \in [2,4] = [2,3] \cup [3,4].$$

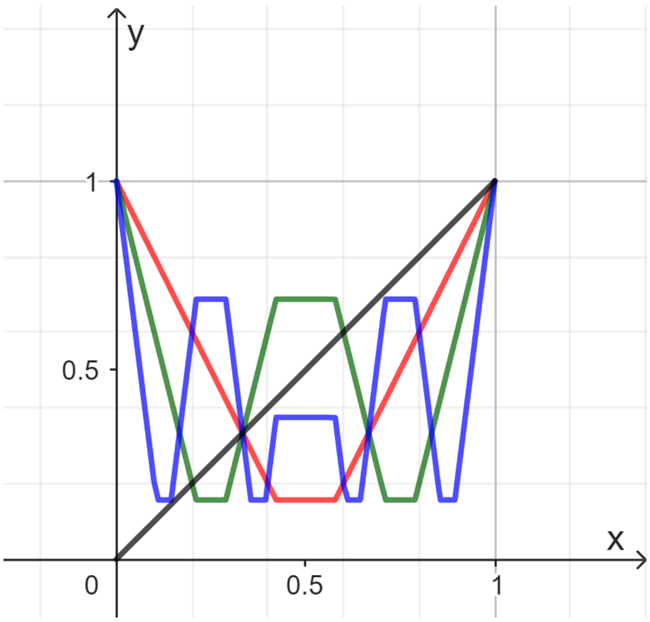
Se $f(p) \in [2,3]$ teremos $f^3(p) \in [1,2]$, o que faz com que p não seja fixo por f^3.

Caso $f(p) \in [3,4]$ teremos $f^2(p) \in [2,4] = [2,3] \cup [3,4]$. Caso tenhamos $f^2(p) \in [2,3]$ é fácil ver que $f^3(p) \in [4,5]$ e, como 4 não é o ponto fixo procurado, novamente não encontramos o ponto fixo em [2,3].

Resta então o caso $f^2(p) \in [3,4]$, ou seja p, $f(p)$, $f^2(p) \in [3,4]$. Como $f(x)|_{[3,4]} = 10-2x$, seu único ponto fixo é $p = \dfrac{10}{3} \in [3,4]$. É imediato ver que tal ponto é um ponto fixo de f^3.

Para finalizar, vejamos mais um exemplo de função que possui pontos 5-periódicos mas não possui pontos 3-periódicos.

Figura 7: Gráficos das funções funções f, em vermelho); f^2, em verde; f^3, em azul e da função identidade, em preto.

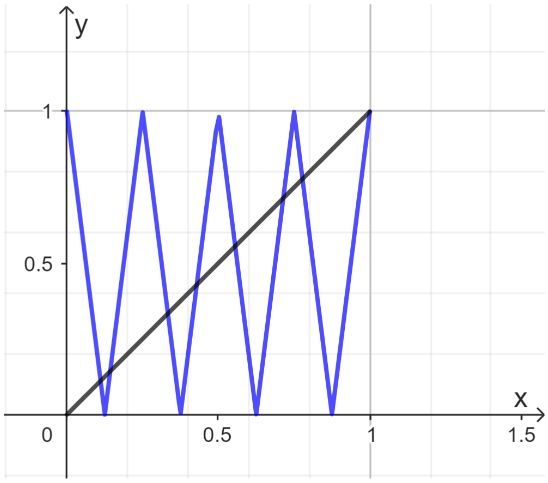


Fonte: os autores.

Exemplo 7. *Considere a função*

$$f(x) = \max\left\{\frac{5}{32}, 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right\}$$

Figura 8: Gráficos das funções funções g^3, em azul, e da função identidade, em preto.



Fonte: os autores.

definida em $\mathbb{R}$. Tal função é contínua e aplica o intervalo [0,1] nele mesmo. A função f possui pontos 5-periódicos mas não possui nenhum ponto 3-periódico.

Se considerarmos a função $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$, é possível verificarmos que $g^3(x)$ possui oito pontos fixos, sendo que, dentre eles, temos dois pares de 3-órbitas de f dados por $\left\{\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}\right\}$ e $\left\{\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right\}$, além de dois pontos fixos de f: 1 e $\frac{1}{3}$.

Visto que f assume o valor $\frac{5}{32}$ no intervalo $\left[\frac{27}{64}, \frac{37}{64}\right]$, garantimos que a função f possui pontos 5-periódicos já que

$$\frac{5}{32} \to \frac{11}{16} \to \frac{3}{8} \to \frac{1}{4} \to \frac{1}{2} \to \frac{5}{32}.$$

Afirmamos que qualquer órbita de f terá um ponto maior do que ou igual a $\frac{5}{32}$. De fato, se tal órbita possuísse um elemento menor do que $\frac{5}{32}$, sua imagem por f seria maior do que ou igual a este valor, e segue-se a validade da afirmação.

Além disso, afirmamos que, em qualquer órbita de tamanho diferente de 5, f atua como a função g. De fato, se $\frac{5}{32}$ pertencer à órbita, a mesma deve ter período 5, como visto anteriormente. Caso os elementos da órbita sejam diferentes (maiores) que $\frac{5}{32}$, o resultado é imediado a partir da definição de f.

Supondo que f possua uma órbita de período 3, pelo observado anteriormente, temos que

$f(x) = g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$ *quando aplicada aos pontos dessa órbita. Mas, como vimos, as órbitas 3-periódicas de* g *contém os pontos* $\frac{1}{7}$ *e* $\frac{1}{9}$ *que são menores que* $\frac{5}{32}$, *contradizendo o observado anteriormente. Portanto, é impossível que* f *tenha órbitas de período 3 e, com isso, concluímos o Exemplo.*

Considerações

Os resultados apresentados correspondem a teoremas e exemplos clássicos relativos às órbitas periódicas de funções e, como pode ser visto no texto, se conectam com teoremas como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e com seu equivalente, o Teorema do Valor Intermediário, dois resultados com forte apelo geométrico e amplamente utilizados em diversas áreas da Matemática e de outras ciências. Desta forma, muitos dos resultados vistos possuem uma geometria bastante interessante que pode ser explorada. Mais que isso, os conceitos e exemplos apresentados indicam que tais resultados podem ser abordados em diversos níveis de ensino, desde que o aprofundamento seja adequado a cada público.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal de Ouro Preto e ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat. O terceiro autor agradece ao FNDE/MEC.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

Referências

[1] Huang, X. From Intermediate Value Theorem To Chaos. Em: *Mathematics Magazine, JSTOR* 65 (1992), pp. 309–311.

[2] Li, T. e Yorke, J. Period Three Implies Chaos. Em: *The American Mathematical Monthly* 82 (1975), pp. 985–992.

[3] Santana, G. O. O Teorema de Sarkoviskii e seu Recíproco. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat). Ouro Preto: Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 2019, p. 61.

[4] Pereira, R. O., Ferreira, W. M. e Martins, E. M. A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário. Em: *Revista de Matemática de Ouro Preto* 1 (2018), pp. 108–119.

[5] Drumond, M. B. F. Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de Li-Yorke: Uma Aplicação do Teorema do Valor Intermediário. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat). Ouro Preto: Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 2018, p. 50.

[6] Lima, E. L. Curso de Análise - Vol. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.

[7] Muniz Neto, A. C. Fundamentos de Cálculo. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2014.

[8] Brás, J. C. T. Dinâmica de Funções Contínuas na Reta. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Covilhã, Portugal: Universidade da Beira Interior, 2013.

[9] Devaney, R. L. A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. Avalon Publishing, 1992.

[10] Burns, K. e Hasselblatt, B. The Sharkovsky's Theorem: A Natural Direct Proof. `http://emerald.tufts.edu/as/math/Preprints/BurnsHasselblattShort.pdf`.

Corresponding Author:
Wenderson Marques Ferreira , *wmf@ufop.edu.br*

Submitted: Jan 29, 2025
Accepted: Jul 04, 2025
Published: Data de publicação - Sept 26, 2025
https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index