

Verificação numérica da singularidade do escoamento Newtoniano em uma contração 4:1 por meio da formulação corrente-vorticidade

Numerical verification of the singularity of Newtonian flow in a 4:1 contraction via the streamfunction-vorticity formulation

Verificación numérica de la singularidad del flujo Newtoniano en una contracción 4:1 mediante la formulación corriente-vorticidad

Larissa Vitória Ribeiro de Andrade

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências

e Tecnologia, Presidente Prudente

larissa.ribeiro-andrade@unesp.br

ORCID: 0009-0000-2497-8407

Irineu Lopes Palhares Junior

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências

e Tecnologia, Presidente Prudente

irineu.palhares@unesp.br

ORCID: 0000-0002-7046-5108

Resumo. Neste estudo é investigado o comportamento assintótico do campo de velocidade e da vorticidade em torno de um canto reentrante. A análise é realizada por meio de simulações numéricas de escoamento Newtoniano em uma contração com razão 4:1, utilizando a formulação corrente-vorticidade. As equações que descrevem esse escoamento foram discretizadas utilizando a técnica de diferenças finitas, e o código numérico foi implementado em linguagem C. A robustez do comportamento assintótico é avaliada sob três condições distintas: variações no número de Reynolds, utilização de geometrias com diferentes comprimentos e comparação dos resultados com os obtidos pela abordagem *Marker-And-Cell* (MAC). O objetivo principal deste trabalho é validar a previsão do comportamento assintótico próximo à singularidade geométrica e demonstrar a independência desse fenômeno em relação às variações dos parâmetros operacionais e à extensão da geometria da contração. A investigação também aborda a eficácia comparativa das metodologias corrente-vorticidade e MAC, destacando a boa concordância entre as formulações. Os resultados indicam que, embora ambas as abordagens sejam capazes de capturar o comportamento fundamental do escoamento, ainda há diferenças nos pontos mais próximos à singularidade, sugerindo a necessidade de aprimoramentos nos modelos computacionais para simulações de escoamentos com características geométricas complexas.

Palavras-chave. Escoamento Newtoniano, contração 4:1, formulação corrente-vorticidade, singularidade.

Abstract. In this study, the asymptotic behavior of the velocity field and vorticity around a reentrant corner is investigated. The analysis is conducted through numerical simulations of Newtonian flow in a 4:1 contraction, using the streamfunction-vorticity formulation. The equations describing this flow were discretized using the finite difference method, and the numerical code was implemented in the C programming language. The robustness of the asymptotic behavior is evaluated under three distinct conditions: variations in the Reynolds number, the use of geometries with different lengths, and the comparison of results with those obtained by the Marker-And-Cell (MAC) approach. The main objective of this work is to validate the prediction of the asymptotic behavior near the geometric singularity and to demonstrate the independence of this phenomenon concerning variations in operational parameters and the extension of the contraction geometry. The investigation also addresses the comparative effectiveness of the streamfunction-vorticity and MAC methodologies, highlighting the good agreement between the formulations. The results indicate that, although both approaches can capture the fundamental behavior of the flow, differences still exist at points closest to the singularity, suggesting the need for improvements in computational models for simulating flows with complex geometric characteristics.

Keywords. Newtonian flow, 4:1 contraction, streamfunction-vorticity formulation, singularity.

Resumen. En este estudio se investiga el comportamiento asintótico del campo de velocidad y la vorticidad en torno a una esquina reentrante. El análisis se realiza mediante simulaciones numéricas de flujo Newtoniano en una contracción con una razón 4:1, utilizando la formulación corriente-vorticidad. Las ecuaciones que describen este flujo se discretizaron utilizando la técnica de diferencias finitas, y el código numérico fue implementado en lenguaje C. La robustez del comportamiento asintótico se evalúa bajo tres condiciones distintas: variaciones en el número de Reynolds, el uso de geometrías con diferentes longitudes y la comparación de los resultados con los obtenidos con el método Marker-And-Cell (MAC). El objetivo principal de este trabajo es validar la predicción del comportamiento asintótico cerca de la singularidad geométrica y demostrar la independencia de este fenómeno respecto a las variaciones de los parámetros operativos y la extensión de la geometría de la contracción. La investigación también aborda la eficacia comparativa de las metodologías corriente-vorticidad y MAC, destacando la buena concordancia entre ambas formulaciones. Los resultados indican que, aunque ambos enfoques son capaces de capturar el comportamiento fundamental del flujo, aún existen diferencias en los puntos más cercanos a la singularidad, lo que sugiere la necesidad de mejoras en los modelos computacionales

para simular fluxos com características geométricas complexas.

Palabras clave. Flujo Newtoniano, contracción 4:1, formulación corriente-vorticidad, singularidad.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 76M20; secondary 65M06, 65N22.

1 Introdução

Os escoamentos de fluidos em contrações planares há muito tempo têm sido explorados devido à sua importância na área acadêmica, abrangendo estudos teóricos, experimentais e numéricos, além de aplicações industriais, principalmente na indústria alimentícia, química, sistemas de tubulações e dutos, entre outros. No contexto dos estudos numéricos, o problema da contração planar, especialmente a contração de razão 4:1, é reconhecido como um problema de referência ou *benchmark* na verificação e validação de códigos numéricos, quanto à sua acurácia, estabilidade e convergência. Esse interesse na contração deriva de sua geometria simples, mas desafiadora numericamente devido ao surgimento de singularidades geométricas nas quinas. Esse fenômeno motivou diversos estudos assintóticos na tentativa de descrever o comportamento do fluido ao redor de quinas ou cantos reentrantes.

Em 1949, Dean e Montagnon [1] determinaram a solução assintótica para a função de corrente na forma $\psi(r, \theta) \sim r^{n+1} f(\theta)$, onde r e θ são coordenadas polares, com a origem definida em uma das quinas da geometria. Neste trabalho, escolheu-se a quina inferior como a origem do sistema polar. Assim, r representa a distância entre um ponto do domínio e a quina inferior, enquanto θ é o ângulo formado por r e a parede inferior do canal menor, conforme ilustrado na Figura 1. Além disso, n representa os autovalores da solução da equação do biarmônico $\nabla^4 \psi = 0$, uma simplificação da equação do movimento para baixos números de Reynolds, e f é uma função dependente da variável θ . Posteriormente, em 1964, Moffatt [2] adicionou mais entendimento ao escoamento em um canto reentrante ao determinar e definir os dois tipos de comportamento envolvidos, que são os escoamentos simétricos e antissimétricos, sendo este último o escoamento dominante ao redor da singularidade. De maneira resumida, os resultados assintóticos para um escoamento Newtoniano ao redor de um canto reentrante de 270° , como é o caso da contração 4:1, são dados por:

$$\psi \sim \mathcal{O}(r^{1.5445}), \quad \mathbf{v} \sim \mathcal{O}(r^{0.5445}), \quad p \sim \mathcal{O}(r^{-0.4555}), \quad \omega \sim \mathcal{O}(r^{-0.4555}). \quad (1)$$

A notação \mathcal{O} (*big-O*) usada na Eq. (1) nos diz como cada uma dessas grandezas físicas, função de corrente ψ , campo de velocidade \mathbf{v} , pressão p , e vorticidade ω , cresce ou decresce à medida que r tende a zero, isto é, conforme nos aproximamos da singularidade geométrica no escoamento. Observa-se que a pressão e a vorticidade aumentam indefinidamente à medida que r se aproxima de zero, pois o expoente é negativo. A função de corrente cresce proporcionalmente a $r^{1.5445}$, o que significa que, conforme r tende a zero, ψ vai a zero, mas de forma relativamente lenta. A velocidade também tende a zero, mas mais lentamente do que ψ . Os estudos de Moffat foram estendidos para outros escoamentos, como o stick-slip [3, 4] e a extrusão [5, 6], bem como para fluidos não Newtonianos [7, 8]. Embora muitos dos resultados assintóticos já tenham sido verificados numericamente com as formulações *Marker-and-Cell* (MAC), discretizada pelo método de diferenças finitas, [9, 10] e com o método de volumes finitos [16], não há na literatura a verificação destes resultados por meio da formulação corrente-vorticidade ($\psi - \omega$), nem um estudo sobre os efeitos do número de Reynolds e do comprimento da contração sobre a singularidade.

Portanto, neste trabalho, os resultados assintóticos (Eq. (1)) serão verificados numericamente por meio da formulação corrente-vorticidade com o método de diferenças finitas. Além disso, mediante a simulação da contração 4:1, será feita uma análise dos efeitos causados pela variação do número de Reynolds e pelo comprimento da contração. Por fim, os resultados do campo de velocidade obtidos por meio da formulação corrente-vorticidade serão comparados com os resultados adquiridos pela formulação *Marker-and-Cell* (MAC) [9, 10, 11]. O objetivo dessa comparação é verificar as diferenças entre as formulações e identificar pontos que ainda necessitam de melhorias.

2 Formulação matemática

As equações que modelam um escoamento Newtoniano, isotérmico e incompressível são dadas, na sua forma adimensional, por

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

onde $Re = \frac{\rho LU}{\mu}$ é o número adimensional de Reynolds, em que ρ é a densidade do fluido, μ é a viscosidade dinâmica, e L e U representam, respectivamente, o comprimento e a velocidade característicos do escoamento. Neste estudo, os valores de L e U são definidos como 1 m e 1 m/s , respectivamente.

O conjunto de equações (2) também pode ser reescrito na forma Cartesiana bidimen-

sional não-conservativa como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

O conjunto de equações descrito na Eq. (2) (ou Eq. (3)–(5)) representa um escoamento livre, isto é, o movimento do fluido é impulsionado exclusivamente pelas suas condições auxiliares, sem a influência de forças externas como gravidade, forças eletromagnéticas, ou pressões impostas.

Neste trabalho, a formulação adotada para representar as equações de Navier-Stokes (3)–(5) é a formulação corrente-vorticidade [12]. Para isso, definimos as funções corrente ψ e vorticidade ω em termos do campo de velocidade $\mathbf{v} = (u, v)$, ou seja,

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (6)$$

A função corrente ψ é uma função escalar que facilita a descrição de escoamentos bidimensionais incompressíveis, uma vez que automatiza a condição de incompressibilidade, Eq. (5), simplificando a solução de problemas. Além disso, o seu uso simplifica a representação dos escoamentos, já que elimina a necessidade de trabalhar diretamente com as componentes do vetor velocidade (u e v). Por outro lado, a vorticidade é uma grandeza vetorial que mede a rotação local de um fluido em torno de um ponto. Entretanto, para escoamentos bidimensionais, a vorticidade tem apenas uma componente não nula ω (na direção perpendicular ao plano do escoamento), e é definida como o rotacional do campo de velocidade, Eq. (6).

Para reescrever o sistema de equações (3)–(5) em termos de ψ e ω , derivamos a equação (3) em relação a y e subtraímos a derivada da equação (4) em relação a x . Em seguida, utilizando a equação da continuidade (5), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (7)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (8)$$

Além disso, com base na Eq. (6), é possível estabelecer uma equação de Poisson para ψ como:

$$\nabla^2 \psi = \omega. \quad (9)$$

De maneira resumida, o processo de solução do escoamento envolve a aproximação das equações (8) e (9), seguida pela construção do campo de velocidade por meio da equação (6). A seguir, são apresentados detalhes sobre a geometria do problema e as condições de contorno utilizadas na solução do escoamento em uma contração 4:1.

2.1 Condições de contorno

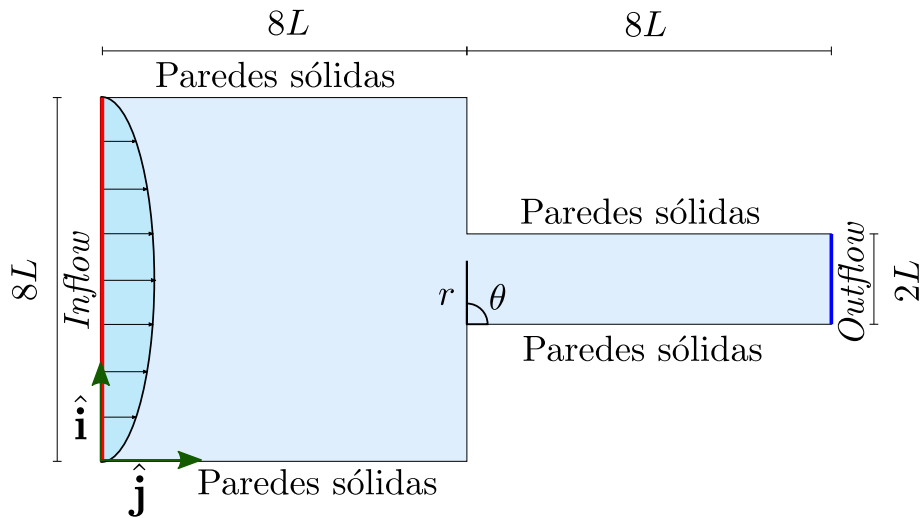
O escoamento investigado neste estudo corresponde a uma contração 4:1, onde o comprimento total é de $16L$. Os comprimentos dos dois canais da contração, largo e estreito, são especificados como $8L$, enquanto a largura é de $8L$ para o canal mais largo e de $2L$ para a região com estreitamento. Para simplificação, essa geometria é referida como $16L \times 8L$. A Figura 1 ilustra a geometria da contração $16L \times 8L$. Note que, embora as coordenadas polares tenham sido definidas no canto inferior da contração, no ponto de singularidade, a origem das coordenadas Cartesianas é tomada como sendo o ponto inferior do inflow. Assim, todas as condições de contorno apresentadas a seguir levam em consideração esse ponto como a origem do sistema de coordenadas Cartesianas.

Conforme ilustrado na Figura 1, o escoamento em uma contração 4:1 apresenta três tipos de contorno: a região de entrada de fluido ou *inflow*, a região de saída de fluido ou *outflow* e as paredes sólidas. A seguir, são definidas as condições de contorno para o campo de velocidade \mathbf{v} , a função de corrente ψ e a vorticidade ω para os diferentes tipos de região de contorno.

- **Inflow:** Nesta região definimos as componentes da velocidade nas direções x e y , respectivamente, como

$$\begin{cases} u(y) = -\frac{3}{8y_c^2} (y - y_f) y, \\ v(y) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

onde y_c e y_f representam os valores central e final de y , respectivamente. Observe que, como estamos na região de *inflow*, o valor da variável dependente x é fixo e

Figura 1: Geometria da contração 4:1 com comprimento $16L$ e largura $8L$.


Fonte: compilação do autor².

tomado como 0, justificando a definição das componentes da velocidade como dependendo apenas de y , isto é, $u = u(y)$ e $v = v(y)$. De acordo com a Figura 1, temos $y_c = 4L$ e $y_f = 8L$. A equação (10) descreve o perfil parabólico de entrada do fluido, justificando o uso de uma função quadrática para a componente u da velocidade. O uso de um perfil parabólico é característico de escoamentos laminares totalmente desenvolvidos, entretanto também há vantagens em se usar esse perfil no escoamento em contrações pois garante realismo físico, consistência com as condições de contorno e estabilidade numérica. Além disso, o uso do perfil parabólico proporciona uma transição suave entre as regiões não contraídas e contraídas e permite que o comportamento complexo do fluido dentro da contração seja estudado com precisão, além de ser uma abordagem comumente utilizada em *benchmarks* e validações. Observa-se que, quando $y = y_c$ a componente u da velocidade, apresentada na Eq. (10), atinge seu valor máximo, $u(y_c) = 0.375$. Este valor aumenta para $u_{max} = 1.5$ ao longo do canal menor, ou seja, quando $x > 8L$. Essa relação entre as velocidades máximas entre o canal mais largo ($u(y_c) = 0.375$) e o canal contraído ($u_{max} = 1.5$) satisfaz o princípio da conservação de massa para fluidos incompressíveis, isto é, o fluxo volumétrico $Q = (8L) u(y_c) = (2L) u_{max}$ é conservado ao longo da contração.

A partir da condição de *inflow* para o campo de velocidade, Eq. (10), juntamente com a relação (6), é possível deduzir as condições de contorno para ψ e ω , as quais

são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \psi(y) = -\frac{3}{8y_c^2} \left(\frac{y}{3} - \frac{y_f}{2} \right) y^2 + \kappa, \\ \omega(y) = -\frac{3}{8y_c^2} (2y - y_f), \end{cases} \quad (11)$$

onde κ é uma constante arbitrária, que por simplicidade será tomada como $\kappa = 0$.

- **Paredes sólidas:** Nesta região, são aplicadas a condição de não escorregamento, juntamente com a condição de impermeabilidade. Assim, a velocidade é considerada nula nas paredes sólidas:

$$\mathbf{v} = 0. \quad (12)$$

Para a função de corrente ψ , pode-se definir as condições nas paredes sólidas a partir da relação com o campo de velocidade, Eq. (6). Desta forma, a condição de não-deslizamento implica que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Entretanto, quando consideramos um *inflow* com um perfil específico de velocidade (neste caso um perfil parabólico), isso implica que o fluxo volumétrico que entra na contração deve ser constante. Portanto, a escolha de um valor de ψ correspondente ao *inflow* em $y = 0$ e $y = y_f$ assegura que a relação entre as seções transversais na entrada e na saída seja mantida. Desta forma, o valor de ψ nas paredes sólidas é definido a partir da expressão (11) para ψ , aplicada nos valores extremos de y , ou seja, $y = 0$ e $y = y_f$. Assim, na parede horizontal inferior, tem-se $\psi = \psi(0)$, e na parede horizontal superior, $\psi = \psi(y_f)$. Esses valores são estendidos ao longo de toda a parede, uma vez que são tratados como linhas de corrente.

Para a vorticidade, é adotada a condição

$$\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{n}^2}, \quad (14)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à parede, orientado para fora do domínio.

- **Outflow:** Nessa região, a fim de delimitar o domínio, aplica-se a condição de Neumann homogênea para todas as variáveis, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (15)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à região de saída de fluido, que neste caso é $\mathbf{n} = (1, 0)$.

3 Método numérico

Para a solução numérica do conjunto de equações (8) e (9), todas as derivadas espaciais são discretizadas por meio de diferenças centradas, inclusive os termos convectivos, enquanto a derivada temporal na equação da vorticidade é discretizada por diferenças progressivas. Essa abordagem resulta nas seguintes fórmulas de diferenças:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = \omega_{i,j}^{n+1}.$$

A escolha de diferenças centradas para discretizar os termos convectivos visa apenas simplificar a expressão (16) e a implementação numérica, evitando as mudanças entre diferenças progressivas e regressivas impostas por métodos *upwind*.

Observe que na Eq. (16), os índices temporais n foram atribuídos às variáveis de tal forma que a vorticidade é aproximada pelo método de Euler explícito [14], e a equação de Poisson para ψ é aproximada explicitamente pelo método de Jacobi-Richardson [13]. Portanto, as equações de diferenças (16) podem ser reescritas de forma explícita como:

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n + \Delta t \left[-u_{i,j}^n \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) - v_{i,j}^n \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right], \quad (17)$$

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \left[-(\Delta x)^2 \omega_{i,j}^{n+1} + (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n) \right].$$

Os parâmetros de entrada para a simulação são: o número adimensional de Reynolds Re , o passo temporal Δt e a quantidade de pontos na direção x e na direção y , representados por N_x e N_y , respectivamente. O passo temporal Δt é escolhido considerando

a restrições parabólica, vinda do caráter explícito de integração temporal da equação da vorticidade, e CFL, imposta pelo tratamento dispensado ao termo não linear. O cálculo de Δt com as restrições parabólica (Δt_{parab}) e CFL (Δt_{CFL}) é dado por:

$$\Delta t = \text{mín} \{ \Delta t_{parab}, \Delta t_{CFL} \}, \quad (18)$$

onde $\Delta t_{CFL} \leq \frac{\Delta x}{u_{max}}$ e $\Delta t_{parab} \leq \frac{Re\Delta x^2}{4}$. Por exemplo, para a malha mais fina, $\Delta x = \Delta y = 0.0125$ com $Re = 1$, os cálculos das restrições de estabilidade parabólica e CFL são dados, respectivamente, por:

$$\Delta t_{parab} \leq \frac{0.0125^2}{4} = 3.9062 \times 10^{-5} \quad \text{e} \quad \Delta t_{CFL} \leq \frac{0.0125}{1.5} \approx 8.3333 \times 10^{-3}. \quad (19)$$

Logo, $\Delta t = \text{mín} \{ 3.9062 \times 10^{-5}, 8.3333 \times 10^{-3} \} = 3.9062 \times 10^{-5}$. Entretanto, por simplicidade, na prática o valor de Δt é tomado como $\Delta t = 10^{-5}$. O mesmo princípio se aplica para as demais malhas.

Como condição inicial, todas as variáveis são inicializadas como zero. Após esses passos iniciais, o algoritmo é executado de acordo com os seguintes passos:

1. Atualizar as condições de contorno nas paredes e *outflow* usando as equações (14) e (15);
2. Resolver a equação da vorticidade pelo método de Euler explícito, conforme a primeira equação do sistema (17);
3. Resolver a equação de Poisson para ψ conforme a segunda equação de (17);
4. Verificar se o erro relativo da vorticidade é menor que uma tolerância pré-fixada, Eq. (20). Se sim, encerrar a simulação; caso contrário, repetir o ciclo a partir do passo 1.

O critério de parada usado nas simulações foi o erro relativo da vorticidade, ou seja, se

$$\frac{\|\omega^{n+1} - \omega^n\|}{\|\omega^{n+1}\|} < \epsilon, \quad (20)$$

onde $\epsilon = 10^{-8}$ é a precisão pré-fixada, a simulação é interrompida e ω^{n+1} e ψ^{n+1} são tomados como a solução do escoamento.

Todas as simulações foram executadas em um computador equipado com o processador AMD Ryzen 5 3500U, com 8 núcleos e frequência base de 2.1 GHz (atingindo até 3.7 GHz com Turbo Boost). O sistema conta com 8 GB de memória RAM DDR4, rodando a 2400 MHz, e uma placa gráfica NVIDIA GeForce MX250, com 2 GB de memória GDDR5 dedicada. O armazenamento é fornecido por um SSD M.2 NVMe de 500 GB.

4 Resultados numéricos

Nesta seção, serão analisados os resultados numéricos considerando as seguintes situações: análise de convergência com o refinamento de malha, variação do parâmetro Re , variação no comprimento e largura da geometria, e comparação entre as metodologias corrente-vorticidade e MAC.

Para a análise de convergência dos resultados, serão utilizadas quatro malhas diferentes com $Re = 1$. Além disso, todas as comparações entre os resultados numéricos e assintóticos são feitas considerando a linha vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$, com $0 \leq r \leq 1$. As malhas e os passos temporais Δt , correspondente a cada uma das malhas e satisfazendo a restrição de estabilidade (18), utilizados nas simulações estão descritos na Tabela 1. É importante ressaltar que o número de nós apresentados na Tabela 1 é válido apenas para a geometria $16L \times 8L$.

Tabela 1: Malhas usadas nas simulações para a geometria $16L \times 8L$.

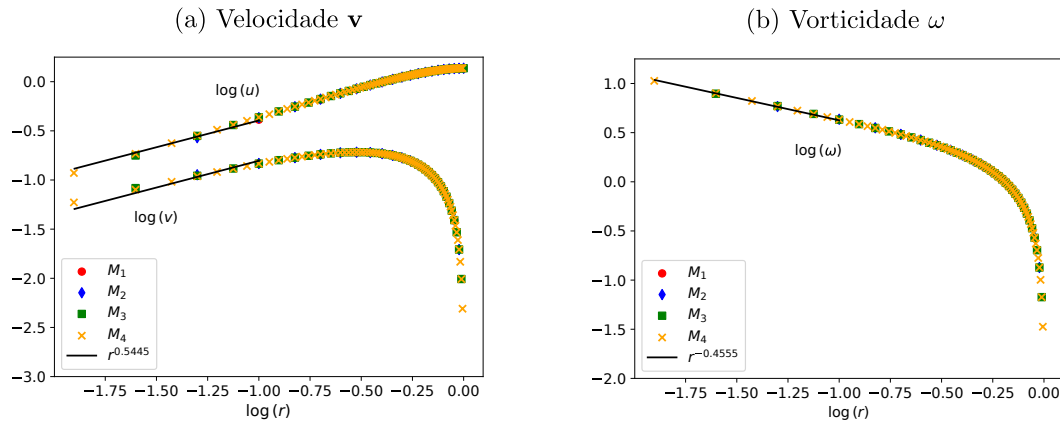
Malha	$\Delta x = \Delta y$	Número de nós ($N_x \times N_y$)	Δt
M_1	0.1	8241	10^{-3}
M_2	0.05	32481	10^{-4}
M_3	0.025	128641	10^{-5}
M_4	0.0125	513281	10^{-5}

Fonte: compilação do autor².

Na Figura 2, é apresentada a verificação numérica dos resultados assintóticos para o campo de velocidade \mathbf{v} e a vorticidade ω . Pode-se observar que tanto as componentes da velocidade, Figura 2 (a), quanto a vorticidade, Figura 2 (b), capturam corretamente o valor assintótico apresentado na Eq. (1), confirmando a convergência dos resultados. Além disso, na Figura 3, é apresentado o perfil da componente u da velocidade ao longo das linhas horizontais $y = 0$, Figura 3 (a), e $y = 4.9$, Figura 3 (b). A partir da Figura 3 (a), pode-se observar a variação do valor de u , inicialmente próximo de 0.375 e aumentando gradativamente ao se aproximar da singularidade até atingir o valor máximo de 1.5. Já a Figura 3 (b) apresenta um comportamento diferente, uma vez que a velocidade tende a zero ao se aproximar da singularidade.

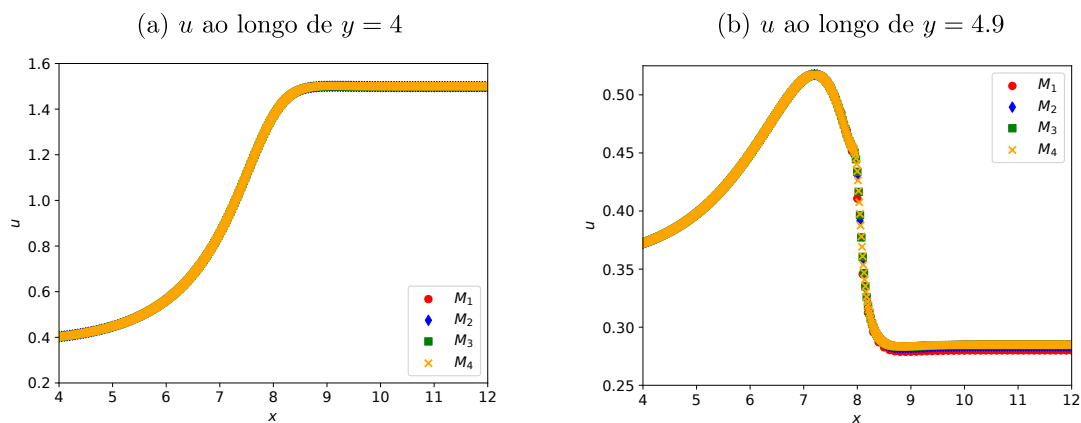
O estudo do escoamento com a variação do número de Reynolds foi realizado utilizando três valores diferentes para Re : 1, 10 e 100. A Figura 4 apresenta a verificação dos resultados assintóticos com os três valores de Re . Conforme observado, a inclinação dos resultados é independente do número de Reynolds, o que está de acordo com os estudos

Figura 2: Verificação numérica dos resultados assintóticos, ao longo da linha vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$, para: (a) componentes da velocidade \mathbf{v} e (b) vorticidade ω , com diversas malhas.



Fonte: compilação do autor².

Figura 3: Perfil da componente u da velocidade ao longo das linhas horizontais: (a) $y = 4$ e (b) $y = 4.9$.

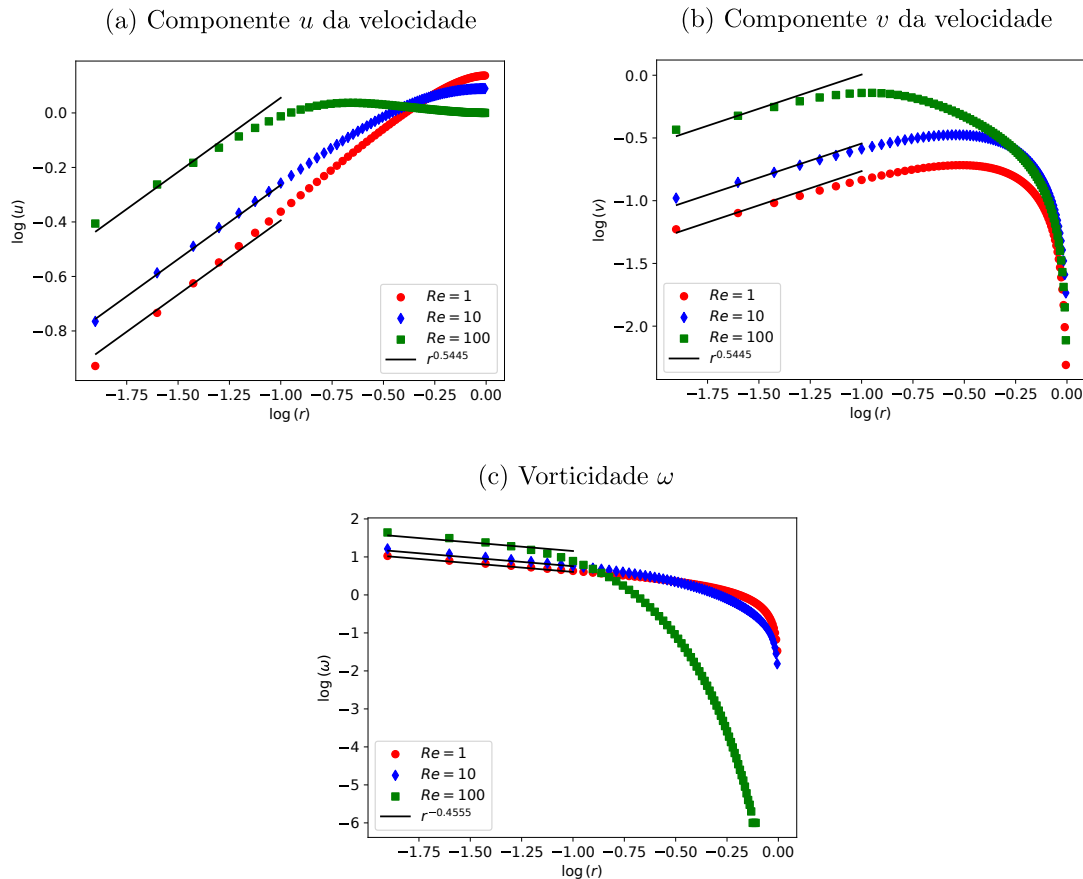


Fonte: compilação do autor².

realizados por Dean e Montagnon [1] e Moffatt [2]. Por outro lado, nota-se que a região na qual esses resultados assintóticos são válidos diminui à medida que o número de Reynolds aumenta. Esse fenômeno era esperado, uma vez que a construção dos resultados assintóticos foi realizada considerando $Re \ll 1$. Uma observação semelhante foi feita em [9] em relação ao número de Weissenberg.

Para demonstrar a independência do comportamento assintótico do campo de velocidade \mathbf{v} e da vorticidade ω , conforme a Eq. (1), em relação ao tamanho da contração, a Figura 5 apresenta os resultados numéricos para três contrações de dimensões diferentes.

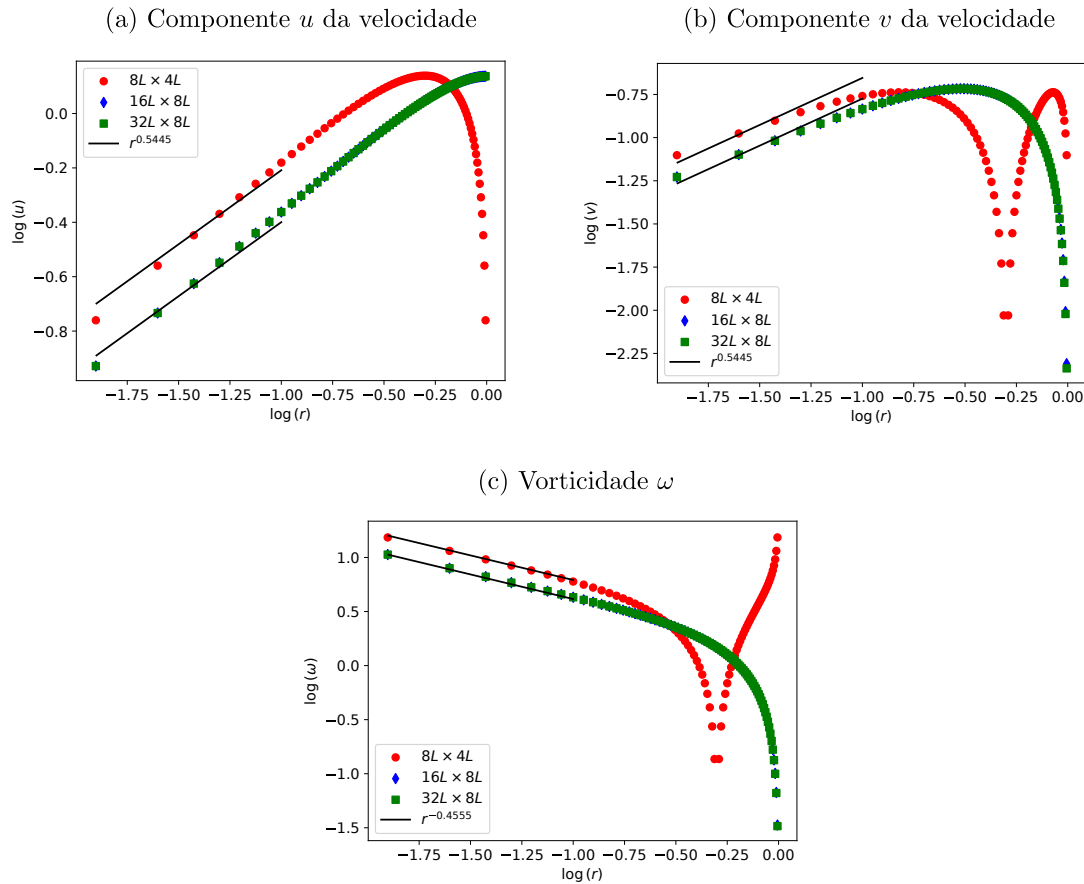
Figura 4: Comportamento assintótico de (a) u , (b) v e (c) ω para diferentes valores de Reynolds: $Re = 1, 10$ e 100 .



A primeira contração, representada pela legenda $8L \times 4L$, possui comprimento $8L$ e largura $4L$, enquanto as contrações $16L \times 8L$ e $32L \times 8L$ têm comprimentos de $16L$ e $32L$, respectivamente, ambas com largura igual a $8L$. Esta investigação é motivada pela observação feita por Evans et al. [9], que identifica variações no comportamento singular da pressão com a variação no comprimento do canal. Entretanto, como observado na Figura 5, o comportamento assintótico das componentes da velocidade e da vorticidade ao redor da singularidade é independente das dimensões da geometria da contração. Além disso, os resultados das contrações $16L \times 8L$ e $32L \times 8L$ estão mais próximos, devido ao uso da mesma largura de tamanho $8L$, enquanto a geometria $8L \times 4L$ possui largura de tamanho $4L$.

Como último teste, foram comparadas as inclinações das componentes da velocidade com os resultados obtidos a partir da simulação com a metodologia MAC [9]. Por sim-

Figura 5: Comportamento assintótico de (a) u , (b) v e (c) ω para diferentes geometrias: $8L \times 4L$, $16L \times 8L$ e $32L \times 8L$.

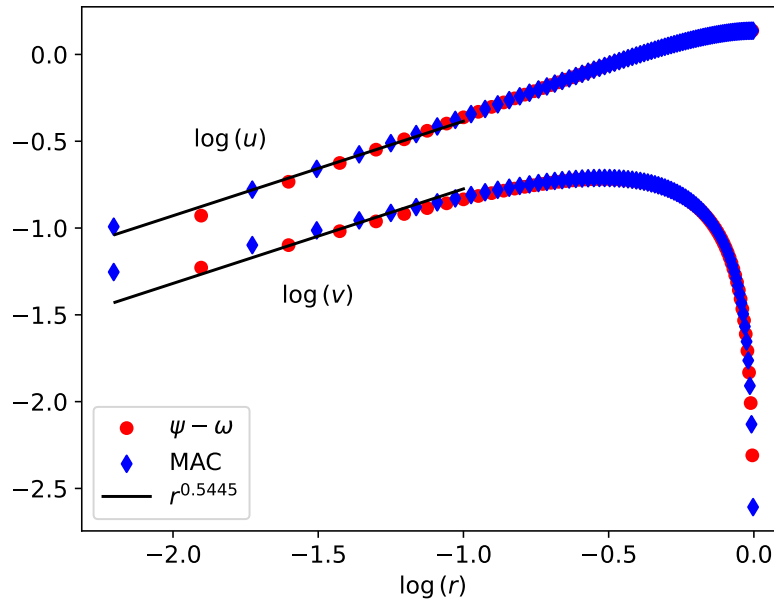


Fonte: compilação do autor².

plicidade, a geometria utilizada foi a $16L \times 8L$ com $Re = 1$ e malha M_4 . É importante mencionar que a metodologia MAC adotada neste trabalho utiliza uma discretização semi-implícita, onde o laplaciano da velocidade é discretizado de modo implícito, enquanto os termos convectivos são tratados explicitamente por meio do método de alta ordem *Convergent and Universally Bounded Interpolation scheme for the Treatment of Advection* (CUBISTA) [15]. A Figura 6 apresenta os resultados numéricos das inclinações das componentes u e v da velocidade com as formulações $\psi - \omega$ e MAC. Observa-se que ambas as formulações geram resultados consistentes com o esperado assintoticamente, com poucas diferenças nos pontos próximos à singularidade. Além disso, a formulação MAC possui o último ponto mais próximo da singularidade devido ao uso da malha deslocada, enquanto a formulação $\psi - \omega$ utiliza malha colocalizada. Em resumo, pode-se afirmar uma boa concordância dos resultados com ambas as formulações. Entretanto, ainda há espaço para

melhorias no tratamento dos pontos mais próximos à singularidade, que se desviam de maneira moderada do esperado assintoticamente.

Figura 6: Comparação entre os resultados obtidos pelas formulações $\psi - \omega$ e MAC.



Fonte: compilação do autor².

5 Discussões

A análise realizada neste estudo teve como objetivo investigar o comportamento assintótico do escoamento em uma contração 4:1, utilizando a formulação corrente-vorticidade. Por meio de simulações numéricas, foram examinados diversos aspectos, incluindo a convergência dos resultados com o refinamento da malha, a variação do número de Reynolds, as dimensões da geometria da contração e a comparação com a metodologia MAC.

Os resultados obtidos demonstraram que a formulação corrente-vorticidade é capaz de capturar adequadamente o comportamento assintótico do escoamento, conforme previsto pela literatura. A análise de convergência evidenciou que os resultados se aproximam dos valores assintóticos à medida que a malha é refinada, indicando a robustez da abordagem numérica adotada. Além disso, a variação do número de Reynolds revelou que, embora a inclinação dos resultados permaneça consistente, a região em que os resultados assintóticos são válidos diminui com o aumento do número de Reynolds, conforme esperado para

escoamentos com características reentrantes.

A independência do comportamento assintótico em relação ao tamanho da contração foi confirmada, evidenciando que as dimensões da geometria não afetam significativamente o comportamento do escoamento próximo à singularidade.

Por fim, a comparação com a metodologia MAC mostrou uma boa concordância entre os resultados obtidos pelas duas formulações, destacando suas capacidades de capturar o comportamento do escoamento. No entanto, ainda há espaço para melhorias no tratamento dos pontos mais próximos à singularidade em ambas as abordagens.

Referências

- [1] DEAN, W. R., MONTAGNON, P. E. On the steady motion of viscous liquid in a corner. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 45, n. 3. Cambridge University Press, 1949.
- [2] MOFFATT, H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 18, n. 1, p. 1-18, 1964.
- [3] RICHARDSON, S. A ‘stick-slip’ problem related to the motion of a free jet at low Reynolds numbers. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 67, n. 2, Cambridge University Press, 1970.
- [4] TROGDON, S. A., JOSEPH, D. D. The stick-slip problem for a round jet: I. Large surface tension. **Rheologica Acta**, v. 19, n. 4, p. 404-420, 1980.
- [5] STURGES, L. D. A theoretical study of extrudate swell. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 9, n. 3-4, p. 357-378, 1981.
- [6] EVANS, J. D., MORGAN, L. E. The extrudate swell singularity of Phan-Thien–Tanner and Giesekus fluids. **Physics of Fluids**, v. 31, n. 11, 2019.
- [7] HINCH, E. J. The flow of an Oldroyd fluid around a sharp corner. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 50, n. 2-3, p. 161-171, 1993.
- [8] RENARDY, M. The stresses of an upper convected Maxwell fluid in a Newtonian velocity field near a re-entrant corner. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 50, n. 2-3, p. 127-134, 1993.
- [9] EVANS, J. D., PALHARES JUNIOR, I. L., OISHI, C.M., RUANO NETO, F. Numerical verification of sharp corner behavior for Giesekus and Phan-Thien–Tanner fluids. **Physics of Fluids**, v. 34, n. 11, 2022.

- [10] EVANS, J. D., FRANÇA, H. L., PALHARES JUNIOR, I. L., OISHI, C. M. Testing viscoelastic numerical schemes using the Oldroyd-B fluid in Newtonian kinematics. **Applied Mathematics and Computation**, v. 387, p. 125106, 2020.
- [11] EVANS, J. D., PALHARES JUNIOR, I. L., OISHI, C. M. Numerical study of the stress singularity in stick-slip flow of the Phan-Thien Tanner and Giesekus fluids. **Physics of Fluids**, v. 31, n. 9, 2019.
- [12] DE OLIVEIRA, A. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**, São Paulo: Universidade de São Paulo, 2000.
- [13] LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for Ordinary and Partial Differential Equations**, Philadelphia, SIAM, 2007.
- [14] CUMINATO, J. A., MENEGUETTE, M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**, Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [15] ALVES, M. A., Oliveira, P. J., Pinho, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. **International journal for numerical methods in fluids**, v. 41, n. 1, p. 47-75, 2003.
- [16] ALVES, M. A., OLIVEIRA, P. J., PINHO, F. T. "Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** v. 110, n. 1, p. 45–75, 2003.