

**Matemática Aplicada****SINGULARIDADES COMO GERADORAS DE CONSTELAÇÕES DE SINAIS E
TRIÂNGULOS HIPERBÓLICOS**

Mariana Gabriela Gusmão

Universidade Federal de Alfenas, Departamento de Matemática, Alfenas, MG, Brasil.

E-mail: mariana.gusmao@unifal-mg.edu.br

<https://orcid.org/0009-0007-0703-5766> 

Anderson José de Oliveira

Universidade Federal de Alfenas, Departamento de Matemática, Alfenas, MG, Brasil.

E-mail: anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-5467-9827> **Mathematics Subject Classification (MSC):** 94Bxx, 94B05, 94B70.

Resumo. Neste trabalho serão consideradas três singularidades regulares de equações diferenciais fuchsianas, sendo uma delas o infinito, como geradoras de constelações de sinais e como vértices de um polígono hiperbólico, a fim de estabelecer uma conexão com a análise de erros em um canal discreto sem memória e em um código geometricamente uniforme. O procedimento é baseado nas seguintes etapas: dados dois pontos complexos e o infinito: (1) considerar esses pontos como singularidades de uma equação diferencial fuchsiana; (2) gerar constelações de sinais no plano complexo a partir das singularidades obtidas; (3) considerar a existência de um código perfeito ou quase perfeito sobre a constelação de sinais e sua capacidade de correção de erros; (4) analisar essas singularidades como vértices de um triângulo hiperbólico para identificar o gênero da superfície associada, por meio dos emparelhamentos dos lados desse triângulo; (5) verificar qual canal está associado ao mesmo gênero, e assim representar os vértices do triângulo hiperbólico como entradas e saídas do canal; (6) analisar o canal associado às palavras-código para verificar a probabilidade de erro da singularidade transmitida. Por meio dos resultados obtidos, pode-se concluir que singularidades com a parte real oposta geram códigos perfeitos e/ou quase perfeitos com a mesma capacidade de correção de erros. Foi possível representar as palavras-código como entradas e saídas de um canal discreto sem memória, mostrando que a probabilidade de erro, p , está relacionada ao número de palavras-código sobre a constelação. Ao considerar as singularidades como vértices de um triângulo hiperbólico, foi estabelecida uma conexão com o canal binário simétrico $C_{2,2}$, cujas entradas e saídas representam os pares de singularidades opostas em relação ao eixo imaginário. As conexões estabelecidas podem ser aplicadas à análise de erros em um processo de transmissão de informação.

Palavras-chave. Códigos geometricamente uniformes, equações Fuchsianas, canais de comunicação.

SINGULARITIES AS GENERATORS OF SIGNAL CONSTELLATIONS AND HYPERBOLIC TRIANGLES

Abstract. In this work, three regular singularities of fuchsian differential equations will be considered, one of them being infinity, as generators of signal constellations and as vertices of a hyperbolic polygon, in order to establish a connection with error analysis in a discrete memoryless channel and in a geometrically uniform code. The procedure is based on the following steps: given two complex points and the infinite: (1) consider these points as singularities of a fuchsian differential equation; (2) generate constellations of signals on the complex plane from the obtained singularities; (3) consider the existence of a perfect or quasi-perfect code on the signals constellation and their ability to correct errors; (4) analyze these singularities as vertices of a hyperbolic triangle to identify the genus of the associated surface, through the pairings of the sides of this triangle; (5) verify which channel is associated with the same genus, and thus represent the vertices of the hyperbolic triangle as channel inputs and outputs; (6) analyze the channel associated with the codewords to verify the error probability of the transmitted singularity. Through the results obtained, it can be concluded that singularities with the opposite real part generate perfect and/or quasi-perfect codes with the same ability to correct errors. It was possible to represent the codewords as inputs and outputs of a discrete memoryless channel, showing that the probability of error, p , is related to the number of codewords on the constellation. When considering singularities as vertices of a hyperbolic triangle, a connection was established with the symmetric binary channel $C_{2,2}$, whose inputs and outputs represent pairs of opposite singularities relative to the imaginary axis. The established connections can be applied to error analysis in an information transmission process.

Keywords. Geometrically uniform codes, Fuchsian equations, communication channels.

SINGULARIDADES COMO GENERADORAS DE CONSTELACIONES DE SIGNOS Y TRIÁNGULOS HIPERBÓLICOS

Resumen. En este trabajo se considerarán tres singularidades regulares de ecuaciones diferenciales fuchsianas, una de ellas el infinito, como generadores de constelaciones de señales y como vértices de un polígono hiperbólico, con el fin de establecer una conexión con el análisis de errores en un canal discreto sin memoria y en un código geométricamente uniforme. El procedimiento se basa en los siguientes pasos: dados dos puntos complejos e infinito: (1) considerar estos puntos como singularidades de una ecuación diferencial fuchsiana; (2) generar constelaciones de señales en el plano complejo a partir de las singularidades obtenidas; (3) considerar la existencia de un código perfecto o casi perfecto sobre la constelación de señales y su capacidad de corrección de errores; (4) analizar estas singularidades como vértices de un triángulo hiperbólico para identificar el género de la superficie asociada, a través de los emparejamientos de los lados de este triángulo; (5) comprobar qué canal está asociado al mismo género, y así representar los vértices del triángulo hiperbólico como entradas y salidas del canal; (6) analizar el canal asociado con las palabras de

código para verificar la probabilidad de error de la singularidad transmitida. A través de los resultados obtenidos, se puede concluir que las singularidades con parte real opuesta generan códigos perfectos y/o casi perfectos con la misma capacidad de corrección de errores. Fue posible representar las palabras de código como entradas y salidas de un canal discreto sin memoria, mostrando que la probabilidad de error, p , está relacionada con el número de palabras de código en la constelación. Al considerar las singularidades como vértices de un triángulo hiperbólico, se estableció una conexión con el canal binario simétrico $C_{2,2}$, cuyas entradas y salidas representan los pares de singularidades opuestas con respecto al eje imaginario. Las conexiones establecidas se pueden aplicar al análisis de errores en un proceso de transmisión de información.

Palabras clave. Códigos geométricamente uniformes, ecuaciones Fuchsianas, canales de comunicación.

1 Introdução

A teoria dos códigos corretores de erros, da geometria hiperbólica e das equações diferenciais fuchsianas são áreas em franca expansão e seu estudo permite diversas possibilidades de aplicação, como no processo de transmissão da informação em sistemas de comunicação.

O estudo dos códigos corretores de erros teve sua origem na teoria da informação introduzida por Shannon, conhecido como o “pai da Teoria da Informação e Codificação”, em 1948, no trabalho [1], “A Mathematical Theory of Communication”, cujo principal objetivo é transmitir e armazenar dados de maneira confiável, de modo que ao recuperar uma informação, seja possível detectar e corrigir erros.

Em [2], Forney estuda uma classe de códigos denominada “Códigos Geometricamente Uniformes”, em que o processo de decodificação envolve regiões de decisão, ou a chamada região de Voronoi de um ponto P da constelação de sinais, em um determinado espaço métrico, consiste do conjunto de pontos deste espaço que estão mais próximos de P (na métrica do espaço) do que de qualquer outro ponto da constelação. Em um código geometricamente uniforme, todas as regiões de Voronoi são congruentes, e a decodificação é feita com o auxílio de isometrias aplicadas a uma região de Voronoi conhecida sobre a constelação de sinais.

Em [3], Martínez, C., Beivide, R., Gabidulin, E., propuseram uma subclasse dos códigos geometricamente uniformes, chamada de códigos perfeitos, construídos sobre anéis quociente de inteiros Gaussianos. Sendo assim, pontos complexos geram as constelações de sinais e o código. Uma generalização dos códigos perfeitos derivados de anéis quocientes de inteiros Gaussianos e de inteiros de Eisenstein-Jacobi, chamados de os códigos quase perfeitos, é realizada em [4]. Os códigos quase perfeitos, além de preservarem as propriedades dos códigos geometricamente uniformes, são capazes de corrigir mais padrões de erro do que os códigos perfeitos.

Um outro importante tópico mencionado no início desta seção é relacionado às equações diferenciais fuchsianas. O estudo dessas equações despertou grande interesse na Matemática

na segunda metade do século XIX e início do século XX, proporcionando um grande desenvolvimento na teoria das funções de variáveis complexas. Uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é dita ser uma equação fuchsiana se possuir um número finito de pontos singulares, todos regulares.

Segundo Vaz Jr. [5], o estudo de equações diferenciais fuchsianas é justificado pois várias equações importantes, algumas das quais de segunda ordem, são equações fuchsianas. Além disso, o fato de considerar o plano complexo estendido, e não apenas o plano complexo, facilita o estudo dessas equações e permite apresentar resultados importantes.

As equações fuchsianas possuem algumas propriedades de transformação que facilitam sua análise. As equações hipergeométricas são as mais utilizadas em problemas de Física-Matemática, visto que podem ser obtidas a partir das outras equações fuchsianas, além de apresentar linearidade homogênea.

Além dos códigos geometricamente uniformes e das equações diferenciais fuchsianas, outra área que será analisada neste trabalho é a geometria hiperbólica, um tipo de geometria não-euclidiana que satisfaz os quatro primeiros Postulados da geometria proposta por Euclides, mas não satisfaz o quinto Postulado. Essa geometria surge então da negação do quinto postulado de Euclides. Ao longo dos séculos foram encontrados diversos enunciados equivalentes ao quinto postulado, sendo o mais popular deles feito por John Playfair (1748 – 1819) que afirma que, “Em um plano, por um ponto não pertencente a uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela a reta dada”, que ficou conhecido como Postulado das Paralelas.

No final do século XIX, matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram modelos euclidianos para essa geometria, garantindo a consistência da geometria hiperbólica, pois qualquer eventual contradição a ser encontrada implicaria em uma contradição existente na geometria euclidiana, ou seja, as geometrias hiperbólica e euclidiana tem o mesmo grau de consistência, [6].

Este artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, são apresentadas as principais definições, conceitos e resultados envolvendo constelações de sinais e códigos geometricamente uniformes que podem existir sobre essas constelações; alguns conceitos básicos de geometria hiperbólica onde são descritos os dois modelos mais utilizados: o semiplano superior e o disco de Poincaré; além das equações diferenciais fuchsianas. Na Seção 3, são apresentados os resultados obtidos nesta pesquisa, com as conexões estabelecidas entre as equações diferenciais fuchsianas, a geometria hiperbólica e os códigos geometricamente uniformes, por meio de exemplos. Finalmente, na Seção 4, são apresentadas as considerações finais.

2 Preliminares

Nesta seção serão apresentados os conceitos teóricos fundamentais para a construção deste trabalho. As principais referências utilizadas foram [3], [4], [5], [7] e [8].

2.1 Equações Diferenciais Fuchsianas

Segundo Vaz Jr. [5], uma equação diferencial ordinária (EDO) fuchsiana de segunda ordem com n pontos singulares é da forma:

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0, \quad (1)$$

onde $y''(z)$ e $y'(z)$ correspondem às derivadas de segunda e primeira ordem de y em z , respectivamente, sendo:

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{A_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{A_n}{z - \xi_n}, \\ q(z) &= \frac{B_1}{(z - \xi_1)^2} + \frac{C_1}{z - \xi_1} + \cdots + \frac{B_n}{(z - \xi_n)^2} + \frac{C_n}{z - \xi_n}, \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned} A_1 + \cdots + A_n &= 2, \\ C_1 + \cdots + C_n &= 0, \\ (B_1 + \cdots + B_n) + (\xi_1 C_1 + \cdots + \xi_n C_n) &= 0, \\ (2\xi_1 B_1 + \cdots + 2\xi_n B_n) + (\xi_1^2 C_1 + \cdots + \xi_n^2 C_n) &= 0. \end{aligned}$$

As equações diferenciais fuchsianas possuem como principal característica o fato de todo ponto singular no plano complexo estendido ser regular. Os pontos singulares são aqueles em que $p(z)$ ou $q(z)$ deixam de ser analíticas, ou seja, são os pontos que zeram o denominador da fração e um ponto é singular regular se tanto $(z - z_0)p(z)$ quanto $(z - z_0)^2q(z)$ forem analíticas em z_0 , onde z_0 é uma singularidade.

As equações fuchsianas podem ser classificadas como hipergeométrica, de Tchebychev e de Legendre, sendo esta última quando restrita a três pontos singulares regulares, sendo um deles localizado no infinito.

Pode-se representar essa equação diferencial fuchsiana, com três pontos singulares regulares, por meio do símbolo P-Riemann, que representa um conjunto de soluções da equação. Segundo Oliveira [7], o símbolo P-Riemann apresenta os pontos singulares da equação diferencial fuchsiana e os expoentes da equação indicial na singularidade z_0 , que são obtidos por meio da equação indicial. Ainda de acordo com [7], se z_0 é um ponto singular regular de $y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0$, então a equação indicial para esse ponto é:

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0, \quad (2)$$

onde:

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)p(z),$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 q(z).$$

As raízes da equação indicial são chamadas expoentes (índices) da equação na singularidade z_0 .

Vaz Jr. [5] mostra que a Equação de Riemann é obtida ao relacionar os coeficientes A_i e B_i ($i = 1, 2, 3$) da eq. (2) com os expoentes característicos dos pontos singulares. É importante destacar que, ao buscar soluções $y(z) = (z - z_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, o expoente r satisfaz a equação indicial 2, em que $p_0 = a$ e $q_0 = b$.

É possível reescrever a relação dos coeficientes $A_1 + A_2 + A_3 = 2$, em termos dos expoentes das singularidades:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1, \quad (3)$$

essa equação é denominada *Condição de Riemann*, em que os expoentes do símbolo P-Riemann satisfazem essa equação.

Desta forma, a Equação 1 pode ser reescrita, com:

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - \xi_1} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - \xi_2} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - \xi_3}, \\ q(z) &= \frac{1}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)(z - \xi_3)} \left[\frac{\alpha\alpha'(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}{z - \xi_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta\beta'(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}{z - \xi_2} + \frac{\gamma\gamma'(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{z - \xi_3} \right]. \end{aligned}$$

Essa equação é denominada Equação de Riemann, e os expoentes das singularidades dessa equação são apresentados na forma do símbolo P-Riemann,

$$y = P \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\}.$$

2.2 Códigos Geometricamente Uniformes

Neste trabalho, os códigos geometricamente uniformes serão representados por meio de grafos. Portanto, inicialmente serão apresentadas as definições de grafo, um código sob o grafo e a região de decisão do código.

Para definirmos os grafos apresentados neste artigo será necessário introduzir brevemente o conjunto dos inteiros de Gauss, $\mathbb{Z}[i]$, e o ideal de $\mathbb{Z}[i]$ gerado por α , $\mathbb{Z}[i]_\alpha$.

Dado o corpo de números $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, o anel dos inteiros de \mathbb{K} é $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, chamado *anel dos inteiros de Gauss*.

A norma de $\mathbb{Z}[i]$ é dada pela aplicação $N : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}_+$, definida como $N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha}$, em que $\alpha = a + bi$ e $\bar{\alpha}$ é o conjugado de α , $a - bi$.

Dado \mathbb{K} um corpo de números, $\mathbb{Z}[i]$ o anel de inteiros de \mathbb{K} e $[\alpha]$ o ideal de $\mathbb{Z}[i]$ gerado por α , o anel quociente $\frac{\mathbb{Z}[i]}{[\alpha]}$, denotado por $\mathbb{Z}[i]_\alpha$, possui $N(\alpha) = a^2 + b^2$ elementos.

Definição 1. Um grafo gerado por α , com $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$, é denotado por $G_\alpha = (V, A)$, onde:

- $V = \mathbb{Z}[i]_\alpha$ é o conjunto de vértices e;
- $A = \{(\eta, \tau) \in V \times V \mid D_\alpha(\eta, \tau) = 1\}$, é o conjunto de arestas, em que $D_\alpha(\eta, \tau) = \min\{|x| + |y|\}$, tal que $\tau - \eta \equiv x + yi \pmod{\alpha}$.

Dado um grafo G_α com conjunto de vértices V e distância D_α , um código em G_α é um subconjunto não vazio \mathcal{C} de G_α .

A região de Voronoi, ou região de decisão, V_η , com $\eta \in \mathcal{C}$ é o subconjunto formado pelos elementos de V para os quais η é o ponto mais próximo em \mathcal{C} , ou seja, $V_\eta = \{\tau \in V \mid D_\alpha(\eta, \tau) = D_\alpha(\eta, \mathcal{C})\}$. O raio de cobertura, $t = \max\{D_\alpha(\eta, \mathcal{C})\}$, é o menor número t tal que as bolas de raio t , centradas nos pontos do código \mathcal{C} , dadas por $B_t(\eta) = \{\tau \in V \mid D_\alpha(\eta, \tau) \leq t\}$ cobrem V .

Definição 2. Um conjunto de sinais S definido sobre um espaço métrico (M, d) é um código geometricamente uniforme se, dados s_1 e s_2 em S , existe uma isometria u_{s_1, s_2} que transforma s_1 em s_2 mantendo S invariante, ou seja,

$$u_{s_1, s_2}(s_1) = s_2, u_{s_1, s_2}(S) = S. \quad (4)$$

Assim, S é geometricamente uniforme se a ação do grupo de simetrias $\Gamma(S)$ de S é transitiva. Se S for finito, dizemos que S é uma constelação uniforme, se S for infinito dizemos que S é um arranjo regular. Uma constelação uniforme no espaço euclidiano é um código linear.

Para realizar a decodificação em códigos geometricamente uniformes, não é necessário saber a região de decisão de cada palavra-código, basta saber a região associada a uma dessas palavras-código e, por meio da translação da região dada, as demais palavras-código são determinadas, sendo estas os baricentros das regiões.

2.2.1 Códigos Perfeitos

Um código \mathcal{C} é chamado *perfeito* se as bolas de raio t centradas nas palavras-código de \mathcal{C} particionam o conjunto de pontos V , ou seja, é um código que corrige todos os padrões com até t erros e nenhum padrão com $t + 1$ erros ou mais. Assim, ao receber um ponto da constelação de sinal que está dentro de uma bola de raio t , pode-se detectá-lo como um erro e corrigi-lo para o ponto central da bola, que é um ponto do código. O Teorema 1, a seguir, fornece um procedimento para a obtenção destes conjuntos, no caso do anel dos inteiros de Gauss.

Teorema 1. ([3]) Dado $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ e t um inteiro positivo. Temos que:

1. Se $\beta = t + (t + 1)i$ divide α , então o ideal $S = \langle \beta \rangle \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código perfeito que corrige todos os padrões com até t erros;

2. Se $\bar{\beta} = t - (t + 1)i$ divide α , então o ideal $S = \langle \bar{\beta} \rangle \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código perfeito que corrige todos os padrões com até t erros.

Dado β , a norma $N(\beta) = 2t^2 + 2t + 1$ resulta no número de pontos da região de Voronoi, a qual chamamos de esfera de Lee de raio t , onde cada ponto do grafo é um célula da esfera.

A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em [4].

2.2.2 Códigos Quase-Perfeitos

Um código é dito *quase-perfeito* se é capaz de corrigir todos os padrões com até t erros e alguns padrões com $t + 1$ erros. Este código cobre a constelação de pontos por regiões fundamentais idênticas e mantém as propriedades de um código geometricamente uniforme.

Teorema 2. ([4]) Seja $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Z}[i]$ e t um inteiro positivo. Temos que:

1. Se $\beta = (t - c) + (t + (c + 1))i$ divide α , então o ideal $S = [\beta] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até t erros e $2c^2 + 2c$ padrões com $t + 1$ erros em G_α ;
2. Se $\bar{\beta} = (t - c) - (t + (c + 1))i$ divide α , então o ideal $S = [\bar{\beta}] \subseteq \mathbb{Z}[i]_\alpha$ forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até t erros e $2c^2 + 2c$ padrões com $t + 1$ erros em G_α .

A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em [4].

Ao considerar $c = 0$ é possível observar que os códigos perfeitos podem ser vistos como um caso particular dos códigos quase-perfeitos.

2.3 Geometria Hiperbólica

Neste artigo exploraremos apenas dois modelos para a geometria hiperbólica, conhecidos como *disco de Poincaré* e o *semiplano superior*. Os modelos exercem para a geometria a mesma função que um bom atlas exerce para a geografia: apesar de os mapas apresentarem distorções, estas são quantificáveis e razoavelmente "bem comportadas", de modo que podemos nos situar de forma bastante satisfatória apenas através de nossos mapas. Além disso, de forma análoga ao que acontece com os distintos mapas de um atlas, modelos distintos distorcem ou preservam propriedades distintas. Assim, dependendo da propriedade que desejamos estudar, podemos (tentar) escolher um modelo que preserve tal propriedade ([9]). Existem ainda outros diversos modelos, por exemplo o de Klein e o de Minkowsky.

Definição 3 ([7]). *O semiplano superior \mathbb{H} é o conjunto de números complexos z com parte imaginária positiva, isto é, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. O círculo no infinito ou a fronteira de \mathbb{H} é definido como sendo o conjunto $\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$, ou seja, $\partial\mathbb{H}$ é o eixo real junto com o ponto ∞ .*

Definição 4 ([7]). *O disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ é chamado disco de Poincaré. O círculo $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é chamado círculo no infinito ou fronteira de \mathbb{D} .*

Definição 5. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $ad - bc \neq 0$ e $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uma transformação de Möbius é uma função $\gamma : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ da forma:*

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Como $ad - bc \neq 0$, c e d não podem ser ao mesmo tempo nulos. Se $c \neq 0$, $\gamma(z)$ está definida para todo z tal que $z \neq -\frac{d}{c}$, mas se $c = 0$ temos que $d \neq 0$, e $\gamma = \frac{az+b}{d}$. Assim, a transformação γ está bem definida para todo $z \in \mathbb{C}$. As transformações de Möbius levam círculos ou retas em círculos ou retas.

Dado γ uma transformação de Möbius, pode-se associar à transformação de Möbius uma matriz 2×2 dada por:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longrightarrow [\gamma] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ao associar a transformação de Möbius a uma matriz normalizada, ou seja, $\det(\gamma) = 1$, o traço é definido como a norma da soma dos elementos da diagonal principal, ou seja, se $[\gamma] = \begin{bmatrix} \frac{a}{ad-bc} & \frac{b}{ad-bc} \\ \frac{c}{ad-bc} & \frac{d}{ad-bc} \end{bmatrix}$, então $\text{Tr}([\gamma]) = \left| \frac{a+d}{ad-bc} \right|$.

As transformações de Möbius podem ser classificadas, de acordo com o valor do traço da matriz associada, como:

- transformação elíptica, quando $\text{Tr}([\gamma]) < 2$;
- transformação parabólica, quando $\text{Tr}([\gamma]) = 2$;
- transformação hiperbólica, quando $\text{Tr}([\gamma]) > 2$.

Definição 6 ([7]). *Um grafo G' é dito mergulhado em uma superfície ω quando quaisquer dois de seus ramos não se cruzam, a não ser em um vértice. O complemento de G' em ω é chamado de região. Uma região homeomorfa (equivalência topológica) a um disco aberto é chamada 2-células; se a região toda é uma 2-células, o mergulho é dito ser um mergulho 2-células.*

Definição 7. *Um grafo completo biparticionado com m e n vértices, denotado por $K_{m,n}$, é um grafo consistindo de dois conjuntos distintos de vértices com m e n vértices, onde cada vértice de um conjunto está conectado através de arestas a todo vértice do outro conjunto.*

O grafo G' tem um mergulho 2-células em uma superfície de gênero g , tal que g pertence ao intervalo $g_{\min} \leq g \leq g_{\max}$, da seguinte forma:

(i) O gênero mínimo de uma superfície compacta orientada é:

$$g_{min}(K_{m,n}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\}, \quad \text{para } m, n \geq 2,$$

em que $\{a\}$ é o menor inteiro maior ou igual a a .

(ii) O gênero máximo de uma superfície compacta orientada é:

$$g_{max}(K_{m,n}) = \left[\frac{(m-1)(n-1)}{2} \right] \quad \text{para } m, n \geq 2,$$

em que $[a]$ é o maior inteiro menor ou igual a a .

2.4 Canais de Comunicação

Definição 8. Um canal discreto sem memória (DMC) é um canal com entradas e saídas discretas, dadas respectivamente por X e Y . A entrada representa os símbolos transmitidos e a saída os símbolos recebidos. Para um canal DMC a entrada X assume os valores binários 0 e 1, enquanto que a saída Y assume valores inteiros de 0 a $M - 1$. As probabilidades de transição são dadas por $P(Y = y|X = x)$. As probabilidades de transição devem satisfazer que $\sum Y P(Y = y|X = x) = 1$. Além das probabilidades de transição, são também conhecidas as probabilidades de transmissão $P(X = x)$, onde $\sum X P(X = x) = 1$. Este canal é denominado sem memória, pois o símbolo transmitido no instante i não depende dos símbolos transmitidos nos instantes anteriores.

Definição 9. Um canal binário simétrico (BSC) possui entradas e saídas que são variáveis binárias discretas. Trata-se de um caso particular de um canal DMC (canal discreto sem memória).

A probabilidade de acerto e erro são dadas respectivamente por:

$$P(y = 0|x = 0) = P(y = 1, x = 1) = 1 - p,$$

$$P(y = 0|x = 1) = P(y = 1|x = 0) = p.$$

Esse canal é denominado simétrico, pois as probabilidades de acerto, ou de erro, independem do símbolo transmitido.

3 Resultados Obtidos

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos neste trabalho. Três pontos do plano complexo, dentre eles o infinito, serão inicialmente vistos como singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, e posteriormente analisados como geradores de uma constelação de sinais, a fim de analisar a capacidade de correção de erro sobre a constelação. Por outro caminho,

as singularidades serão vistas como vértices de triângulos hiperbólicos, nos quais é realizada a análise do gênero associado, obtendo a superfície associada e consequentemente o canal associado. Por fim, será analisada a probabilidade de erro do canal.

3.1 Equações Diferenciais Fuchsianas

Considere, por exemplo, os pontos singulares regulares $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ . A partir dessas singularidades pode-se identificar a curva algébrica associada, da seguinte forma, onde a e b representam as singularidades $8 + 9i$ e $-8 + 9i$, respectivamente.

$$\begin{aligned} y^2 &= (z - a)(z - b) = (z - 8 - 9i)(z + 8 - 9i) = \\ &= z^2 + 8z - 9iz - 8z - 64 + 72i - 9iz - 72i - 81 = z^2 - 18iz - 145. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se a seguinte equação diferencial fuchsiana:

$$\begin{aligned} y'' + \left[\frac{A_1}{(z - (8 + 9i))} + \frac{A_2}{(z - (-8 + 9i))} + K_1 \right] y' + \left[\frac{B_1}{(z - (8 + 9i))^2} + \right. \\ \left. + \frac{B_2}{(z - (-8 + 9i))^2} + \frac{C_1}{(z - (8 + 9i))} + \frac{C_2}{(z - (-8 + 9i))} + K_2 \right] y = 0. \end{aligned}$$

Da Seção (2.1), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ (B_1 + B_2) + ((8 + 9i)C_1 + (-8 + 9i)C_2) = 0 \\ (2(8 + 9i)B_1 + 2(-8 + 9i)B_2) + ((8 + 9i)^2C_1 + (-8 + 9i)^2C_2) = 0. \end{cases}$$

Uma das possíveis soluções do sistema obtido é:

$$\begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} y'' + \left(\frac{A_2(z - 8 - 9i) + k_1(z^2 - 18iz + 145)}{z^2 - 18iz - 145} \right) y' + K_2 y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' + \left(\frac{2z - 16 - 18i}{z^2 - 18iz - 145} + K_1 \right) y' + K_2 y = 0 \Rightarrow \\ (z^2 - 18iz - 145)y'' + [2z - 18i - 16 + K_1(z^2 - 18iz - 145)]y' + [K_2(z^2 - 18iz - 145)]y = 0. \end{aligned}$$

Assim, a partir das singularidades $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ e usando as condições necessárias para que a equação seja fuchsiana, tem-se:

$$(z^2 - 18iz - 145)y'' + [2z - 18i - 16 + K_1(z^2 - 18iz - 145)]y' + [K_2(z^2 - 18iz - 145)]y = 0,$$

onde $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.

Pode-se representar essa equação diferencial fuchsiana por meio do símbolo P-Riemann, que representa um conjunto de soluções da equação, apresentado a seguir:

$$y = P \left\{ \begin{array}{cccc} 8 + 9i & -8 + 9i & \infty & \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & K_2 & \end{array} \right\}.$$

3.2 Singularidades vistas como geradoras de constelações de sinais

Considere os pontos $8 + 9i$ e $-8 + 9i$, anteriormente vistos como singularidades, agora como os geradores de uma constelação de sinais.

Considerando $\alpha = 8 + 9i$, os elementos do anel quociente são:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[i]_{8+9i} = \{ & 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, i, 2i, 3i, 4i, 5i, 6i, 7i, 8i, - \\ & i, -2i, -3i, -4i, -5i, -6i, -7i, -8i, 1+i, 1+2i, 1+3i, 1+4i, 1+5i, 1+6i, 1 \\ & +7i, 1-i, 1-2i, 1-3i, 1-4i, 1-5i, 1-6i, 1-7i, -1+i, -1+2i, -1+ \\ & 3i, -1+4i, -1+5i, -1+6i, -1+7i, -1-i, -1-2i, -1-3i, -1-4i, -1- \\ & 5i, -1-6i, -1-7i, 2+i, 2+2i, 2+3i, 2+4i, 2+5i, 2+6i, 2-i, 2-2i, 2- \\ & 3i, 2-4i, 2-5i, 2-6i, -2+i, -2+2i, -2+3i, -2+4i, -2+5i, -2+6i, - \\ & 2-i, -2-2i, -2-3i, -2-4i, -2-5i, -2-6i, 3+i, 3+2i, 3+3i, 3+4i, \\ & 3+5i, 3-i, 3-2i, 3-3i, 3-4i, 3-5i, -3+i, -3+2i, -3+3i, -3+4i, - \\ & 3+5i, -3-i, -3-2i, -3-3i, -3-4i, -3-5i, 4+i, 4+2i, 4+3i, 4+4i, \\ & 4-i, 4-2i, 4-3i, 4-4i, -4+i, -4+2i, -4+3i, -4+4i, -4-i, -4-2i, \\ & -4-3i, -4-4i, 5+i, 5+2i, 5+3i, 5-i, 5-2i, 5-3i, -5+i, -5+2i, - \\ & 5+3i, -5-i, -5-2i, -5-3i, 6+i, 6+2i, 6-i, 6-2i, -6+i, -6+2i, - \\ & 6-i, -6-2i, 7+i, 7-i, -7+i, -7-i \}, \end{aligned}$$

contendo $N(\alpha) = 145$ elementos.

Se $\alpha = -8 + 9i$, os mesmos elementos do anel quociente são obtidos, ou seja, $\mathbb{Z}[i]_{8+9i} = \mathbb{Z}[i]_{-8+9i}$. Como o conjunto de vértices é dado por $V = \mathbb{Z}[i]_\alpha$, o grafo gerado por $8 + 9i$ e o grafo gerado por $-8 + 9i$ possuem os mesmos vértices.

Para obter β , de forma que satisfaça o Teorema 2 considera-se a norma de α , $N(\alpha) = 145$, e

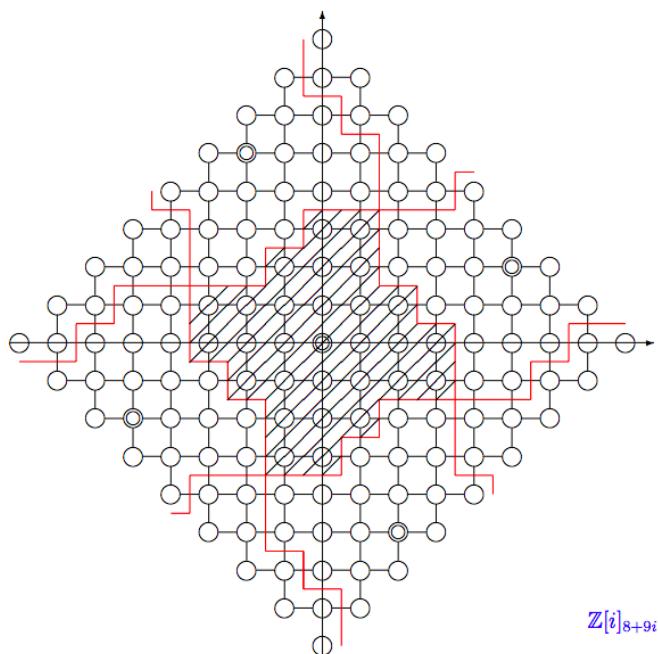
seus divisores, 5 e 29. Assim os divisores de α em $\mathbb{Z}[i]_{8+9i}$ possuem norma 5 e/ou 29. Os únicos elementos em $\mathbb{Z}[i]$ com norma 5 são: $1 + 2i, 1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i$, e com norma 29 são: $2 + 5i, 2 - 5i, -2 + 5i, -2 - 5i$. Observe que $\beta = \{1 + 2i, 1 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i\}$ não gera um código quase perfeito, nem $\beta = \{2 + 5i, -2 - 5i\}$, mas $\beta = \{2 - 5i, -2 + 5i\}$ geram, segundo o Teorema 2.

Agora, se $\beta = -2 + 5i$, $N(\beta) = 29$, e a maior esfera de Lee contida em 29 pontos possui 25 pontos com raio de cobertura 3. Nesse caso, como $t = 1$, teria uma esfera de Lee com 5 pontos com raio de cobertura 1, e 24 padrões com 2 erros, o que é um absurdo, visto que não há 24 pontos com distância 2 que equidistem um ponto nessa constelação. Sendo assim, $\bar{\beta} = 2 - 5i$ é o único divisor de α que gera um código quase perfeito.

Dado $\alpha = 8 + 9i$, é possível reescrever α como $8 + 9i = (2 - 5i)(-1 + 2i)$. Logo, pelo Teorema 2, o ideal gerado por $\beta = 2 - 5i$, forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até 3 erros e $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ padrões com $t + 1 = 4$ erros em G_{8+9i} . A norma de $\bar{\beta}$ é 29 e a maior esfera de Lee contida em 29 pontos possui 25 pontos com raio de cobertura $t = 3$, os 4 padrões com 4 erros completam a região de Voronoi com 29 pontos.

O ideal gerado por $\beta = 2 - 5i$ é $\langle \bar{\beta} \rangle = \{0, 2 - 5i, 5 + 2i, -2 + 5i, -5 - 2i\}$, e é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 29 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 145 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{8+9i}$, veja a Figura 1.

Figura 1: Código quase perfeito sobre $\mathbb{Z}[i]_{8+9i}$.



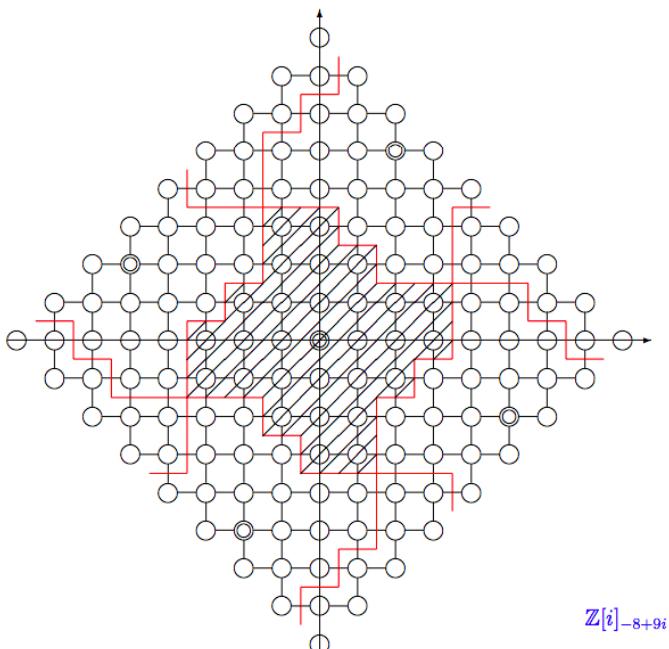
Fonte: [4].

Dado $\alpha = -8 + 9i$, é possível reescrever α como $-8 + 9i = (2 + 5i)(1 + 2i)$. Logo, pelo

Teorema 2, o ideal gerado por $\beta = 2 + 5i$, forma um código quase perfeito que corrige todos os padrões com até 3 erros e $2c^2 + 2c = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ padrões com $t + 1 = 4$ erros em G_{-8+9i} . A norma de β é 29 e a maior esfera de Lee contida em 29 pontos possui 25 pontos com raio de cobertura $t = 3$, os 4 padrões com 4 erros completam a região de Voronoi com 29 pontos.

O ideal gerado por β , $S = \langle \beta \rangle = \{0, 2 + 5i, 5 - 2i, -2 - 5i, -5 + 2i\}$, é identificado no grafo a seguir pelos pontos que estão duplamente circulados, formando os baricentros dos 5 polígonos fundamentais, com 29 elementos, que recobrem a constelação de sinais, contendo 145 elementos de $\mathbb{Z}[i]_{-8+9i}$ (Figura 2).

Figura 2: Código quase perfeito sobre $\mathbb{Z}[i]_{-8+9i}$.



Fonte: Autor.

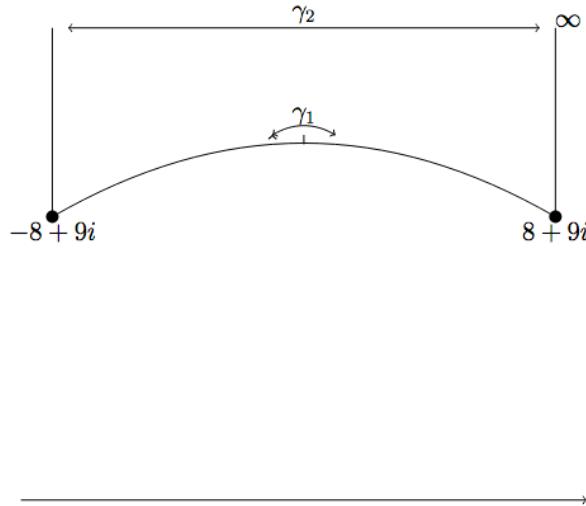
3.3 Singularidades vistas como vértices de um triângulo hiperbólico

Agora, considere $8 + 9i$, $-8 + 9i$ e ∞ como vértices de um polígono hiperbólico, ou seja, as singularidades são vistas como vértices de um triângulo hiperbólico no semiplano superior e as transformações de Möbius (transformações de emparelhamentos), que podem ser aplicadas aos lados desse polígono. A partir das transformações de Möbius será identificada a superfície associada ao triângulo hiperbólico.

A Figura 3 apresenta a representação das singularidades $8+9i$, $-8+9i$ e ∞ como vértices de um triângulo hiperbólico e as possíveis transformações que podem ser aplicadas a esse polígono.

Neste caso, uma transformação elíptica γ_1 que leva o ponto $8 + 9i$ no ponto $-8 + 9i$ e o ponto $-8 + 9i$ no ponto $8 + 9i$ e fixa o ponto médio da geodésica conectando esses dois vértices,

Figura 3: Singularidades
 $\{-8 + 9i, 8 + 9i \text{ e } \infty\}$ como vértices de um
 triângulo hiperbólico.



Fonte: Autor.

e a transformação parabólica γ_2 que leva ∞ em ∞ e $8 + 9i$ em $-8 + 9i$ e vice-versa.

De fato, dado $\gamma_1(z) = -z + 18i$, $\gamma_1(8 + 9i) = -8 + 9i$ e $\gamma_1(-8 + 9i) = 8 + 9i$, tem-se:

$$\gamma_1(z) = \frac{(-1)z + 18i}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_1] = \begin{bmatrix} -1 & 18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por definição, $Tr(\gamma_1) = |(-1) + 1| = 0$. Logo, a transformação γ_1 é elíptica.

E, dado $\gamma_2(z) = z + a$ com $a \in \mathbb{C}$, $\gamma_2(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z + a = \infty$, temos

$$\gamma_2(z) = \frac{1z + a}{0z + 1} \longrightarrow [\gamma_2] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(\gamma_2) = |1 + 1| = 2.$$

Logo, a transformação γ_2 é parabólica.

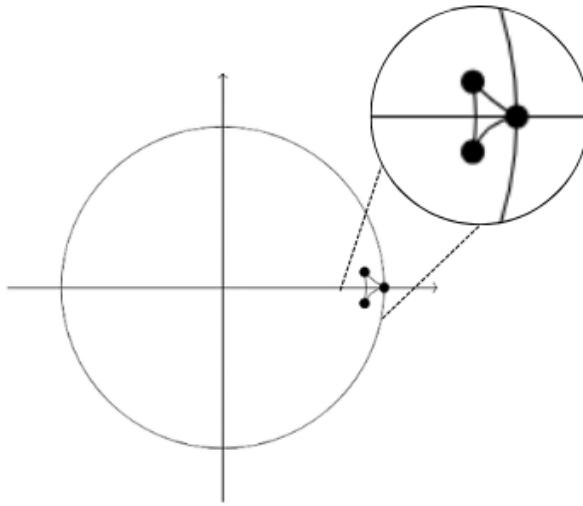
Além da representação das singularidades no modelo do semiplano superior, é possível representar as mesmas no modelo do disco de Poincaré, por meio da transformação de Cayley $\bar{z} = \frac{z-i}{z+i}$, que leva os elementos do semiplano superior para o disco de Poincaré, conforme Figura 4.

- para $z = 8 + 9i \Rightarrow \bar{z} = \frac{8+9i-i}{8+9i+i} = \frac{8+8i}{8+10i} = \frac{1}{41}(36 - 4i)$;
- para $z = -8 + 9i \Rightarrow \bar{z} = \frac{-8+9i-i}{-8+9i+i} = \frac{-8+8i}{-8+10i} = \frac{1}{41}(36 + 4i)$;
- para $z = \infty \Rightarrow \bar{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+i}{z-i} = 1$.

Aplicando a transformação inversa $z = -i \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$:

- para $\bar{z} = \frac{1}{41}(36 - 4i) \Rightarrow z = -i \frac{\frac{36-4i}{41} + 1}{\frac{36-4i}{41} - 1} = 8 + 9i$;
- para $\bar{z} = \frac{1}{41}(36 + 4i) \Rightarrow z = -i \frac{\frac{36+4i}{41} + 1}{\frac{36+4i}{41} - 1} = -8 + 9i$;
- para $\bar{z} = 1 \Rightarrow z = \infty$.

Figura 4: Representação do triângulo no disco de Poincaré.



Fonte: Autor.

4 Conexão com canais de comunicação

Além das conexões estabelecidas e apresentadas anteriormente, será apresentada a seguir, por meio da superfície associada aos triângulos hiperbólicos, uma conexão com o canal binário simétrico.

De acordo com [8], a esfera está associada ao triângulo hiperbólico, e também ao canal binário simétrico $C_{2,2}$, um canal com duas entradas e duas saídas. E os gêneros mínimo e máximo associados ao canal $C_{2,2}$, representados pelo grafo $K_{2,2}$, são dados por:

$$g_{min}(K_{2,2}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\} = \left\{ \frac{(2-2)(2-2)}{4} \right\} = 0 = 0,$$

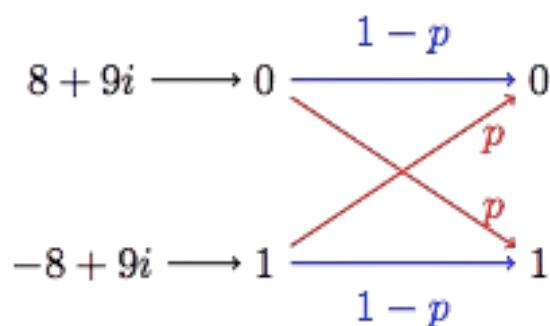
e,

$$g_{max}(K_{2,2}) = \left[\frac{(m-1)(n-1)}{2} \right] = \left[\frac{(2-1)(2-1)}{2} \right] = \left[\frac{1}{2} \right] = 0.$$

Como, $g_{min} = g_{max}$, $g = 0$, ou seja, o canal está associado a uma esfera.

Considere as singularidades $8 + 9i$, $-8 + 9i$ como as entradas e saídas do canal $C_{2,2}$, sendo representadas respectivamente pelas entradas binárias 0 e 1, conforme Figura 5.

Figura 5: Grafo associado às singularidades $8 + 9i$ e $-8 + 9i$.



Fonte: Autor.

Considerando que as palavras-código do código geometricamente uniforme possuem a mesma probabilidade de erro e são finitas, pode-se representá-las como entradas e saídas de um canal discreto e posteriormente apresentar a probabilidade do código cometer um erro.

Sendo assim, quando as palavras-código são representadas como entradas e saídas desse canal, percebe-se que a probabilidade de erro, p , está relacionada ao número de palavras-código sobre a constelação.

Segundo [4], em um código geometricamente uniforme a probabilidade de erro é a mesma para todas as palavras-código, consideremos a probabilidade erro p , então, no nosso caso, a probabilidade de acerto será $1 - 4p$. Tem-se que esse erro acontecerá sempre que a mensagem recebida estiver fora da região de Voronoi do sinal enviado.

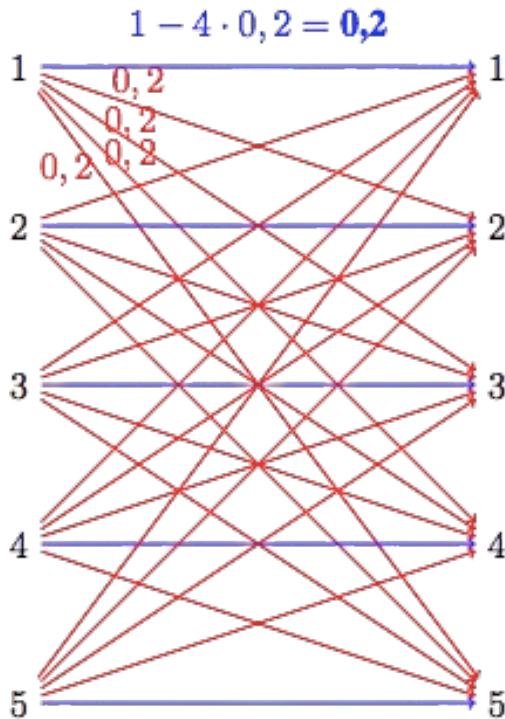
Nas constelações geradas por $\alpha = 8 + 9i$ e $\alpha = -8 + 9i$, a probabilidade de um erro acontecer é:

$$p = P(E) = \frac{n(E)}{n(\omega)} = \frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}.$$

$$p = P(E) = \frac{5}{25} = 0,2.$$

Dado $p = 0,2$, pode-se representar o canal discreto sem memória associado aos códigos quase perfeitos, conforme Figura 6.

Figura 6: Grafo associado as palavras-código com probabilidade de erro p definida.



Fonte: Autor.

5 Considerações Finais

Singularidades com a parte real oposta geram códigos perfeitos e/ou quase perfeitos com a mesma capacidade de correção de erros. Além disso, ao considerar pontos simétricos em relação ao eixo imaginário para a geração da constelação de sinais, obtém-se constelações formadas pelos pontos conjugados. Nas situações analisadas neste trabalho, foram obtidas constelações de sinais iguais, pois os pontos e seus conjugados pertencem ao anel quociente. O código perfeito sobre a constelação também é formado pelos pontos conjugados.

Além disso, ao manter um padrão nos números complexos, onde o módulo da parte real é módulo da parte imaginária menos 1, percebe-se um padrão também na estrutura da constelação, facilitando a representação geométrica.

Ao considerar as singularidades como vértices de um triângulo hiperbólico, foi estabelecida uma conexão com o canal binário simétrico $C_{2,2}$, cuja entradas e saídas representam as singularidades $8+9i$ e $-8+9i$. Portanto, tem-se que a probabilidade de erro, p , é a mesma independente da singularidade transmitida.

Por fim, foi possível representar as palavras-código como entradas e saídas de um único

canal discreto sem memória, visto que o conjunto de palavras-código \mathcal{C} é finito. E, com isso, percebe-se que a probabilidade de erro, p , está relacionada ao número de palavras-código sobre a constelação.

Com os resultados obtidos neste trabalho, pode-se perceber que áreas muitas vezes consideradas distantes e sem conexão podem estar relacionadas, estabelecendo importantes paralelos e possibilidades de utilização em aplicações de problemas práticos, como por exemplo o processo de transmissão da informação em um sistema de comunicação e a análise dos erros que podem ocorrer durante a transmissão da informação e as possibilidades de detecção e correção dos mesmos, por meio dos códigos corretores de erros. As possibilidades, muitas vezes restritas, tornam-se mais amplas com a utilização dos elementos e conexões elencados neste trabalho.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não há conflitos de interesse.

Agradecimentos

À Universidade Federal de Alfenas e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro e à CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

As obras submetidas ao jornal BEJOM estão sujeitas à licença [CC BY 4.0](#). Sob esta licença, os autores concedem aos leitores o direito de compartilhar, adaptar e utilizar as obras, inclusive para fins comerciais, desde que o crédito apropriado seja dado aos autores. Quaisquer modificações devem ser indicadas. Não há restrições adicionais além das estabelecidas pela licença.

Referências

- [1] Shannon, C. E. A Mathematical Theory of Communication. Em: *The Bell System Technical Journal* 27 (1948), pp. 379–423. DOI: [10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x).

-
- [2] Forney, G. D. Geometrically Uniform Codes. Em: *IEEE Transactions on Information Theory* 37 (1991), pp. 1241–1260. DOI: 10.1109/18.133243.
 - [3] Martinez, C., Beivide, R. e Gabidulin, E. Perfect Codes for Metrics Induced by Circulant Graphs. Em: *IEEE Transactions on Information Theory* 53 (2007), pp. 3042–3052. DOI: 10.1109/TIT.2007.903126.
 - [4] Queiroz, C. R. O. Q. Códigos geometricamente uniformes derivados de grafos sobre anéis quocientes de inteiros e de ordens dos quatérnios. Ph.D. Thesis. Campinas, SP, 2011.
 - [5] Vaz, J. M. e Oliveira, E. C. Métodos Matemáticos. 1^a ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2016. ISBN: 978-8-52-681341-0.
 - [6] Walkden, C. Hyperbolic Geometry. Manchester: Manchester University, 2012.
 - [7] Oliveira, A. J. Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação. Ph.D. Thesis. Campinas, SP, 2017.
 - [8] Oliveira, A. J. e Palazzo Junior, R. Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem. Em: *Computational and Applied Mathematics* 37 (2018), pp. 2218–2236. DOI: 10.1007/S40314-017-0446-9.
 - [9] Firer, M. Grupos fuchsianos. Em: *UNICAMP, Notas de Aulas* (2001).
-

Corresponding Author:

Mariana Gabriela Gusmão, mariana.gusmao@unifal-mg.edu.br

Submitted: June 5, 2024

Accepted: December 2, 2024

Published: April 30, 2025

<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index>
