BEJOM

Brazilian Electronic Journal of Mathematics. 2025, v.6: e73678

https://doi.org/10.14393/BEJOM-v6-2025-73678

ISSN: 26751313 (online edition)

Educação Matemática

FRACTAIS NA NATUREZA E MODELAGEM MATEMÁTICA:

possíveis implicações para o ensino e aprendizagem de Matemática

Alan dos Santos Sousa
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Formação de Professores, BA, Brazil.
E-mail: alansantos@aluno.ufrb.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3880-8529

Zulma Elizabete de Freitas Madruga
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Formação de Professores, BA, Brazil.
E-mail: betemadruga@ufrb.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-1674-0479

Mathematics Subject Classification (MSC): 97M99, 00A71, 28A80.

Resumo. Este artigo trata sobre fractais na natureza, apresentando um relato de experiência que teve como objetivo construir modelos de fractais inspirados na natureza, verificando as possibilidades de utilização no ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, por meio dos procedimentos da Modelagem Matemática. Aborda-se os fractais com foco na botânica, e suas principais características, como a autossimilaridade, utilizada como base para caracterizar um fractal natural. Apresenta-se o conceito de Modelagem Matemática e as relações desta tendência com os fractais, que serviu de referência para a organização e desenvolvimento da análise dos dados. A metodologia está fundamentada nas características de investigação qualitativa e nas fases da Modelagem Matemática. A análise dos dados obtidos durante a pesquisa, teve foco no processo de modelagem e na construção do modelo no software GeoGebra, por meio de categorias elencadas a priori, em consonância com a teoria que embasa a pesquisa. Os resultados mostraram que o modelo construído pode ser classificado como físico de analogia, e que, embora não tenha preservado a característica de autossimilaridade dos fractais, é possível de ser desenvolvido na Educação Básica, e pode colaborar com o ensino e aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave. Ensino de matemática, fractais, modelagem matemática.

FRACTALS IN NATURE AND MATHEMATICAL MODELLING:

possible implications for teaching and learning Mathematics

Abstract. This article deals with fractals in nature, presenting an experience report that aimed to build fractal models inspired by nature, verifying the possibilities of use in teaching and learning Mathematics in Basic Education, through Mathematical Modelling procedures. Fractals are approached with a focus on botany, and their main characteristics, such as self-similarity, used as a basis to characterize a natural fractal. The concept of Mathematical Modelling and the relationship between this trend and fractals are presented, which served as a reference for the organization and development of data analysis. The methodology is based on the characteristics of qualitative research and the phases of Mathematical Modelling. The analysis of the data obtained during the research focused on the modeling process and the construction of the model in the GeoGebra software, through categories listed a priori, in line with the theory that underpins the research. The results showed that the constructed model can be classified as a physical analogy, and that, although it has not preserved the self-similarity characteristic of fractals, it is possible to be developed in Basic Education, and can collaborate with the teaching and learning of Mathematics.

Keywords. Teaching mathematics, fractals, mathematical modelling.

FRACTALES EN LA NATURALEZA Y MODELIZACIÓN MATEMÁTICA:

posibles implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

Resumen. Este artículo aborda los fractales en la naturaleza, presentando un relato de experiencia que tuvo como objetivo construir modelos fractales, inspirados en la naturaleza, verificando las posibilidades de uso en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Básica. Se analizan los fractales, centrándose en la botánica, cuyas características principales, como la autosemejanza, se utilizan como base para caracterizar un fractal natural. También se presenta el concepto de Modelación Matemática, las percepciones de algunos autores y la relación entre esta tendencia y los fractales, que sirvieron de referencia para la organización y desarrollo del análisis de datos. La metodología se basa en las características de la investigación cualitativa en educación y las fases de Modelación Matemática, además de la investigación exploratoria y el análisis documental como base para la producción de datos. El análisis de los datos obtenidos durante la investigación se centró en el proceso de modelación y construcción del modelo en el software GeoGebra, a través de categorías enumeradas a priori, en línea con la teoría que sustenta la investigación. Los resultados mostraron que el modelo construido puede clasificarse como una analogía física, y que, si bien no ha conservado la autosimilitud característica de los fractales, es posible desarrollarlo en la Educación Básica, y puede colaborar con la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas.

Palabras clave. Enseñanza de matemáticas, fractales, modelación matemática.

1 Introdução

A natureza é bela, rica em diversidade e pode ser estudada e relacionada com diversas áreas do conhecimento. Os fractais, por exemplo, indicam possibilidades de ensino, tendo como base as relações entre a Matemática e a Natureza. Observando com atenção, é frequente no cotidiano as pessoas perceberem a presença de fractais, como por exemplo, nas nuvens, nas bactérias, no corpo humano, nas montanhas, ou seja, na natureza em geral.

No sentido etimológico da palavra, fractal significa "quebrar", "irregular". Segundo Sonza e Leivas (2018, pp. 3), "O termo fractal se originou do latim fractus, referindo-se a irregular ou quebrado e do verbo em latim correspondente frangere que significa quebrar, criar fragmentos irregulares". Disso, destaca-se a ideia de irregularidade, pode-se pensar nos fractais inicialmente como objetos irregulares, que é possível quebrar, dividir em várias partes, e que cada uma dessas partes de alguma forma, se assemelham ao objeto como todo.

No ensino de Matemática devem ser utilizados diversos recursos metodológicos, sendo essencial para a formação do estudante compreendê-la relacionando com sua realidade. Para isso, os fractais podem promover discussões importantes na Educação Básica e na formação professores de Matemática. Pois, percebe-se a presença dos fractais no campo da Educação Matemática, especificamente relacionando-o com a Modelagem Matemática. Esta, que pode ser observada em documentos importantes, que orientam a Educação Básica, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC aborda a ideia de "utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas" (Brasil, 2018, pp. 531). Além disso, "[..] utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos" (Brasil, 2018, pp. 531).

No ensino e aprendizagem de Matemática, o modelo elaborado no processo de modelar deve vir da realidade (Bassanezi, 2010). Nesse sentido, pode-se dizer que fractais são modelos que podem ser abordados nas aulas de Matemática, se relacionados com a realidade. Os fractais são figuras geométricas que apresentam padrões, segundo Lisboa (2019, pp. 50), "fractal é uma linguagem matemática que vem sendo cada vez mais usada para descrever fenômenos da natureza, padrões e para auxiliar no ensino de diversos conteúdos matemáticos".

Nesse sentido, o estudo dos fractais atrelado à Modelagem Matemática pode contribuir para o desenvolvimento de competências da BNCC na Educação Básica, e, consequentemente, no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos como geometria, álgebra, progressões, entre outros. Ademais, pode relacionar a Matemática com a natureza, e com outras áreas do conhecimento.

Investigações como as de Reis (2014), Ferreira Filho (2015), Sonza e Leivas (2018), Leivas e Bettin (2018) e Araújo e Marins (2019), têm como foco perceber como os fractais naturais podem ser identificados na natureza, suas classificações, destacando a característica da autossimilaridade e apontando alternativas para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Diante disso, apresenta-se o relato de uma experiência, oriunda de um Trabalho de Conclusão de Curso, que investigou "como a construção de modelos de fractais inspirados na natureza, podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, utilizando-se dos procedimentos da Modelagem Matemática?" Para responder esse questionamento, teve-se como objetivo construir modelos de fractais inspirados na natureza, verificando as possibilidades de utilização no ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, por meio dos procedimentos da Modelagem Matemática.

2 Os fractais e a Modelagem Matemática

Os fractais se caracterizam pela irregularidade de suas formas, um objeto que pode ser quebrado e suas partes preservam traços do objeto original. Não existe uma única definição para os fractais, mas, algumas concepções convergem para as mesmas características, suficientes para identifica-los. “Ele é um objeto que mantém suas formas mesmo alterando a escala sob a qual ele é analisado, ou seja, pode-se ampliar ou reduzir centenas de vezes um fractal que irá se perceber a preservação das características originais” (Sonza; Leivas, 2018, pp. 3).

A autossimilaridade destaca-se como a principal característica dos fractais, e pode ser classificada em autossemelhança exata, que é quando as partes do objeto fractal é idêntica ao todo, ainda que ampliado inúmeras vezes; e a autossemelhança aproximada ou estatística, onde as partes não são iguais ao objeto original, apenas semelhante (Capra, 1996 apud Nascimento, Silva e Maciel (2012)).

Nesse artigo abordam-se os fractais enfatizando-se uma parte específica da natureza: a botânica, em especial as plantas - árvores. O que engloba parte do “verde” da natureza. Diante disso, ressalta-se a autossimilaridade aproximada, pois suas características se adequam aos fractais naturais, ou seja, os fractais encontrados na natureza, como nas árvores, raios, plantas, corpo humano, entre outros. De acordo com Leivas e Bettin (2018, pp. 2) “pode-se perceber, em elementos da natureza, que existe uma autossemelhança aproximada”. Para Frinhani *et al.* (2015, pp. 6),

> [...] os fractais podem ser explorados no desenvolvimento de várias áreas da ciência e que abordam diversos conteúdos da matemática; como por exemplo, na álgebra, na geometria, no cálculo, na modelagem matemática e nos números complexos. Tendo sempre o propósito de despertar o interesse dos educandos, pelas formas, cores e luminosidade.

A Modelagem Matemática (MM) está dentre as áreas que podem ser relacionadas com os fractais. Essa relação é o interesse principal dessa pesquisa, pois ao pensar no ensino e na aprendizagem de Matemática, considera-se que o estudo dos fractais à luz da MM desenvolvidos em sala de aula, podem contribuir com esse processo, além de tornarem as aulas mais atrativas e despertar o interesse dos estudantes.

Segundo Biembengut (2016), a MM pode ser considerada como um processo de pesquisa, que envolve a obtenção de um modelo. Com caraterísticas similares a essa ideia, Bassanezi (2010, pp. 21) concebe a MM como,

> [...] um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Esse processo é munido de algumas fases, essenciais para o desenvolvimento desse método.

Diante disso, para os procedimentos da MM, Biembengut (2016) os divide em três fases: percepção e apreensão; compreensão e explicitação e; significação e expressão. A primeira fase, percepção e apreensão, está relacionada a ideia de descobrir informações, enxergar dados, distinguir eventos referente a alguma situação-problema, fenômeno ou tema em questão, e compreendê-los.

Na fase de compreensão e explicitação, são classificadas as informações e os dados obtidos a partir da fase anterior, no intuito de chegar a um conjunto de expressões, fórmulas que conduzam a solução ou dedução de uma solução, ou seja, que a MM proporcione formular algum tipo de modelo.

Na terceira fase, significação e expressão, é onde ocorre a validação ou não do modelo formulado na fase anterior. De certa forma, precisa ser análogo à realidade de acordo com os aspectos que interessa a pesquisa, e assim atender à necessidade que o gerou. Nesse sentido, o modelo será validado se conseguir expressar a situação-problema de maneira que seja possível entender, prever, influenciar, saber e agir sobre ele.

No que tange aos modelos produzidos durante o processo de MM, Biembengut (2012) afirma que estes podem ser classificados em dois grupos: Modelos Físicos e Modelos Simbólicos. O grupo dos modelos físicos é subdividido em modelos de escala, que tem o papel de representar objetos reais ou imaginários, conservando as propriedades e características do objeto original; e os modelos de analogia, que tem a função de representar simbolicamente objetos reais ou imaginários. Já os modelos simbólicos abrangem os modelos teóricos que muitas vezes é evidenciado por intermédio de relações matemáticas, e os modelos filosóficos que exibem critérios, estimativas, implicações sobre alguma proposição, tese ou questão.

A MM deve estar relacionada com situações da realidade, a partir daí, pode-se considerar objetos da natureza para interpretá-los por meio da construção de modelos. Dessa forma, os fractais na natureza podem ser estudados a partir dessa perspectiva.

3 Percurso metodológico

Esta pesquisa é de cunho qualitativo, pois preocupa-se com significado e contexto real dos dados produzidos diante do processo de investigação. Segundo Bogdan e Biklen (2010), nesse método de pesquisa “os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas”.

Nessa pesquisa, o investigador foi o instrumento principal, e os dados foram produzidos em seu ambiente natural, por meio de fotografias na região onde reside. Além disso, o interesse foi analisar o processo, desde a escolha do modelo, perpassando pela elaboração deste no software Geogebra. Os investigadores analisaram as características das plantas selecionadas para análise, envolvidas em determinada situação de investigação e buscaram encontrar padrões, no intuito de explorar as suas possíveis influências para o objeto de estudo em questão.

Adotou-se o modelo de pesquisa exploratória, para isso, tomou-se como base, as fases da

MM descritas por Biembengut (2016), em consonância com Bassanezi (2010). Na fase de percepção e apreensão, se deu a escolha do tema: fractais na natureza. Nessa fase, foi possível perceber ideias, obter informações, dados, o reconhecimento da situação estudada. Esse processo foi realizado tanto por meio de buscas na literatura (teses, dissertações, monografias, artigos, revistas, etc.), como a partir de buscas na natureza, por objetos que seriam possíveis fractais.

Na busca por fractais naturais, adotou-se a fotografia como ferramenta para registros de árvores, plantas ou vegetais. Nessa perspectiva, pelo fato do primeiro autor dessa pesquisa residir no campo, este foi o local onde os registros foram feitos, região localizada no córrego, zona rural pertencente ao município de Mutuípe - BA. A ferramenta utilizada para fotografar os fractais na natureza foi o celular do primeiro autor. Nesse processo, foram registradas diversas plantas e árvores que aparentavam se caracterizar como fractais naturais, e assim, a partir desses dados e da percepção das ideias envolvidas, buscou-se obter o conhecimento do objeto que seria modelado.

Na fase de compreensão e explicitação, foi feita análise dos dados e das informações obtidas na fase anterior, a partir da observação dos objetos na natureza e dos registros fotográficos produzidos, com o objetivo de classifica-los. Bem como perceber se satisfaziam as condições necessárias para que fossem representados como fractais. Isso refere-se à formulação da situação a ser estudada, na busca pela solução ou a dedução de uma solução, ou seja, nessa fase buscou-se formular e resolver um modelo (Biembengut, 2016).

Na fase de significação e expressão, validou-se o modelo construído no GeoGebra[1] que representou o fractal natural escolhido para ser modelado. Verificou-se que o modelo condiz com a definição de fractal e, aproxima-se dos aspectos que interessam à pesquisa e a situação-problema apresentada. Constatou-se que o modelo possui características de um objeto fractal, além de representar a árvore escolhida, preservando as suas propriedades e características. Assim, categorizando-se como um modelo físico, inicialmente pensando-se em produzir um modelo de escala.

4 Análise e discussão dos resultados

Apresenta-se aqui o desenvolvimento do modelo juntamente com a análise dos dados. Para isso, foram elencadas categorias a priori com base na MM: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; significação e expressão (Biembengut, 2016).

[1]GeoGebra é um aplicativo computacional livre de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Ele permite construir e manipular objetos matemáticos, proporcionando que as produções matemáticas ocorram de forma dinâmica e interativa. Pode ser instalado em computadores ou celulares, ou utilizado de maneira online. Disponível em https://www.geogebra.org/. Acesso em 08 de jul. 2024.

4.1 Percepção e Apreensão

Após o aprofundamento teórico sobre o tema, percebeu-se a necessidade de delimitar o foco das buscas na literatura, tendo em vista o vasto campo que se dispõe ao se tratar da natureza de modo geral. Após esse processo de apreensão e delimitação da situação a ser estudada, partiu-se para produção de dados, por meio de registros fotográficos de plantas, árvores e vegetais que aparentemente se caracterizavam como fractal natural. Sabe-se que nem todos os objetos na natureza podem ser classificados fractais. Sonza e Leivas (2018) afirmam que na natureza é possível perceber objetos que apresentam autossimilaridade, especificamente, a autossimilaridade aproximada.

Partindo disso, percebeu-se que algumas das fotografias tiradas durante o processo de produção de dados, não poderiam ser utilizadas, pois não apresentarem as características que denunciam um fractal natural. Em outras, percebeu-se a autossimilaridade como característica presente, tornando-se assim, fractais naturais possíveis de serem analisados nesta pesquisa.

Após análise das fotografias, parte delas apresentavam alto grau de complexidade para serem reproduzidas como possíveis modelos de fractais. Como a intenção era serem construídos modelos no software GeoGebra, essa ideia foi descartada pela dificuldade da construção, esse foi o caso das Samambaias, por exemplo. Dessa forma, para essa pesquisa foi escolhida a árvore apresentada na Figura 1.

Figura 1: Matataúba.

Fonte: Os autores (2023).

Esse registro fotográfico foi realizado em uma região de pastagem, próxima à casa do primeiro autor. Como já destacado, esta árvore foi caracterizada como fractal, por assumir a autossimilaridade aproximada como característica. As árvores são formadas por sucessivas ramificações, pode-se perceber que cada parte analisada de maneira segregada, se assemelha a árvore como todo, como se fosse uma “miniárvore”. Tomando base a autossimilaridade, foi possível perceber que as ramificações da Matataúba apresentam um mesmo formato de uma parte maior da árvore, como se fosse miniaturas do objeto original. Dessa forma, a Matataúba foi escolhida como objeto fractal a ser modelado.

A partir dos conhecimentos adquiridos por meio do convívio com a botânica da região, constatou-se que a árvore fotografada se tratava de uma espécie conhecida popularmente na região como Matataúba. Ao buscar informações sobre esta árvore a partir do nome popular, percebeu-se que ela é conhecida por outros nomes como, Mandioqueira, Morototó, Parapará, Marupá-uba-falso, mas cientificamente se trata da Schefflera Morototoni, árvore nativa da América do Sul.

A Matataúba é considerada uma árvore de grande porte, podendo chegar a 30m de altura, seus troncos cilíndricos e retos medem de 60cm a 90cm de diâmetro. Sua madeira esbranquiçada, com tonalidade acinzentada pode ser usada em aduelas, aglomerado, brinquedos, cabo de vassoura, entre outros. As ramificações concentradas no ápice da árvore em formato de guarda-chuva e os galhos a mostra, foram aspectos que influenciaram a escolha dessa árvore para a construção do modelo.

4.2 Compreensão e Explicitação ? Construção do modelo no Geogebra

Para a construção do modelo foi utilizado o software Geogebra. Além de ter acesso livre, é possível utilizar variáveis, pontos, vetores, derivar e integrar funções, há comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função, por exemplo. Além de permitir a construção de polígonos, representar mediatriz, bissetriz, reflexão, rotação, ângulos, equidistância, relação arcos, hipérbole, parábola, inclinação, entre outros, permitindo também o trabalho em 3D. Com isso, o programa reúne as ferramentas de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo.

A seguir, apresenta-se um passo a passo da construção do modelo da Matataúba, realizado pelo autor no Geogebra.

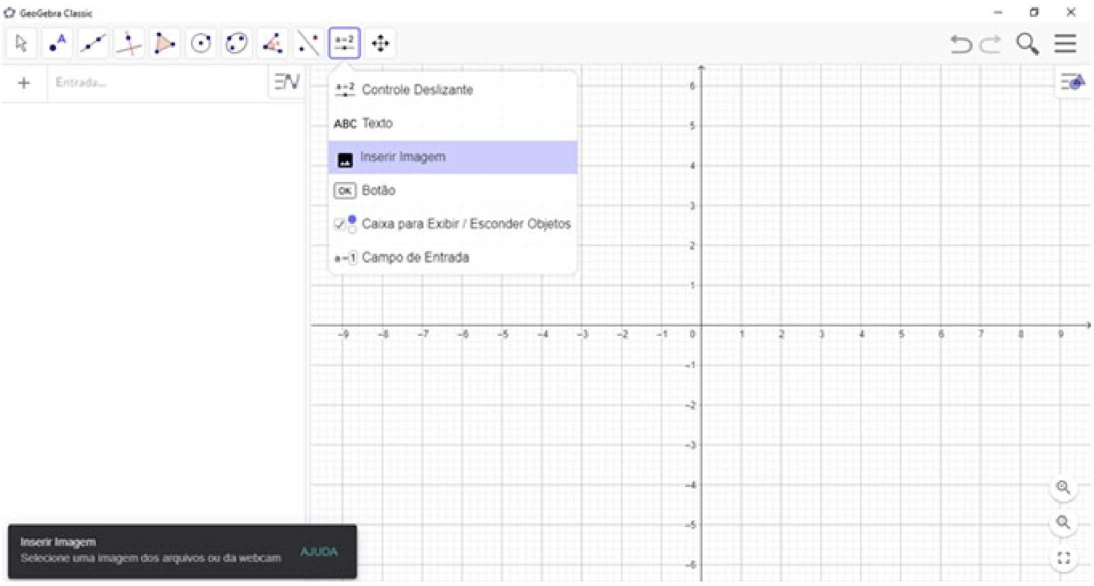
Passo 1: Fazer Upload da Imagem.

No programa ou aplicativo GeoGebra, selecione a ferramenta “controle deslizante” clique na opção “inserir imagem”, depois em “navegador”, e por fim, selecione a imagem salva na pasta em seu dispositivo, conforme Figura 2.

Passo 2: Fixar imagem e transparência.

Clique com o botão direito do mouse em cima da figura escolhida e logo após, clique em

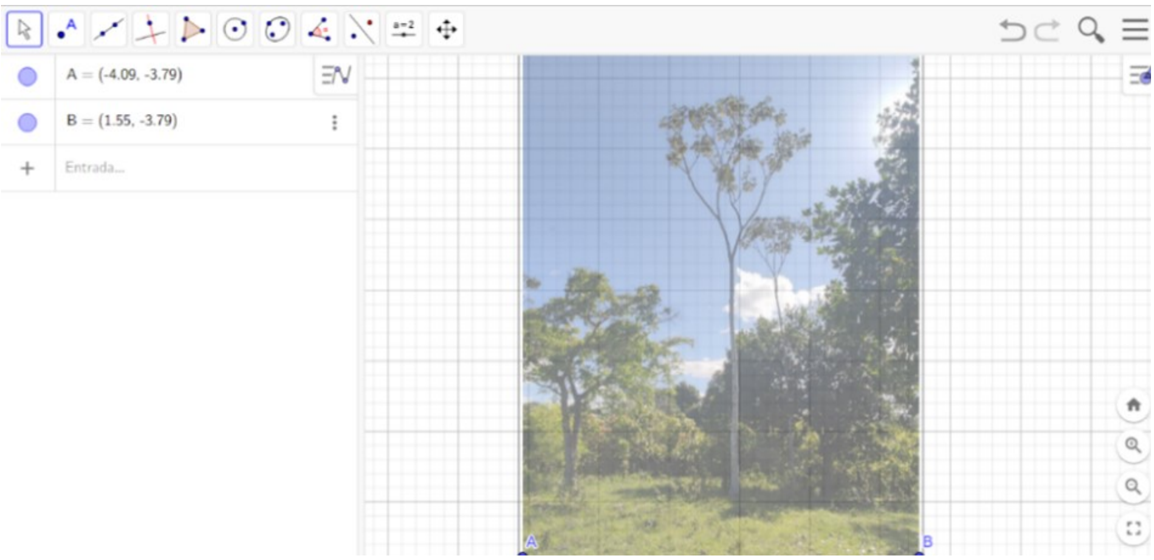
Figura 2: Inserir imagem.



Fonte: Os autores (2023).

configurações. Na coluna à direita selecione a opção “fixar objeto”. Por fim, clique na opção cor, e mova o controle deslizante da transparência. A Figura 3 mostra o modelo após esses dois passos.

Figura 3: Imagem da árvore inserida no GeoGebra.



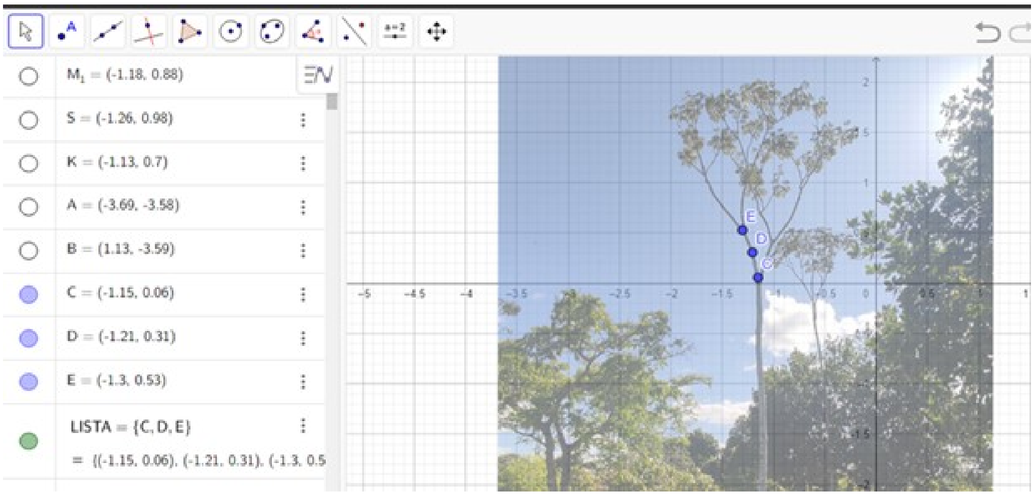
Fonte: Os autores (2023).

Passo 3: Lista de pontos.

Com a ferramenta “ponto” marque três pontos (C, D e E) sobre algum traço da imagem.

Logo após, na área algébrica, crie uma lista de pontos: para indicar a lista de pontos todas as letras devem estar em caixa alta. Exemplos (LL, LL1, ... ou LISTA, LISTA1, ...). Seguida do símbolo de igualdade “=” e símbolo de chaves “{}”, conforme Figura 4.

Figura 4: Lista de pontos.

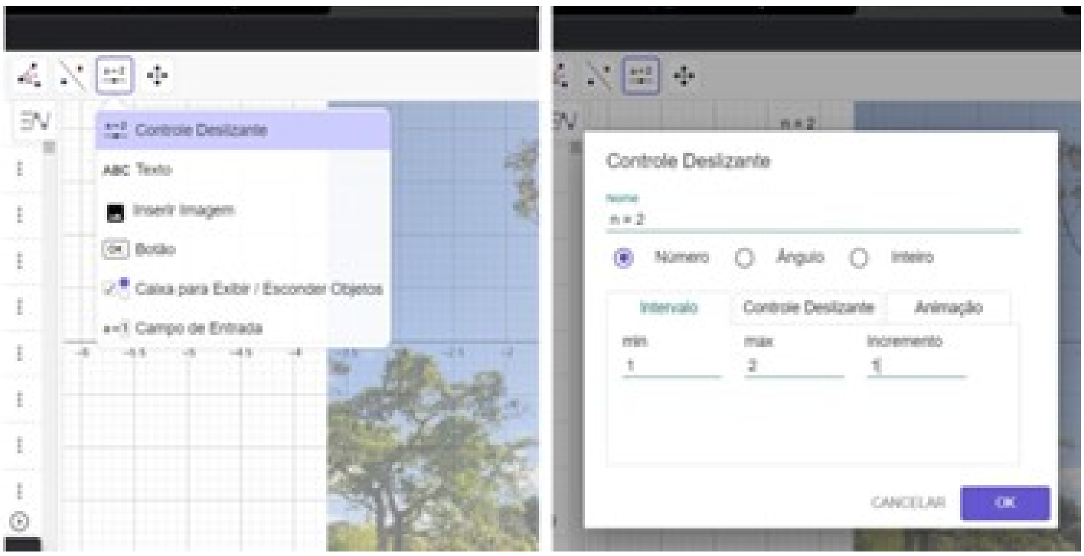


Fonte: Os autores (2023).

Passo 4: Grau do polinômio.

Clique na ferramenta “controle deslizante”. Clique em qualquer parte da área gráfica, onde aparecerá a opção “controle deslizante”. Após trocar “a=1” por “n=2”; “-5” por “1”, “5” por “2” e; incremento = 1. Veja na Figura 5.

Figura 5: Controle deslizante.



Fonte: Os autores (2023).

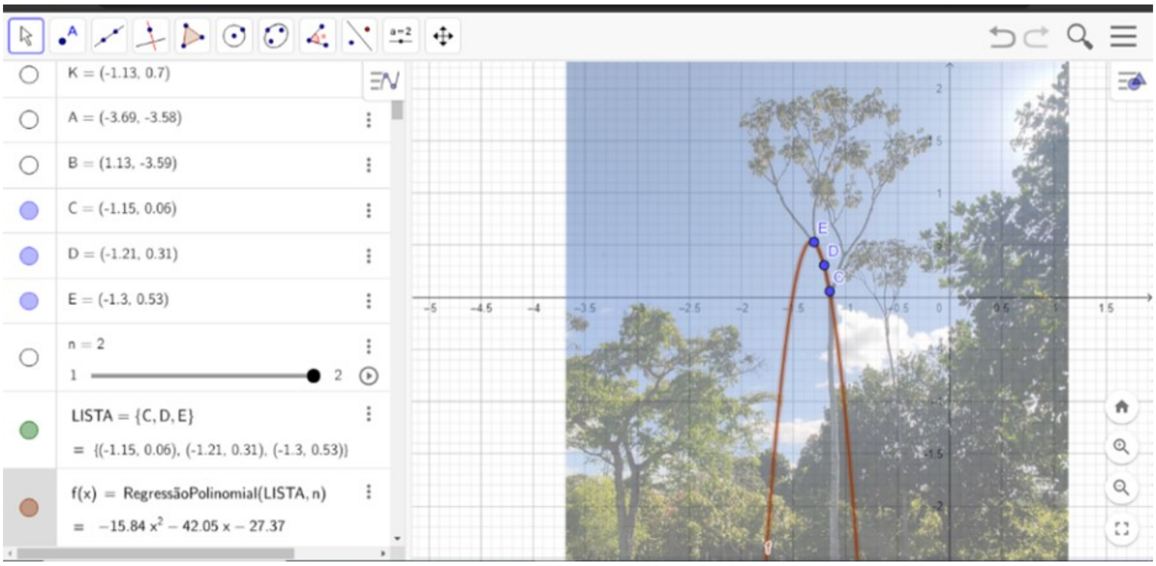
O grau do polinômio deve ser um grau menor do que os pontos na “Lista de Pontos”. Ou seja, tem-se três pontos (C, D e E), então, o grau do polinômio deve ser no máximo, n=2. Você pode deixar no grau que melhor lhe atender.

Passo 5: Regressão Polinomial[2]. (OBS: criou-se a regressão polinomial para poder encontrar a função polinomial correspondente)

Na área algébrica, escreva "reg", e o GeoGebra dará a opção da "Regressão Polinomial", que dispõe a opção específica "Regressão Polinomial (Lista de Pontos, Grau do Polinômio)". Selecione essa opção.

Após clicar na opção "Regressão Polinomial (Lista de Pontos, Grau do Polinômio)" escreva o nome da "LISTA" no espaço destinado a Lista de Pontos e "n" no espaço destinado ao Grau do Polinômio. Em seguida aperte a tecla "Enter" do teclado. Veja na Figura 6.

Figura 6: Regressão Polinomial.



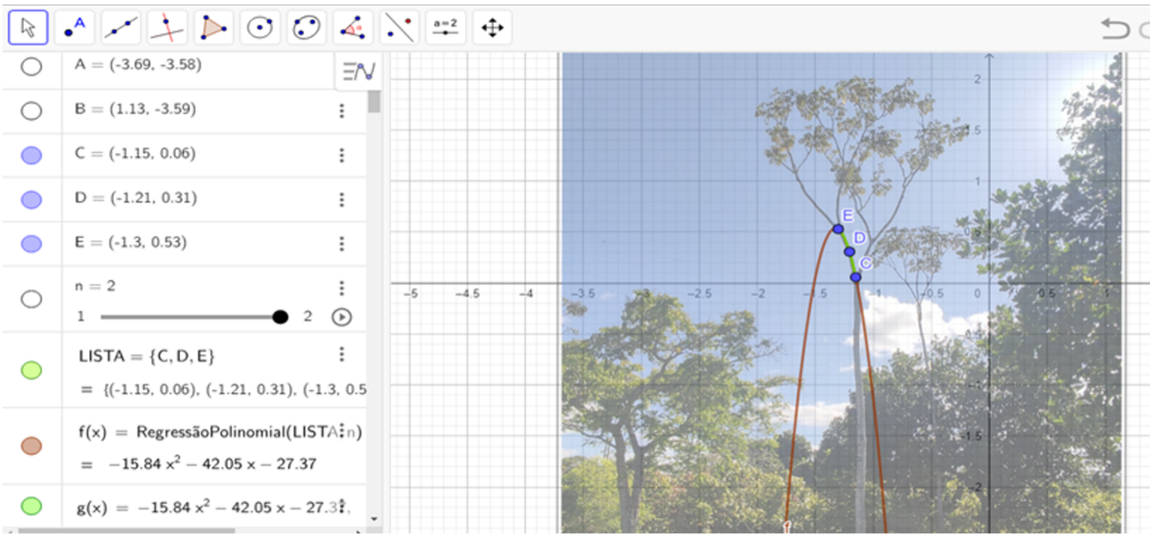
Fonte: Os autores (2023).

Passo 6: Função Polinomial.

Após a realização do passo anterior, será encontrada uma função. Na área algébrica deve-se digitar a função encontrada com objetivo de criar uma função polinomial correspondente, com "nome" diferente, mas com os coeficientes e grau iguais. Em seguida é preciso delimitar o "x" dos pontos extremos que querem demarcar. Por exemplo, o "x" do ponto c e o "x" do ponto E. Conforme Figura 7.

[2]Regressão Polinomial é uma técnica estatística utilizada para modelar a relação entre uma variável independente e uma variável dependente em um formato de curva polinomial.

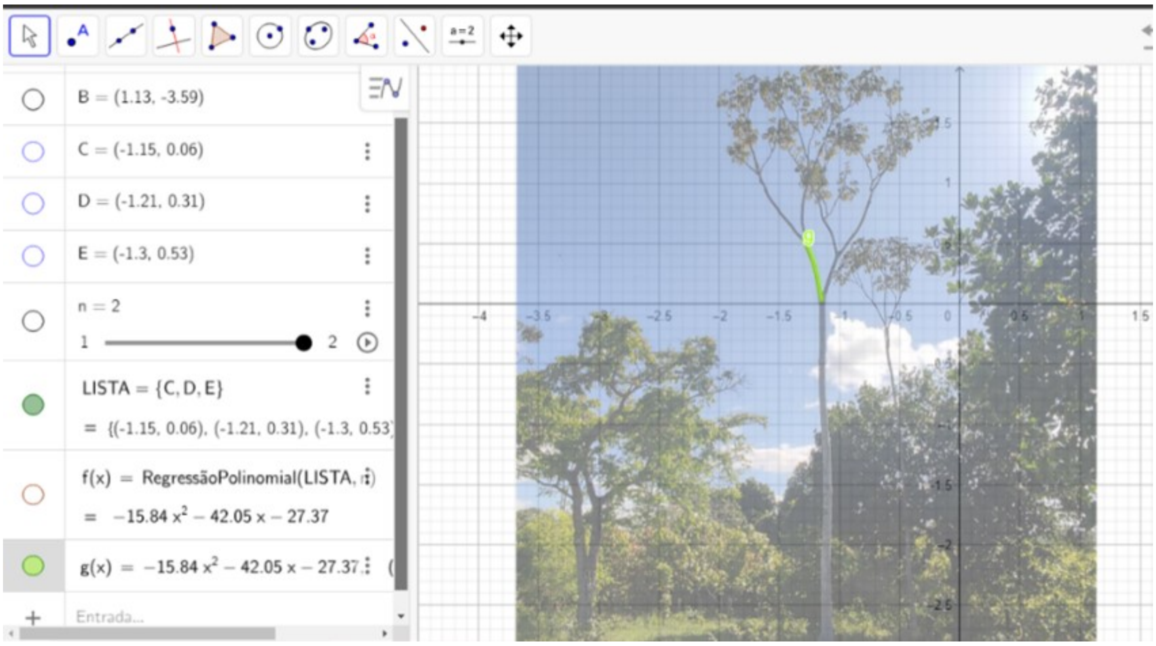
Figura 7: Gráficos das funções f(x) e g(x).



Fonte: Os autores (2023).

A nova função polinomial deve se assemelhar ao traço da imagem que se deseja “cobrir” a partir dessa delimitação. Observe na Figura 8 a função $g(x) = -15.84x^2 - 42.05x - 27.37$, $-1,3 \leq x \leq -1,15$ destacada agora em cor verde.

Figura 8: Função g(x) delimitada.



Fonte: Os autores (2023).

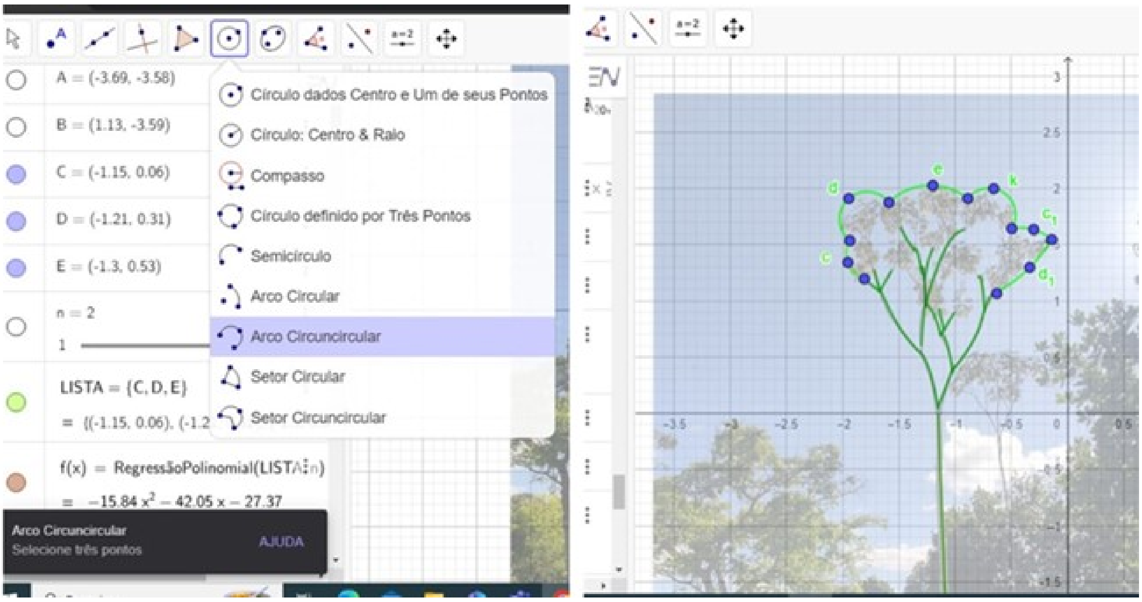
Seguindo esses mesmos passos, criou-se novas listas de pontos, novos graus de polinômios, regressões polinomiais e por consequência novas funções polinomiais juntamente com suas delimitações. Nesse sentido, as delimitações "cobriram" os principais traços da árvore (principalmente os galhos) restando apenas o formato superior da árvore, que foi contornado com o passo seguinte.

Passo 7:

Clique na ferramenta "arco cincuncircular" selecione três pontos para construir um arco de circunferência no formato superior da árvore, especificamente nas folhas.

A Figura 9 destaca as ferramentas e o modelo após aplicação dos arcos de circunferência na parte superior.

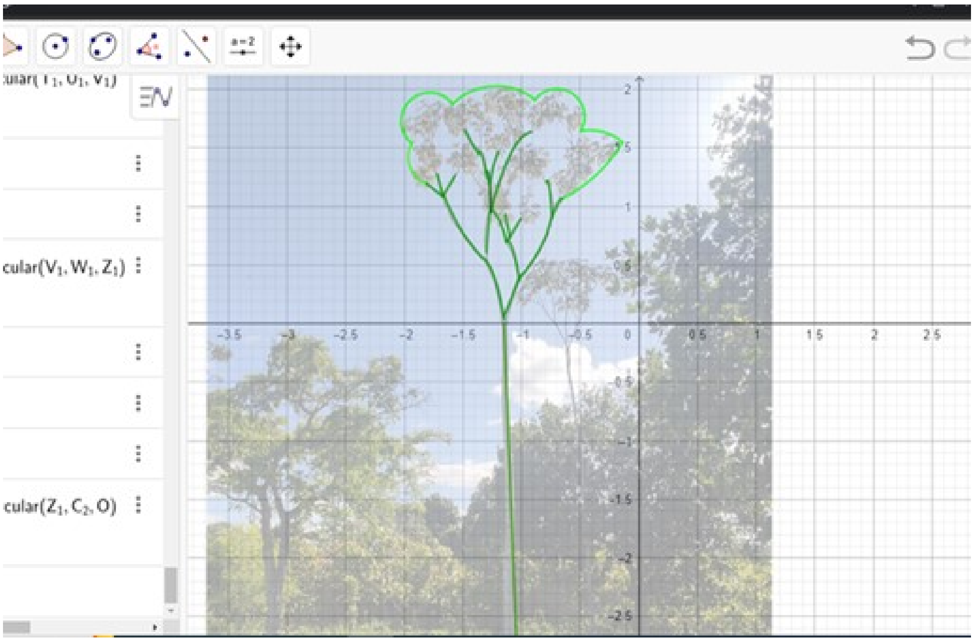
Figura 9: Aplicação dos arcos da circunferência.



Fonte: Os autores (2023).

Após o processo de construção seguindo os passos descritos anteriormente e algumas modificações referentes à personalização, o modelo ficou na forma apresentada na Figura 10.

Figura 10: Modelo no GeoGebra.



Fonte: Os autores (2023).

A análise deste modelo, os conteúdos que podem ser desenvolvidos a partir dele, é apresentado na seção seguinte. É importante destacar que o processo de construção do modelo foi inteiramente a cargo dos autores desta pesquisa.

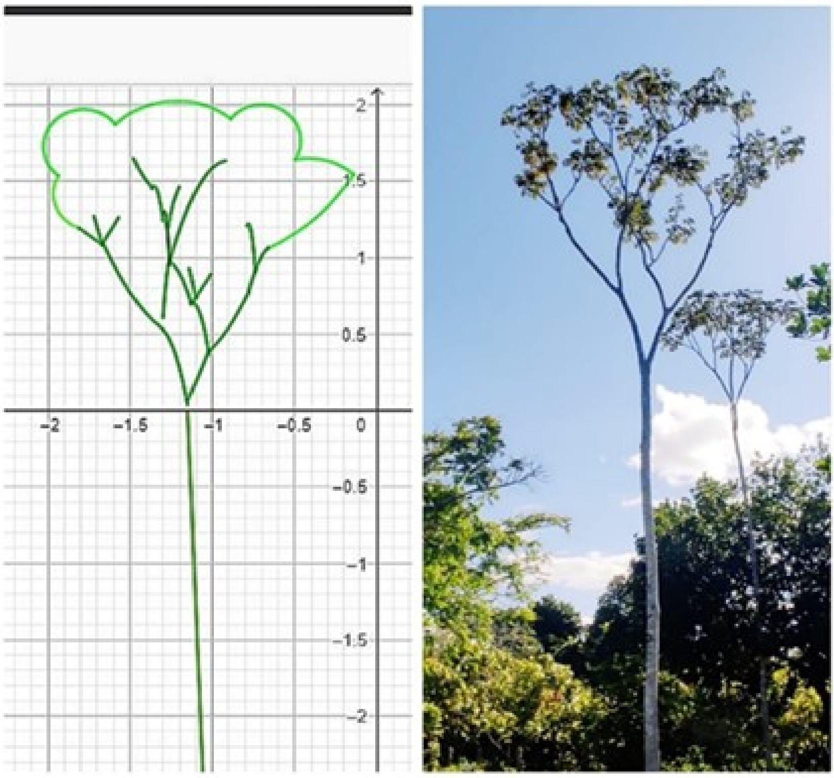
4.3 Significação e Expressão

Nesta fase, se deu o processo de avaliação e validação do modelo construído a partir da fase anterior, perpassando pela socialização dos resultados como forma de expressão. “Um modelo precisa ser semelhante à realidade sob os aspectos que interessam à pesquisa em curso e, assim, atender às necessidades que o geraram” (Biembengut, 2016, pp. 109). Nesse sentido, tomou-se como base esses aspectos para o processo de avaliação do modelo, foi possível perceber que ele se assemelha a árvore fractal modelada, mas não preserva os aspectos que interessam a esta pesquisa, como por exemplo a autossimilaridade.

Nesse processo de validação, analisou-se os aspectos relativos à solução da situação-problema e os efeitos significativos do modelo, e percebeu-se que ele expressa conteúdos matemáticos envolvidos em sua construção, mas não mantém as características de um fractal.

A Figura 11, apresenta o modelo construído e árvore escolhida para ser modelada.

Figura 11: Modelo e árvore modelada.



Fonte: Os autores (2023).

Diante disso, quando o modelo não é válido, Biembengut (2016) afirma que é necessário retornar a fase de compreensão e explicitação com objetivo de ajustar as hipótese/pressupostos e variáveis, alterar o modelo e re(avaliar) um ou mais de seus fundamentos.

Esse processo pode ser repetido uma ou mais vezes para que o modelo se torne condizente com a situação-problema em questão. Nesse sentido, nada garante a validade de um determinado modelo, na primeira tentativa de modelagem, e no caso desta pesquisa foi o que ocorreu, mas nada impede que ele seja validado posteriormente por meio do processo de re(avaliação) destacado.

Embora o fractal não tenha sido representado com suas características básicas, pode-se inferir a partir da análise dos dados que isso não inviabiliza seu desenvolvimento na Educação Básica, e que pode contribuir com o ensino e aprendizagem de Matemática. Por exemplo, no caso do modelo construído nesta pesquisa, este pode ser desenvolvido em turmas do 1º ano do Ensino Médio, abordando os conteúdos de função afim e função quadrática, explorando os conceitos de gráficos, como se apresentam a forma desses gráficos, concavidade da parábola, função crescente e função decrescente, zero da função, ou seja, muitos conceitos envolvendo funções polinomiais do primeiro e segundo grau, tendo como vantagem a dinamicidade e precisão do software GeoGebra, podendo instigar o interesse dos estudantes, tendo em vista a beleza visual e a tecnologia como atrativos, para uma geração de estudantes cada vez mais conectados e adaptados a esse universo tecnológico.

Ainda sobre o conteúdo de funções, no que tange as delimitações, a representação gráfica em um certo intervalo utilizados no processo de construção do modelo, podem auxiliar no ensino do conteúdo que envolve esses aspectos. Além disso, o trabalho com os arcos de circunferências, podem favorecer o ensino da Geometria.

Destaca-se que os fractais são potenciais para relacionar com outros conteúdos que não foram discutidos nessa pesquisa, a exemplo de contagem, perímetros, áreas, volumes, relações entre figuras geométricas, estudo entre relações de grandezas, funções exponenciais, funções logarítmicas, sequências, progressão aritmética e geométrica, entre outros. Tendo em vista a necessidade de buscar novas metodologias para favorecer o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, os fractais de uma maneira geral, e especificamente este modelo fractal, pode ser utilizado como ferramenta nesse processo.

5 Considerações finais

Este artigo relatou uma experiência que teve como objetivo construir modelos de fractais inspirados na natureza, verificando as possibilidades de utilização no ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, por meio dos procedimentos da Modelagem Matemática. Pode-se constatar que este objetivo foi alcançado, de maneira diferente do esperado, o modelo foi construído dispondo de possibilidades que podem favorecer o processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, isso fica evidente no que foi discutido e apresentado anteriormente, representando um modelo físico de analogia, e não de escala, como esperado.

Este texto mostra que as características dos fractais e as ideias envolvidas neste conceito, podem ser relacionadas com diversas áreas da Matemática, onde campos como a Álgebra e a Geometria foram evidenciados por meio dos conteúdos envolvidos na construção do modelo no GeoGebra.

Espera-se que este relato ajude a divulgar a potencialidade dos fractais na natureza como auxílio para o ensino da Matemática na Educação Básica. Diante disso, levando em consideração os aspectos que envolvem os fractais, a beleza das suas formas, as ferramentas utilizadas para construção do modelo, atrelados à tecnologia como subsídio para o seu desenvolvimento, os fractais na natureza podem contribuir para a desmistificação do pensamento de que a Matemática é apenas cálculos e fórmulas, mas que pode ser relacionada com a natureza, com o meio e com o contexto dos estudantes.

Nesse sentido, cabe ao professor alternar entre diversas metodologias e estratégias de ensino, no intuito de contemplar o maior número possível de estudantes, tendo em vista que cada indivíduo tem uma identidade própria e se identifica com metodologias distintas. Isso perpassa pela formação do docente, pois é necessário entender que nesse processo, o estudante deve assumir papel ativo na construção da sua aprendizagem tendo apoio na mediação do professor.

Assim como toda metodologia de ensino, existem vantagens e limitações para seu desenvolvimento em sala de aula. Nesse caso as limitações podem estar relacionadas com a falta de ferramentas para utilização do GeoGebra. Muitas escolas não oferecem uma estrutura adequada para o trabalho com atividades que envolvem tecnologia. Nesse sentido o uso da tecnologia assume duas vertentes: a vantagem de poder estimular o interesse dos estudantes por meio de algo que está ligado ao contexto do mundo atual; e a desvantagem que tange a falta de estrutura para o desenvolvimento de atividades desse tipo. Essa limitação pode ser minimizada utilizando o aplicativo do GeoGebra na versão para celular, visto que a maioria dos estudantes possuem aparelhos nos quais o aplicativo pode funcionar normalmente.

Diante das reflexões, análise dos resultados, considerando vantagens e desvantagens apresentadas neste artigo, pode-se afirmar que esta proposta apresenta possibilidades e potencialidades. Pois, a pesquisa é também um processo de superação, amadurecimento de ideias, e contínua busca por novos conhecimentos. Espera-se que esse artigo possa inspirar outras investigações e, consequentemente, contribuir para o estímulo de reflexões e ações relacionadas aos fractais na natureza sob o olhar da Modelagem Matemática, no intuito de favorecer o ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Conflitos de Interesse

Os autores declaram que não têm conflitos de interesse.

Financiamento

Este trabalho foi realizado sem apoio financeiro.

Aprovação do Comitê de Ética

Não se aplica.

Licença

Referências

ARAÚJO, F. G. S.; MARINS, A. S. Introduzindo a geometria fractal no Ensino Médio por meio da perspectiva de modelagem matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 6, n. 18, p. 21–34, 2019.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

BIEMBENGUT, M. S. Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, 2012.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. [*S. l.*]: Editora Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:**uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Editora Porto, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é Base. [*S. l.: s. n.*], 2018. `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/`. Ministério da Educação. Brasília.

FERREIRA FILHO, J. R. **Geometria fractal:**da natureza para a sala de aula. 2015. f. 84. Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – São Cristóvão.

FRINHANI, P. E. *et al.* A matemática com os fractais. **Pensar Acadêmico**, v. 13, n. 2, p. 43–49, 2015.

LEIVAS, J. C. P.; BETTIN, A. D. H. Teorema de Pitágoras e o Fractal Árvore Pitagórica: Um Experimento no Ensino Fundamental. **Cadernos de Educação Tecnologia e Sociedade**, v. 11, n. 3, p. 444–457, 2018.

LISBOA, M. C. **Uma proposta de abordagem da geometria fractal na Educação Básica**. 2019. f. 59. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Arraias.

NASCIMENTO, M.; SILVA, S. C. R.; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **VIDYA**, v. 32, n. 2, p. 20, 2012.

REIS, J. N. C. **Fractais no Ensino Médio:** da observação de padrões da natureza ao uso do GeoGebra. 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT – Mossoró.

SONZA, A. P.; LEIVAS, J. C. P. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica. **Revista Thema**, v. 15, n. 4, p. 1549–1561, 2018.

Corresponding Author:
Zulma Elizabete de Freitas Madruga, *betemadruga@ufrb.edu.br*

Submitted: May 24, 2024
Accepted: November 19, 2024
Published: May 15, 2025
https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/index