Brazilian Electronic Journal of Mathematics, v.5, jan/dez, 2024. ISSN: 2675-1313

Estruturas complexas em espaços vetoriais reais [1]

Complex structures on real vector space

Estructuras complejas en espacios vectoriales reales

Daniel Rotmeister Teixeira de Barros
Universidade de São Paulo
daniel.rotmeister@ime.usp.br
ORCID: 0000-0002-4720-9245

Laércio dos Santos
Universidade Federal de Juiz de Fora
laercio.santos@ufjf.br
ORCID: 0000-0003-0219-1966

Resumo. Neste artigo são estudadas estruturas complexas em espaços vetoriais reais, do ponto de vista algébrico. Um dos principais resultados garante existência e unicidade de estruturas complexas, a menos de equivalência, em espaços de dimensão par ou de dimensão infinita. Além disso, é apresentada uma descrição do conjunto das estruturas complexas como espaço homogêneo do grupo linear geral e, por fim, é mostrado como construir estruturas complexas, em alguns ambientes diferentes, a partir de estruturas complexas conhecidas. Falta na literatura um texto abrangente e detalhado, com demonstrações completas destes resultados, e um dos objetivos deste artigo é justamente contribuir com o preenchimento dessa lacuna.

Palavras-chave. Estrutura complexa, espaço vetorial complexo, álgebra linear.

Abstract. In this article, complex structures in real vector spaces are studied from an algebraic perspective. One of the main results guarantees the existence and uniqueness of complex structures, up to equivalence, in spaces of even dimension or infinite dimension. Additionally, a description of the set of complex structures as a homogeneous space of the general linear group is presented, and finally, it is shown how to construct complex structures in some different settings from known complex structures. There is a lack of a comprehensive and detailed text in the literature with complete proofs of these results, and one of the objectives of this article is precisely to help fill this gap.

[1]Laércio dos Santos foi parcialmente apoiado pela FAPEMIG RED-00133-21.

Keywords. Complex structure, complex vector spaces, linear algebra.

Resumen. En este artículo se estudian estructuras complejas en espacios vectoriales reales desde un punto de vista algebraico. Uno de los principales resultados garantiza la existencia y unicidad de estructuras complejas, salvo equivalencia, en espacios de dimensión par o de dimensión infinita. Además, se presenta una descripción del conjunto de estructuras complejas como espacio homogéneo del grupo lineal general y, por último, se muestra cómo construir estructuras complejas en algunos entornos diferentes a partir de estructuras complejas conocidas. Falta en la literatura un texto amplio y detallado con demostraciones completas de estos resultados, y uno de los objetivos de este artículo es precisamente contribuir a llenar esa laguna.

Palabras clave. Estructuras complejas, espacios vectoriales complejos, álgebra lineal.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 15A99 ; secondary 32C15.

1 Introdução

Neste artigo estudamos estruturas complexas em espaços vetoriais reais, isto é, os automorfismos lineares que têm como inverso o seu oposto, que são chamados de anti-involuções. Uma das vantagens de uma estrutura complexa num espaço real é que ela induz uma multiplicação por números complexos introduzindo, assim, uma estrutura de espaço vetorial complexo. No caso de espaços reais finitamente gerados o estudo de estruturas complexas surge no contexto das Geometrias Complexa e Simplética (vide [1, 6, 8, 9, 11]) ou em alguns livros de Álgebra Linear como, por exemplo, [10, p. 77]. Neste caso, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma estrutura complexa é que o espaço tenha dimensão par. No contexto de espaços vetoriais topológicos sobre os reais, é natural considerar as estruturas complexas que são aplicações contínuas (vide [2, 4]). Jean Dieudonné exibiu, em [2], um espaço de Banach de dimensão infinita que não admite estrutura complexa contínua, isto é, nem todo espaço vetorial topológico de dimensão infinita admite uma estrutura complexa contínua.

Na Seção 2, introduzimos algumas definições, exemplos e resultados gerais. Na Seção 3, caracterizamos os espaços vetoriais reais que admitem alguma estrutura complexa. Um dos resultados neste sentido é o Teorema 3.2, que garante a existência de estruturas complexas em qualquer espaço de dimensão infinita ou de dimensão par.

Além disso, pelo Teorema 3.4, duas estruturas complexas J_1 e J_2 num espaço vetorial real são equivalentes, no sentido que existe um automorfismo T tal que $TJ_1 = J_2T$. Na Seção 4, denotamos por $\mathcal{J}(V)$ o conjunto das estruturas complexas de um espaço vetorial real V e mostramos que o grupo linear geral $\mathrm{Gl}(V)$ age transitivamente, por conjugação, em $\mathcal{J}(V)$. Em particular, $\mathcal{J}(V)$ se identifica com um espaço homogêneo de $\mathrm{Gl}(V)$. Na Seção 5, mostramos como construir estruturas complexas em alguns ambientes diferentes, a partir de estrutura(s) complexa(s) dada(s). Por exemplo, uma estrutura complexa em V induz uma estrutura complexa em $V \oplus V^*$ com uma propriedade adicional, chamada estrutura complexa generalizada em V (veja Proposição 5.4). Além disso, mostramos que uma estrutura complexa em V induz uma estrutura complexa no espaço quociente V^{**}/V, no caso em que V é de dimensão infinita. Finalizamos a seção comentando o exemplo de Dieudonné de um espaço de Banach de dimensão infinita que não admite estrutura complexa contínua.

2 Definições, exemplos e algumas propriedades

Nesta seção, introduzimos algumas definições, exemplos e resultados gerais. No caso em que o espaço é finitamente gerado, alguns resultados podem ser encontrados em [1, 6, 9–11].

Seja V um espaço vetorial real. Uma ***estrutura complexa*** em V é uma anti-involução $J\colon V \to V$, isto é, J é um operador linear tal que $J^2 = -\mathrm{Id}_V$. Toda estrutura complexa J é um automorfismo e, além disso, $J^{-1} = -J$. Uma estrutura complexa J em V induz uma estrutura de espaço vetorial complexo em V, definindo a multiplicação por escalar da seguinte forma:

$$(a + ib)v \doteq av + bJ(v), \tag{2.1}$$

onde $v \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{C}$ é tal que $i^2 = -1$. O espaço vetorial complexo obtido dessa maneira será denotado por V_J. Observe que os conjuntos subjacentes a V e a V_J são iguais. Pela definição em (2.1),

$$J(v) = iv, \tag{2.2}$$

para todo $v \in V$.

Exemplo 2.1 (**Estrutura Canônica em** $\mathbb{R}^{2n}$**).** Consideremos a decomposição $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. A aplicação $J_0\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por $J_0(u, v) = (-v, u)$ é uma estrutura complexa em $\mathbb{R}^{2n}$, uma vez que J_0 é linear e $J_0^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}$, chamada ***estrutura complexa***

canônica. A multiplicação por escalar complexo em $\mathbb{R}^{2n}$, induzida por J_0, é dada por

$$(a + ib)(u, v) = (au - bv, av + bu). \tag{2.3}$$

A aplicação $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n}_{J_0} \to \mathbb{C}^n$, definida por $\Phi(u, v) = u + iv$, é um isomorfismo linear real, que identifica o espaço vetorial complexo $\mathbb{R}^{2n}_{J_0} := (\mathbb{R}^{2n})_{J_0}$ com $\mathbb{C}^n$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{J_0} &= \{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, e_1), \ldots, (0, e_n)\} \\ &= \{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), J_0(e_1, 0), \ldots, J_0(e_n, 0)\} \end{aligned}$$

é uma base de $\mathbb{R}^{2n}$ e a matriz de J_0 nessa base é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

sendo I_n a matriz identidade de $M(n, \mathbb{R})$. $\diamond$

O Exemplo 2.1 pode ser generalizado para espaços vetoriais reais arbitrários, no lugar de $\mathbb{R}^{2n}$, como é feito no Exemplo 2.2.

Exemplo 2.2. Dado um espaço vetorial real V, a aplicação $J\colon V \oplus V \to V \oplus V$ definida por $J(u, v) = (-v, u)$ é uma estrutura complexa em $V \oplus V$. A multiplicação por escalar complexo induzida por J é dada pela igualdade em (2.3). O espaço complexo $(V \oplus V)_J$ é um dos modelos de complexificação de V. $\diamond$

Exemplo 2.3. Denotemos por $\mathbb{R}[x]$ o espaço dos polinômios na indeterminada x com coeficientes em $\mathbb{R}$. A aplicação linear $J\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tal que na base $\{1, x, x^2, \ldots\}$ é dada por $J(x^{2n}) := x^{2n+1}$ e $J(x^{2n+1}) := -x^{2n}$ para todo inteiro $n \geq 0$, é uma estrutura complexa em $\mathbb{R}[x]$. $\diamond$

Exemplo 2.4. Seja W um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Denotemos por $W_{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial real obtido de W por restrição dos escalares ao corpo $\mathbb{R}$. A aplicação $\widetilde{J}\colon W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$, definida por $\widetilde{J}(w) = iw$ é uma estrutura complexa em $W_{\mathbb{R}}$ e, além disso, $(W_{\mathbb{R}})_{\widetilde{J}} = W$. Por outro lado, se V é um espaço vetorial real e J é uma estrutura complexa em V, então $(V_J)_{\mathbb{R}} = V$. $\diamond$

Um ***espaço com estrutura complexa*** é um par (V, J), sendo V um espaço vetorial real e J uma estrutura complexa em V.

Proposição 2.5. *Seja (V, J) um espaço com estrutura complexa. Se $\mathcal{B}$ é uma $\mathbb{C}$-base de V_J, então*

1. $\mathcal{B} \cap J(\mathcal{B}) = \emptyset$*;*

2. $\mathcal{B}$ *e* $J(\mathcal{B})$ *têm a mesma cardinalidade;*

3. o conjunto $\mathcal{B}_J = \mathcal{B} \cup J(\mathcal{B})$ *é uma base de* V*.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existe $v \in \mathcal{B} \cap J(\mathcal{B})$. Assim, existe $u \in \mathcal{B}$ tal que $v = J(u) = iu$, o que é uma contradição, uma vez que $\{u, v\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$, já que $\{u, v\} \subseteq \mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{B} \cap J(\mathcal{B}) = \emptyset$, o que mostra o item 1. Para provar 2., basta notar que a restrição de J a $\mathcal{B}$ é uma aplicação bijetiva de $\mathcal{B}$ em $J(\mathcal{B})$. Demonstremos, agora, que $\mathcal{B}_J$ é uma base de V. Para isso, sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k v_{i_k} + b_k J(v_{i_k})) = 0$$

com $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\} \subseteq \mathcal{B}$. Como $J(v_{i_k}) = iv_{i_k}$, por (2.2), a igualdade anterior pode ser reescrita na forma

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k)v_{i_k} = 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é uma $\mathbb{C}$-base de V_J segue que $a_k + ib_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pela igualdade de números complexos segue que $a_k = b_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, $\mathcal{B}_J$ é um conjunto linearmente independente. Seja $v \in V$. Como os conjuntos subjacentes a V e V_J são iguais e $\mathcal{B}$ é uma $\mathbb{C}$-base de V_J, existem $z_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$ e $v_{j_1}, \ldots, v_{j_n} \in \mathcal{B}$ tais que

$$v = \sum_{k=1}^{n} z_k v_{j_k} = \sum_{k=1}^{n}(a_k v_{j_k} + b_k J(v_{j_k})).$$

Logo, v é combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_J$, concluindo a demonstração. □

A base ordenada $\mathcal{B}_J$, da Proposição 2.5, é chamada ***base adaptada a*** J ou ***base*** J***-adaptada***. Dados V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subseteq V$, denota-se por $\operatorname{ger}_{\mathbb{K}}(S)$ o subespaço de V gerado por S.

Corolário 2.6. *Se* (V, J) *é um espaço com estrutura complexa, então existe um subespaço* U *de* V *tal que* $V = U \oplus J(U)$*. Em particular, se* $\mathcal{B}$ *é base de* U*, então* $\mathcal{B}^J = \mathcal{B} \cup J(\mathcal{B})$ *é base de* V *e* $\dim U = \dim J(U)$*.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base de V_J. Pela Proposição 2.5, $\mathcal{B}_J = \mathcal{B} \cup J(\mathcal{B})$ é base de V. Assim, se $U = \operatorname{ger}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$ e $W = \operatorname{ger}_{\mathbb{R}}(J(\mathcal{B})) = J(\operatorname{ger}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})) = J(U)$, então

$V = U \oplus W = U \oplus J(U)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Sejam (V, J) um espaço com estrutura complexa e U um subespaço de V tal que $V = U \oplus J(U)$, dado pelo Corolário 2.6. Se $v \in V$, então existem $u, w \in U$ tais que $v = u + J(w)$. Assim,

$$J(v) = -w + J(u) \in U \oplus J(U).$$

Logo, na decomposição $V = U \oplus J(U)$, J se escreve como as estruturas complexas dos Exemplos 2.1 e 2.2.

Sejam (V_1, J_1) e (V_2, J_2) espaços com estruturas complexas e $T\colon V_1 \to V_2$ uma transformação linear. Denotemos por

$$\widetilde{T}\colon (V_1)_{J_1} \to (V_2)_{J_2} \tag{2.4}$$

a aplicação, entre os respectivos espaços complexos, cuja lei de formação é a mesma de T. Em geral, $\widetilde{T}$ não é $\mathbb{C}$-linear. De fato, consideremos em $\mathbb{R}^2$ a estrutura complexa canônica J_0 e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que na base canônica $\{e_1, e_2\}$ é dada por: $T(e_1) = e_2$ e $T(e_2) = e_1$. Como $\widetilde{T}(ie_1) = \widetilde{T}(e_2) = e_1 \neq -e_1 = ie_2 = i\widetilde{T}(e_1)$ segue que $\widetilde{T}$ não é $\mathbb{C}$-linear.

Se $R\colon V_1 \to V_2$ e $S\colon V_2 \to V_3$ são aplicações, então $SR\colon V_1 \to V_3$ denota a aplicação composta de S e R.

Sejam (V_1, J_1) e (V_2, J_2) espaços com estrutura complexa. Dizemos que uma transformação linear $T\colon V_1 \to V_2$ é ***complexa***, quando $TJ_1 = J_2T$, isto é, quando o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_1"'] & V_2 \arrow[d, "J_2"] \\ V_1 \arrow[r, "T"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

O próximo resultado estabelece uma condição necessária e suficiente para que $\widetilde{T}$ seja $\mathbb{C}$-linear.

Proposição 2.7. *Sejam (V_1, J_1) e (V_2, J_2) dois espaços com estruturas complexas e $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. A aplicação $\widetilde{T}$, definida em (2.4), é $\mathbb{C}$-linear se, e somente se, T é complexa.*

Demonstração: Dado $v_1 \in V_1$ segue, da expressão (2.2), que

$$\widetilde{T}(iv_1) = TJ_1(v_1) \quad \text{e} \quad i\widetilde{T}(v_1) = J_2T(v_1).$$

Portanto, $\widetilde{T}$ é uma transformação $\mathbb{C}$-linear se, e somente se, $TJ_1(v_1) = J_2T(v_1)$ para todo

$v_1 \in V_1$. $\square$

Proposição 2.8. *Sejam* $(V_1, J_1), (V_2, J_2)$ *e* (V_3, J_3) *espaços com estruturas complexas.*

1. *A aplicação identidade* $\mathrm{Id}_{V_1} \in \mathcal{L}(V_1)$ *é complexa e, além disso,* $\widetilde{\mathrm{Id}_{V_1}} = \mathrm{Id}_{(V_1)_{J_1}}$.
2. *Se* $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ *e* $R \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$ *são complexas e* $a \in \mathbb{R}$, *então*
   - *(a)* $RT \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$ *é complexa e, além disso,* $\widetilde{RT} = \widetilde{R}\widetilde{T}$.
   - *(b)* $aR + T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ *é complexa e, além disso,* $\widetilde{aR + T} = a\widetilde{R} + \widetilde{T}$.
   - *(c)* T *é isomorfismo se, e somente se,* $\widetilde{T}$ *é isomorfismo.*
3. *Se* $R \in \mathcal{L}((V_1)_{J_1}, (V_2)_{J_2})$, *então existe uma única* $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ *complexa tal que* $\widetilde{T} = R$. *Além disso,* R *é isomorfismo se, e somente se,* T *é isomorfismo.*

Demonstração: As igualdades, na segunda afirmação, dos itens 1., 2*(a)* e 2*(b)* seguem direto da definição em (2.4). Como a aplicação identidade comuta com qualquer operador segue, em particular, que comuta com J_1 e, assim, Id_{V_1} é complexa, o que mostra o item 1. Utilizando que T e R são complexas juntamente com a associatividade de composição de aplicações, segue que

$$(RT)J_1 = R(TJ_1) = R(J_2T) = (RJ_2)T = (J_3R)T = J_3(RT)$$

e, desta forma, RT é complexa, o que conclui o item $2(a)$. Para provar $2(b)$, notemos, utilizando que T e R são complexas juntamente com a distributividade da composição em relação à adição de aplicações, que

$$(aR + T)J_1 = a(RJ_1) + TJ_1 = a(J_2R) + J_2T = J_2(aR) + J_2T = J_2(aR + T).$$

Logo, $aR + T$ é complexa. Para o item $2(c)$, notemos que T é bijetiva se, e somente se, $\widetilde{T}$ é bijetiva e, assim, se T é complexa, então T é isomorfismo se, e somente se, $\widetilde{T}$ é isomorfismo, pela Proposição 2.7. Por fim, para mostrar o item 3., seja $R \in \mathcal{L}((V_1)_{J_1}, (V_2)_{J_2})$. Consideremos a aplicação $T\colon V_1 \to V_2$, entre os respectivos espaços reais, cuja lei de formação é a mesma de R. Pela definição em (2.4), tem-se que $\widetilde{T} = R$ e, assim, pela Proposição 2.7, T é complexa. Se $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ é complexa e $\widetilde{S} = R$, então $\widetilde{S} = \widetilde{T}$ e, pela definição em (2.4), segue que $S = T$, demostrando a unicidade de T. A última afirmação é consequência do item $2(c)$. $\square$

Sejam (V, J) um espaço com estrutura complexa e W um espaço vetorial complexo. Consideremos em $W_{\mathbb{R}}$ a estrutura complexa $\widetilde{J}$ que é dada pela multiplicação por i (veja o Exemplo 2.4). Denotemos por $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(V, W_{\mathbb{R}})$ o conjunto de todas as transformações $\mathbb{R}$-lineares de V em $W_{\mathbb{R}}$ que são complexas, isto é, $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(V, W_{\mathbb{R}})$ se, e somente se, T é linear e $TJ = \widetilde{J}T$. Pela Proposição 2.8, item $2(b)$, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(V, W_{\mathbb{R}})$ é um espaço vetorial real.

Corolário 2.9. *Os espaços $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(V, W_{\mathbb{R}})$ e $\mathcal{L}(V_J, W)$ são canonicamente isomorfos, como espaços vetoriais reais.*

Demonstração: A aplicação $\Phi\colon \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(V, W_{\mathbb{R}}) \to \mathcal{L}(V_J, W)$ dada por $\Phi(T) = \widetilde{T}$ é bem definida, pela Proposição 2.7, e é linear, pela Proposição 2.8 item $2(b)$. Além disso, Φ é bijetiva pela Proposição 2.8 item 3. Portanto, Φ é isomorfismo. $\square$

Dizemos que dois espaços com estruturas complexas (V_1, J_1) e (V_2, J_2) são ***isomorfos*** quando existe um isomorfismo linear $T\colon V_1 \to V_2$ tal que $TJ_1 = J_2T$ e, neste caso, usamos a notação $(V_1, J_1) \simeq (V_2, J_2)$.

Teorema 2.10. *Se (V_1, J_1) e (V_2, J_2) são espaços com estruturas complexas, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *V_1 e V_2 são isomorfos.*

2. *(V_1, J_1) e (V_2, J_2) são isomorfos.*

3. *$(V_1)_{J_1}$ e $(V_2)_{J_2}$ são isomorfos.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.6, existem subespaços U_k de V_k, $k \in \{1, 2\}$, tais que $V_k = U_k \oplus J_k(U_k)$. Além disso, se $\mathcal{B}_k$ é base U_k, então $\mathcal{B}_k^{J_k} = \mathcal{B}_k \cup J_k(\mathcal{B}_k)$ é base de V_k. Suponhamos que $V_1 \simeq V_2$. Assim, $U_1 \simeq U_2$. De fato, se V_1 e V_2 são finitamente gerados, então $2 \dim U_1 = \dim V_1 = \dim V_2 = 2 \dim U_2$, já que $\dim U_k = \dim J(U_k)$ e, assim, $U_1 \simeq U_2$. Por outro lado, se V_1 e V_2 têm dimensão infinita, então $U_1 \simeq V_1 \simeq V_2 \simeq U_2$. Logo, existe uma aplicação bijetiva $\phi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$. Seja $T\colon V_1 \to V_2$ a transformação linear tal que

$$T(u) = \phi(u) \text{ e } T(J_1(u)) = J_2(\phi(u)),\ u \in \mathcal{B}_1.$$

Como T leva base de V_1 em base de V_2 segue que T é isomorfismo. Além disso, para todo $u \in \mathcal{B}_1$,

$$TJ_1(u) = J_2(\phi(u)) = J_2T(u)$$

e

$$TJ_1(J_1(u)) = -T(u) = -\phi(u) = J_2(J_2(\phi(u))) = J_2T(J_1(u)).$$

Logo, TJ_1 e J_2T são lineares e coincidem na base $\mathcal{B}_1^{J_1}$ e, assim, $TJ_1 = J_2T$. Portanto, (V_1, J_1) e (V_2, J_2) são isomorfos, o que mostra que 1. implica 2.

Suponhamos que (V_1, J_1) e (V_2, J_2) são isomorfos e seja $T\colon V_1 \to V_2$ isomorfismo tal que $TJ_1 = J_2T$. Pela Proposição 2.8, item $2(c)$, $\widetilde{T}\colon (V_1)_{J_1} \to (V_2)_{J_2}$ é isomorfismo $\mathbb{C}$-linear, mostrando que 2. implica 3.

Por fim, para mostrar que 3. implica 1. seja $\mathcal{B}_k$ base de $(V_k)_{J_k}$, $k \in \{1, 2\}$. Pela Proposição 2.5, $(\mathcal{B}_k)_{J_k}$ é base de V_k. Se $(V_1)_{J_1} \simeq (V_2)_{J_2}$, então existe uma aplicação bijetiva $\phi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$. Logo, $\widehat{\phi}\colon (\mathcal{B}_1)_{J_1} \to (\mathcal{B}_2)_{J_2}$ definida por

$$\widehat{\phi}(u) = \phi(u) \text{ e } \widehat{\phi}(J_1(u)) = J_2(\phi(u)),\ u \in \mathcal{B}_1$$

é uma aplicação bijetiva, o que mostra que V_1 e V_2 são isomorfos e conclui a demonstração. □

Corolário 2.11. *Se (V, J) é um espaço com estrutura complexa,* $\dim V = 2n$*, e J_0 é a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$, então*

1. *(V, J) e $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$ são isomorfos.*
2. *V_J e $\mathbb{C}^n$ são espaços complexos isomorfos.*

3 Existência e unicidade de estruturas complexas

O objetivo principal, nesta seção, é caracterizar os espaços vetoriais reais que admitem alguma estrutura complexa e discutir o problema de unicidade de estrutura complexa num espaço vetorial real. Alguns resultados, para espaços de dimensão par, podem ser encontrados em [1, 6, 9, 11].

Teorema 3.1. *Se V é um espaço vetorial real, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *V admite uma estrutura complexa.*
2. *Existem subespaços U_1 e U_2 de V tais que $V = U_1 \oplus U_2$ com $U_1 \simeq U_2$.*
3. *Existe uma base $\mathcal{B}$ de V que pode ser decomposta numa união disjunta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ tal que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração: A condição 1. implica 2., pelo Corolário 2.6. Para mostrar que 2. implica 3., sejam $\mathcal{B}_1$ uma base de U_1 e $T \in \mathcal{L}(U_1, U_2)$ um isomorfismo. Assim, o conjunto $\mathcal{B}_2 := T(\mathcal{B}_1)$ tem as seguintes propriedades: é uma base de U_2 (pois isomorfismo leva base em base), tem a mesma cardinalidade de $\mathcal{B}_1$ (já que a restrição $T|_{\mathcal{B}_1}\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ é bijetiva) e $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ (visto que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$). Além disso, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de V. Por fim, suponhamos que vale a condição 3. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V que se decompõe numa união disjunta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ tal que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ têm a mesma cardinalidade. Seja $\xi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ uma aplicação bijetiva. A transformação linear $J\colon V \to V$ tal que

$$J(v) = \begin{cases} \xi(v), & \text{se} \quad v \in \mathcal{B}_1 \\ -\xi^{-1}(v), & \text{se} \quad v \in \mathcal{B}_2 \end{cases}$$

é uma estrutura complexa em V, o que conclui a demonstração. $\square$

Teorema 3.2. *Seja V um espaço vetorial real.*

1. *Se V é finitamente gerado, então V admite uma estrutura complexa se, e somente se, V tem dimensão par.*

2. *Se V tem dimensão infinita, então V admite uma estrutura complexa.*

Demonstração: O item 1. é consequência direta do Teorema 3.1. Para o item 2., seja $\mathcal{B}$ uma base de V. Como $\mathcal{B}$ é um conjunto infinito, existem subconjuntos disjuntos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$ tais que $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Portanto, pelo Teorema 3.1, V admite uma estrutura complexa. $\square$

Denotemos por $\Re\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ a aplicação parte real, isto é, $\Re(a + ib) = a$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

Dados um número inteiro positivo n e um espaço vetorial real V de dimensão $2n$, existe, pelo Teorema 3.2, uma estrutura complexa J em V. Além disso, vale o seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Se (V, J) é um espaço com estrutura complexa, $\dim V = 2n$, $\mathcal{B}$ é uma base de V_J e $T \in \mathcal{L}(V)$ é complexa, então as matrizes de J e de T na base ordenada $\mathcal{B}_J$ são dadas por*

$$[J]_{\mathcal{B}_J} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad [T]_{\mathcal{B}_J} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix},$$

sendo X e Y matrizes com entradas reais tais que $[\widetilde{T}]_{\mathcal{B}} = X + iY$. Além disso,

1. $\operatorname{tr}([T]_{\mathcal{B}_J}) = 2\Re(\operatorname{tr}([\widetilde{T}]_{\mathcal{B}}))$.

2. $\det([T]_{\mathcal{B}_J}) = |\det([\widetilde{T}]_{\mathcal{B}})|^2$.

Demonstração: A primeira afirmação segue da definição da base $\mathcal{B}_J$. O item 1. é consequência da forma da matriz $[T]_{\mathcal{B}_J}$, em função de $[\widetilde{T}]_{\mathcal{B}}$. Para mostrar o item 2., notemos que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, multiplicando a linha $n + j$, de $[T]_{\mathcal{B}_J}$, por i e somando à linha j e, depois disso, multiplicando a coluna j, da matriz obtida no passo anterior, por $-i$ e somando à coluna $n + j$ obtemos

$$\begin{pmatrix} X + iY & 0 \\ Y & X - iY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\widetilde{T}]_{\mathcal{B}} & 0 \\ Y & \overline{[\widetilde{T}]_{\mathcal{B}}} \end{pmatrix}.$$

Como essas operações não alteram o determinante, tem-se

$$\det([T]_{\mathcal{B}_J}) = \det \begin{pmatrix} [\widetilde{T}]_{\mathcal{B}} & 0 \\ Y & \overline{[\widetilde{T}]_{\mathcal{B}}} \end{pmatrix} = \det([\widetilde{T}]_{\mathcal{B}})\overline{\det([\widetilde{T}]_{\mathcal{B}})} = |\det([\widetilde{T}]_{\mathcal{B}})|^2,$$

concluindo a demonstração. □

Em geral não se tem unicidade de estrutura complexa num espaço vetorial. De fato, se J_0 é a estrutura canônica de $\mathbb{R}^{2n}$, então $-J_0$ é uma estrutura complexa em $\mathbb{R}^{2n}$, diferente de J_0. Por outro lado, o automorfismo $T\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definido por $T(u, v) = (u, -v)$ é tal que $J_0 T = T(-J_0)$. Logo, os espaços $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$ e $(\mathbb{R}^{2n}, -J_0)$ são isomorfos, isto é, as estruturas J_0 e $-J_0$ são equivalentes, no seguinte sentido: dizemos que duas estruturas complexas J_1 e J_2, num espaço vetorial V, são ***equivalentes*** quando os espaços (V, J_1) e (V, J_2) são isomorfos. Como consequência direta do Teorema 2.10, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Duas estruturas complexas num mesmo espaço vetorial real são equivalentes.*

4 O conjunto das estruturas complexas como espaço homogêneo

É bem conhecido que para espaços vetoriais reais de dimensão par, o conjunto das estruturas complexas se identifica com um espaço homogêneo do grupo linear geral (veja [9, 11]). Nesta seção, generalizamos este resultado para espaços vetoriais reais de dimensão infinita e expomos demonstrações detalhadas para espaços de dimensão par.

Dado um espaço vetorial V, denotemos por $\mathrm{Gl}(V)$ o grupo dos automorfismos de V, com a composição de aplicações. No caso em que (V, J) é um espaço com estrutura complexa, denotemos por $\mathcal{J}(V)$ o conjunto das estruturas complexas em V e por $\mathrm{G}(V, J)$

o subconjunto de $\mathrm{Gl}(V)$ definido por

$$\mathrm{G}(V, J) = \{g \in \mathrm{Gl}(V) : gJ = Jg\}.$$

Lema 1. *Se (V, J) é um espaço com estrutura complexa, então:*

1. $\phi J \phi^{-1} \in \mathcal{J}(V_1)$*, se* $\phi \colon V \to V_1$ *é um isomorfismo.*
2. $gJg^{-1} \in \mathcal{J}(V)$ *para todo* $g \in \mathrm{Gl}(V)$.
3. $\mathrm{G}(V, J)$ *é um subgrupo de* $\mathrm{Gl}(V)$.
4. $\mathrm{G}(V, J)$ *e* $\mathrm{Gl}(V_J)$ *são grupos isomorfos.*

Demonstração: O item 1. segue de $\phi J \phi^{-1} \in \mathrm{Gl}(V_1)$ e $(\phi J \phi^{-1})^2 = \phi J^2 \phi^{-1} = -\mathrm{Id}_{V_1}$; e 2. é um caso particular de 1. Por fim, os itens 3. e 4. são consequências diretas da Proposição 2.8. □

Consideremos a aplicação

$$\alpha \colon \mathrm{Gl}(V) \times \mathcal{J}(V) \to \mathcal{J}(V), \ \ (g, J) \mapsto gJg^{-1}. \tag{4.1}$$

Pelo Lema 1, α é bem definida e, além disso, vale o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *A aplicação α, definida em (4.1), é uma ação transitiva de* $\mathrm{Gl}(V)$ *em* $\mathcal{J}(V)$*. Além disso, dado* $J \in \mathcal{J}(V)$ *o grupo de isotropia de J é* $\mathrm{G}(V, J)$*. Em particular, existe uma bijeção entre* $\mathcal{J}(V)$ *e o conjunto das classe laterais* $\mathrm{Gl}(V)/\,\mathrm{G}(V, J)$.

Demonstração: Notemos que α tem as seguintes propriedades:

- $\alpha(\mathrm{Id}_V, J) = \mathrm{Id}_V\, J\, \mathrm{Id}_V^{-1} = J$, e
- $\alpha(gh, J) = (gh)J(gh)^{-1} = g(hJh^{-1})g^{-1} = g\alpha(h, J)g^{-1} = \alpha(g, \alpha(h, J))$.

Logo, α é uma ação de $\mathrm{Gl}(V)$ em $\mathcal{J}(V)$. Além disso, dados $J_1, J_2 \in \mathcal{J}(V)$ segue, do Teorema 2.10, que existe $g \in \mathrm{Gl}(V)$ tal que $\alpha(g, J_1) = gJ_1g^{-1} = J_2$, o que mostra que α é transitiva. Fixando $J \in \mathcal{J}(V)$, o grupo de isotropia de J, G_J, é por definição

$$G_J = \{g \in \mathrm{Gl}(V) : gJg^{-1} = J\} = \{g \in \mathrm{Gl}(V) : gJ = Jg\} = G(V, J).$$

Por fim, a bijeção entre os conjuntos $\mathcal{J}(V)$ e $\mathrm{Gl}(V)/\,\mathrm{G}(V, J)$ é um resultado geral (veja, por exemplo, [13], Proposição 2.19). Para uma demonstração disto, basta notar que a aplicação $\phi \colon \ \mathrm{Gl}(V)/\,\mathrm{G}(V, J) \to \mathcal{J}(V)$ definida por $\phi(g\,\mathrm{G}(V, J)) = gJg^{-1}$ é uma bijeção. De fato, para mostrar que é bem definida sejam g_1 e g_2 dois elementos que representam a mesma classe lateral. Assim, $g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{G}(V,J)$. Logo, $(g_2^{-1}g_1)J(g_2^{-1}g_1)^{-1} = J$, implicando que

$$\phi(g_1\,\mathrm{G}(V,J)) = g_1Jg_1^{-1} = g_2Jg_2^{-1} = \phi(g_2\,\mathrm{G}(V,J)).$$

Sejam, agora, g_1 e g_2 tais que $\phi(g_1\,\mathrm{G}(V,J)) = \phi(g_2\,\mathrm{G}(V,J))$. Assim, $g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{G}(V,J)$, isto é, $g_1\,\mathrm{G}(V,J) = g_2\,\mathrm{G}(V,J)$, mostrando que ϕ é injetiva. Por fim, a sobrejetividade de ϕ segue da transitividade da ação. □

Se $V = \mathbb{R}^{2n}$ e J_0 é a estrutura complexa canônica em $\mathbb{R}^{2n}$, então $\mathbb{R}^{2n}_{J_0} \simeq \mathbb{C}^n$ (veja o Exemplo 2.1) e, consequentemente, $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{2n}_{J_0}) \simeq \mathrm{Gl}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$. Denotando por $[J_0]$ a matriz de J_0 na base $\mathcal{B}_{J_0}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ (veja o Exemplo 2.1), consideremos o seguinte conjunto de matrizes em $\mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R})$,

$$\mathrm{G}(2n,J_0) = \{A \in \mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R}) : A[J_0] = [J_0]A\}.$$

O conjunto $\mathrm{G}(2n,J_0)$ é um subgrupo de $\mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R})$ e, pelo Lema 1,

$$\mathrm{G}(2n,J_0) \simeq \mathrm{G}(\mathbb{R}^{2n},J_0) \simeq \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{2n}_{J_0}) \simeq \mathrm{Gl}(n,\mathbb{C}), \tag{4.2}$$

isto é, $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$ é identificado com o subgrupo $\mathrm{G}(2n,J_0)$ de $\mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R})$ e, além disso, $\mathrm{G}(2n,J_0)$ é descrito como no seguinte resultado.

Proposição 4.2. *Vale a seguinte igualdade*

$$\mathrm{G}(2n,J_0) = \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}(2n,\mathbb{R}) : X, Y \in M(n,\mathbb{R}) \right\}.$$

Demonstração: Dado $A \in \mathrm{G}(2n,J_0)$, escreva $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix}$, com $X,Y,Z,W \in M(n,\mathbb{R})$. Assim,

$$\begin{pmatrix} Z & -X \\ W & -Y \end{pmatrix} = A[J_0] = [J_0]A = \begin{pmatrix} -Y & -W \\ X & Z \end{pmatrix}.$$

Logo, $Z = -Y$ e $W = X$, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente,

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y & -X \\ X & -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix},$$

concluindo a demonstração. □

Pelas expressões em (4.2) existe uma identificação entre os grupos $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{G}(2n, J_0)$. Utilizando a Proposição 4.2, uma identificação é dada no seguinte resultado.

Proposição 4.3. *A aplicação* $\Phi\colon \ \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{G}(2n, J_0)$ *dada por*

$$\Phi(X + iY) = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração: Notemos, inicialmente, que se $X, Y, Z, W \in M(n, \mathbb{R})$, então

$$(X + iY)(Z + iW) = XZ - YW + i(XW + YZ)$$

e

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & -W \\ W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XZ - YW & -(XW + YZ) \\ XW + YZ & XZ - YW \end{pmatrix}.$$

Logo, dados $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$ segue que $X + iY$ é invertível se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

é invertível, isto é, Φ é bem definida e sobrejetiva. Além disso, pelas duas igualdades acima

$$\Phi((X + iY)(Z + iW)) = \Phi(X + iY)\Phi(Z + iW),$$

o que mostra que Φ é homomorfismo de grupos. Por fim, se $\Phi(X + iY)$ é a matriz identidade, então, por definição de Φ, tem-se que $X = I_n$ e $Y = 0$, isto é, o núcleo de Φ é trivial e, assim, Φ é injetiva. Portanto, Φ é isomorfismo de grupos. □

Corolário 4.4. *Sejam* V *e* V_1 *espaços vetoriais reais. Se* V *e* V_1 *são isomorfos, então existe uma aplicação bijetiva entre* $\mathcal{J}(V)$ *e* $\mathcal{J}(V_1)$. *Em particular, se* $\dim V = 2n$, *então existe uma bijeção entre* $\mathcal{J}(V)$ *e* $\mathrm{Gl}(2n, \mathbb{R}) / \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$.

Demonstração: Seja $\phi\colon V \to V_1$ um isomorfismo. Pelo Lema 1, a aplicação $\Phi\colon \mathcal{J}(V) \to \mathcal{J}(V_1)$ dada por $\Phi(J) = \phi J \phi^{-1}$ é bem definida. Além disso, $\Psi\colon \mathcal{J}(V_1) \to \mathcal{J}(V)$ dada por $\Psi(J_1) = \phi^{-1} J_1 \phi$ é inversa de Φ, o que mostra que Φ é uma bijeção. A última afirmação é consequência da primeira, do Teorema 4.1 e da Proposição 4.3. □

5 Induzindo estruturas complexas

Um dos objetivos nesta seção é construir estruturas complexas em alguns ambientes diferentes, a partir de estrutura(s) complexa(s) dada(s). No caso em que o espaço é finitamente gerado, alguns resultados podem ser encontrados em [5, 9].

Proposição 5.1. *Se (V, J) é um espaço com estrutura complexa e V^* é o dual de V, então a aplicação transposta $J^*\colon V^* \to V^*$, dada por $J^*(\xi) = \xi J$, é uma estrutura complexa em V^*.*

Demonstração: Basta notar que J^* é linear e $(J^*)^2(\xi) = \xi J^2 = -\xi$, para todo $\xi \in V^*$. □

Proposição 5.2. *Se (V_1, J_1) e (V_2, J_2) são espaços com estruturas complexas, então a aplicação $J\colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$, dada por $J(v_1, v_2) := (J_1(v_1), J_2(v_2))$, é uma estrutura complexa em $V_1 \oplus V_2$.*

Demonstração: Basta notar que J é linear e $J^2(v_1, v_2) = (J_1^2(v_1), J_2^2(v_2)) = -(v_1, v_2)$, para todos $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. □

O conceito que será apresentado a seguir, denominado estrutura complexa generalizada, foi introduzido por Nigel Hitchin em [7] e posteriormente desenvolvido por Marco Gualtieri em [5]. Uma de suas vantagens consiste em estudar Geometrias Complexa e Simplética em um ambiente comum. A seguir, apresentamos a definição para espaços vetoriais. Um tratamento mais detalhado pode ser encontrado nos Capítulos 2 e 4 de [5].

Seja V um espaço vetorial real. Consideremos o espaço $V \oplus V^*$ munido da seguinte forma

$$\langle (u, \xi), (v, \eta) \rangle := \xi(v) + \eta(u),$$

onde $u, v \in V$ e $\xi, \eta \in V^*$. A forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bilinear, simétrica e não degenerada.

Proposição 5.3. *Se $\phi\colon V \to V$ é linear, então o operador $\Phi\colon V \oplus V^* \to V \oplus V^*$ definido por*

$$\Phi(u, \xi) = (-\phi(u), \phi^*(\xi)),$$

sendo ϕ^* a transposta de ϕ, é linear e antissimétrico em relação à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração: A aplicação Φ é linear, uma vez que suas coordenadas são lineares. Além disso, dados (u,ξ) e (v,η) em $V \oplus V^*$,

$$\begin{aligned}\langle \Phi(u,\xi),(v,\eta)\rangle &= \langle(-\phi(u),\phi^*(\xi)),(v,\eta)\rangle = \phi^*(\xi)(v) - \eta(\phi(u)) \\ &= -\xi(-\phi(v)) - \phi^*(\eta)(u) = -\langle(u,\xi),(-\phi(v),\phi^*(\eta))\rangle \\ &= \langle(u,\xi),-\Phi(v,\eta)\rangle.\end{aligned}$$

Logo, Φ é um operador antissimétrico, em relação à forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Uma ***estrutura complexa generalizada*** em V é uma estrutura complexa $\mathcal{J}$ em $V \oplus V^*$ tal que $\mathcal{J}$ é antissimétrica, em relação à forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pela Proposição 5.4 uma estrutura complexa em V induz uma estrutura complexa generalizada em V.

Proposição 5.4. *Se (V,J) é um espaço com estrutura complexa, então $\mathcal{J}_J\colon V \oplus V^* \to V \oplus V^*$, definida por $\mathcal{J}_J(u,\xi) = (-J(u),J^*(\xi))$, é uma estrutura complexa generalizada em V.*

Demonstração: Como $-J$ e J^* são estruturas complexas em V e V^*, respectivamente, pela Proposição 5.1, segue, da Proposição 5.2, que $\mathcal{J}_J$ é uma estrutura complexa em $V \oplus V^*$. Além disso, $\mathcal{J}_J$ é antissimétrica, em relação à forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$, pela Proposição 5.3. Portanto, $\mathcal{J}_J$ é uma estrutura complexa generalizada em V. □

Uma ***estrutura simplética*** em V é uma forma bilinear, antissimétrica e não degenerada $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Um ***espaço com estrutura simplética*** é um par (V,ω) em que V é um espaço vetorial real e ω é uma estrutura simplética em V. Seja (V,ω) um espaço com estrutura simplética. Consideremos a aplicação linear $\omega_*\colon V \to V^*$ definida por $\omega_*(u)(v) = \omega(u,v)$. Como ω é não degenerada, segue que ω_* é injetiva. Além disso, se V é finitamente gerado, então ω_* é um isomorfismo. Neste caso a inversa $\omega_*^{-1}\colon V^* \to V$ é dada por $\xi(u) = \omega(\omega_*^{-1}(\xi),u)$, para todos $u \in V$ e $\xi \in V^*$.

Proposição 5.5. *Se (V,ω) é um espaço com estrutura simplética, sendo V finitamente gerado, então a aplicação $\mathcal{J}_\omega\colon V\oplus V^* \to V\oplus V^*$, definida por $\mathcal{J}_\omega(u,\xi) = (-\omega_*^{-1}(\xi),\omega_*(u))$, é uma estrutura complexa generalizada em V.*

Demonstração: Se $(u,\xi) \in V \oplus V^*$, então

$$\mathcal{J}_\omega^2(u,\xi) = \mathcal{J}_\omega(-\omega_*^{-1}(\xi),\omega_*(u)) = (-\omega_*^{-1}(\omega_*(u)),-\omega_*(\omega_*^{-1}(\xi))) = -(u,\xi).$$

Logo, $\mathcal{J}_\omega$ é uma estrutura complexa em $V \oplus V^*$. Além disso, dados (u,ξ) e (v,η) em

$V \oplus V^*$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}_\omega(u,\xi),(v,\eta)\rangle &= \langle(-\omega_*^{-1}(\xi),\omega_*(u)),(v,\eta)\rangle = \omega_*(u)(v) - \eta(\omega_*^{-1}(\xi)) \\
&= \omega(u,v) - \omega(\omega_*^{-1}(\eta),\omega_*^{-1}(\xi)) = -\{\omega(v,u) - \omega(\omega_*^{-1}(\xi),\omega_*^{-1}(\eta))\} \\
&= -\{\omega_*(v)(u) - \xi(\omega_*^{-1}(\eta))\} = -\langle (u,\xi),(-\omega_*^{-1}(\eta),\omega_*(v))\rangle \\
&= \langle (u,\xi), -\mathcal{J}_\omega(v,\eta)\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{J}_\omega$ é antissimétrica, em relação à forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 5.6. Utilizando a linguagem da álgebra linear simplética é possível caracterizar as estruturas complexas generalizadas em V por meio de subespaços isotrópicos do complexificado $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ (vide [5, Proposition 4.3]).

Considerando $\mathbb{C}$ como espaço vetorial real, tem-se que a aplicação $\Re$, definida na Página 10, é linear.

Proposição 5.7. *Se (V,J) é um espaço com estrutura complexa, então a aplicação $\phi\colon (V_J)^*_{\mathbb{R}} \to V^*$, dada por $\phi(f) = \Re f$, é um isomorfismo entre os espaços $((V_J)^*_{\mathbb{R}}, \widetilde{J})$ e (V^*, J^*). Em particular, $\widetilde{\phi}\colon (V_J)^* \to (V^*)_{J^*}$ é um isomorfismo canônico.*

Demonstração: Como $\Re$ é linear segue que ϕ é linear. Se $f \in (V_J)^*_{\mathbb{R}}$, $f \neq 0$, então existe $v \in V_J$ tal que $f(v) = 1$. Assim, $\phi(f)(v) = \Re(f(v)) = 1$, o que mostra que f não está no núcleo de ϕ e, assim, ϕ é injetiva. Dado $g \in V^*$, seja $\widetilde{g}\colon V_J \to \mathbb{C}$ a função definida por $\widetilde{g} = g - igJ$. Se $v \in V$, então

$$\widetilde{g}(iv) = \widetilde{g}(J(v)) = g(J(v)) - ig(J^2(v)) = gJ(v) + ig(v) = i(g(v) - igJ(v)) = i\widetilde{g}(v).$$

Assim, $\widetilde{g} \in (V_J)^*$, já que $\widetilde{g}$ é $\mathbb{R}$-linear. Como $g(v)$ e $g(J(v))$ são números reais, para todo $v \in V$, segue que $\phi(\widetilde{g}) = g$. Logo, ϕ é sobrejetiva.

Além disso, para todos $v \in V$ e $f \in (V_J)^*$, como $\widetilde{J}(f) = if$, segue que

$$\begin{aligned}
J^*\phi(f)(v) &= \Re(fJ)(v) = \Re(f(iv)) = \Re(if(v)) = \Re(\widetilde{J}(f)(v)) \\
&= \phi(\widetilde{J}(f))(v) = \phi\widetilde{J}(f)(v),
\end{aligned}$$

isto é, $J^*\phi = \phi\widetilde{J}$. Portanto, ϕ é um isomorfismo entre os espaços $((V_J)^*_{\mathbb{R}}, \widetilde{J})$ e (V^*, J^*). Em particular, $\widetilde{\phi}\colon (V_J)^* \to (V^*)_{J^*}$ é isomorfismo, pela Proposição 2.8. $\square$

Teorema 5.8. *Sejam (V,J) um espaço com estrutura complexa e X um conjunto não vazio. Se $\xi\colon X \to V$ é uma aplicação bijetiva, então*

1. *Existe uma única estrutura de espaço vetorial real em X tal que ξ é um isomorfismo.*

2. *Existe uma única estrutura complexa $J_\star$ em X tal que $J\xi = \xi J_\star$.*

3. *$X_{J_\star}$ e V_J são isomorfos como espaços vetoriais complexos.*

Demonstração: Dados $x, y \in X$ e $a \in \mathbb{R}$, defina

$$x + y := \xi^{-1}(\xi(x) + \xi(y)) \;\text{ e }\; a \cdot x := \xi^{-1}(a\xi(x)).$$

Assim,

$$\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y) \;\text{ e }\; \xi(a \cdot x) = a\xi(x)$$

para quaisquer $x, y \in X$ e $a \in \mathbb{R}$. Isso define uma estrutura de espaço vetorial em X e, além disso, ξ é um isomorfismo. Sejam $\oplus$ e $\odot$ operações de adição e multiplicação por escalar, respectivamente, em X, tais que ξ é isomorfismo. Se $x, y \in X$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y) = \xi(x \oplus y) \;\text{ e }\; \xi(a \cdot x) = a\xi(x) = \xi(a \odot x).$$

Como ξ é injetiva segue que $x + y = x \oplus y$ e $a \cdot x = a \odot y$, o que implica na unicidade das operações e demonstra o item 1. Para mostrar o item 2., basta notar que $J_\star$ definida por $J_\star = \xi^{-1}J\xi$ é uma estrutura complexa em X com a propriedade enunciada. De fato, $J_\star^2 = \xi^{-1}J^2\xi = -\operatorname{Id}_X$. Além disso, se $H \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\xi H = J\xi$, então $H = \xi^{-1}J\xi = J_\star$. Por fim, o item 3. segue de 1., 2. e do Teorema 2.10. $\square$

A Proposição 5.9 estabelece uma condição suficiente para que uma estrutura complexa num espaço vetorial V induza uma estrutura complexa num subespaço U e no espaço quociente V/U.

Proposição 5.9. *Se (V, J) é um espaço com estrutura complexa e U é um subespaço de V, invariante por J, então J induz uma estrutura complexa em U e uma estrutura complexa no espaço quociente V/U.*

Demonstração: Como U é invariante por J, segue que a restrição $J|_U\colon U \to U$ é bem definida. Além disso, $(J|_U)^2 = J^2|_U = -\operatorname{Id}_V|_U = -\operatorname{Id}_U$. Logo, $J|_U$ é uma estrutura complexa em U, o que mostra a primeira afirmação. Para a segunda, consideremos a aplicação quociente $\overline{J}\colon V/U \to V/U$ dada por $\overline{J}(\overline{v}) := \overline{J(v)}$, sendo $\overline{v}$ a classe lateral de $v \in V$. A boa definição de $\overline{J}$ segue da invariância de U por J e a linearidade segue das propriedades das operações em V/U. Além disso, $(\overline{J})^2 = \overline{J^2} = \overline{-\operatorname{Id}_V} = -\operatorname{Id}_{V/U}$, o que prova que $\overline{J}$ é uma estrutura complexa em V/U e conclui a demonstração. $\square$

Proposição 5.10. *Sejam* (V_1, J_1) *e* (V_2, J_2) *espaços com estruturas complexas. Se* $\phi\colon V_1 \to V_2$ *é uma transformação linear complexa, isto é,* $\phi J_1 = J_2\phi$*, então* J_2 *induz uma estrutura complexa no espaço quociente* $V_2/\phi(V_1)$*.*

Demonstração: Como ϕ é complexa, tem-se $J_2(\phi(v)) = J_2\phi(v) = \phi J_1(v) = \phi(J_1(v)) \in \phi(V_1)$, para todo $v \in V_1$. Logo, $\phi(V_1)$ é invariante por J_2. Pela Proposição 5.9, J_2 induz uma estrutura complexa em $V_2/\phi(V_1)$. $\square$

Seja V um espaço vetorial real. Consideremos os espaços dual V^* e bidual V^{**} de V. A aplicação

$$\Omega\colon V \to V^{**} \quad \text{dada por} \quad \Omega(v) = v^\sharp, \tag{5.1}$$

onde $v^\sharp\colon V^* \to \mathbb{R}$ é o funcional de avaliação em v, isto é, $\Omega(v)(\xi) = v^\sharp(\xi) = \xi(v)$, para todos $\xi \in V^*$ e $v \in V$, é uma transformação linear injetiva. Logo, o espaço V é identificado com o subespaço $\Omega(V)$ de V^{**}. Se V é finitamente gerado, então Ω é isomorfismo e, assim, $\Omega(V) = V^{**}$. Caso contrário, $\Omega(V)$ é um subespaço próprio de V^{**} (vide [12, Theorem 3.12, p. 97]).

Teorema 5.11. *Se* (V, J) *é um espaço com estrutura complexa, de dimensão infinita, então* J *induz uma estrutura complexa no espaço quociente* $V^{**}/\Omega(V)$*, sendo* Ω *a aplicação definida em (5.1).*

Demonstração: Pela Proposição 5.1, J induz uma estrutura complexa J^{**}, em V^{**}, dada por $J^{**}(\varphi) = \varphi J^*$. Além disso,

$$\begin{aligned}(J^{**}\Omega(v))(\xi) &= (\Omega(v)J^*)(\xi) = \Omega(v)(J^*(\xi)) = (\xi J)(v) = \xi(J(v)) \\ &= \Omega(J(v))(\xi) = (\Omega J(v))(\xi),\end{aligned}$$

para todo $\xi \in V^*$, o que implica em $J^{**}\Omega(v) = \Omega J(v)$, para todo $v \in V$. Logo, $J^{**}\Omega = \Omega J$. Portanto, pela Proposição 5.10, J^{**} induz uma estrutura complexa no espaço quociente $V^{**}/\Omega(V)$. $\square$

É usual escrever V no lugar de $\Omega(V)$, pela identificação $V \simeq \Omega(V)$, e considerar V como um subespaço de V^{**}. Com essa notação, pelo Teorema 5.11, uma estrutura complexa em V induz uma estrutura complexa em V^{**}/V, se V é de dimensão infinita.

No caso em que E é um espaço vetorial topológico sobre os reais, uma estrutura complexa em E é um operador linear contínuo J tal que $J^2 = -\operatorname{Id}_E$. Neste caso, o dual topológico de E, denotado por E', é o conjunto dos funcionais lineares contínuos em E e o bidual topológico, denotado por E'', é o dual topológico de E'. Em contraste com o

Teorema 3.2, nem todo espaço vetorial topológico de dimensão infinita admite uma estrutura complexa. De fato, na década de 1950, Jean Dieudonné exibiu, em [2], um espaço de Banach de dimensão infinita que não admite estrutura complexa. A ideia é usar um espaço de Banach real E, construído por Robert Clarke James (vide [3, p.185]), tal que a dimensão do espaço vetorial topológico real E''/E é igual a 1. Por outro lado, Dieudonné mostrou que se E admite alguma estrutura complexa, então o espaço quociente E''/E é um espaço vetorial complexo não trivial e, portanto, a sua dimensão real é maior ou igual do que 2. Portanto, o espaço de Banach E, construído por James, não admite estrutura complexa. No entanto, nos espaços de Banach clássicos $\mathfrak{c}_0(\mathbb{N},\mathbb{R}), C([0,1],\mathbb{R}), \ell_p(\mathbb{N},\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, e $L^p([0,1],\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, existe uma única estrutura complexa, a menos de equivalência (vide [4, Corollary 29]).

6 Conclusão

O trabalho organizou resultados conhecidos relacionados a estruturas complexas em espaços vetoriais reais, contribuindo com demonstrações completas, mostrando, inclusive, que alguns deles continuam válidos no contexto algébrico de dimensão infinita. Embora pouco usual em textos introdutórios de Álgebra Linear, fizemos uma descrição do conjunto das estruturas complexas como espaço homogêneo do grupo linear geral. Além disso, abordamos como construir estruturas complexas em alguns ambientes diferentes a partir de estruturas complexas conhecidas, proporcionando ao leitor sugestões de alguns possíveis tópicos avançados e atuais de estudos que envolvem os conceitos aqui tratados.

Agradecimentos

Laércio dos Santos foi parcialmente apoiado pela FAPEMIG RED-00133-21.

Referências

[1] CHEN, W.; CHERN, S.S.; LAM, K. S. **Lectures on Differential Geometry**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1999. DOI: `https://doi.org/10.1142/3812`.

[2] DIEUDONNÉ, J. Complex Structure on Real Banach Spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, 1952, vol. 3, no. 1, pp. 162-164. DOI: `https://doi.org/10.2307/2032476`.

[3] FABIAN, M.; HABALA, P.; HÁJEK, P.; SANTALUCÍA, V. M.; PELANT, V.; ZIZLER, V. **Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry**. New York: Springer, 2001. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3480-5_1.

[4] FARENCZI, V.; GALEGO, E. M. Countable Groups of Isometries on Banach Spaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, vol. 362, 2010, pp. 4385-4431. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-10-05034-8.

[5] GUALTIERI, M. **Generalized Complex Geometry**, Oxford, 2003. Tese (Doctor of Philosophy), Oxford University.

[6] HELGASON, S. **Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces**. New York: Academic Press, 1979.

[7] HITCHIN, N. Generalized Calabi-Yau Manifolds. **The Quarterly Journal of Mathematics**, 2003, vol. 54, pp. 281-308. DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/hag025.

[8] HUYBRECHTS, D. **Complex Geometry:** An Introduction. Berlin: Springer Science & Business Media, 2005. DOI: https://doi.org/10.1007/b137952.

[9] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. **Foundations of Differential Geometry**, vol. 2. New York: Wiley and Sons, 1969.

[10] KOSTRIKIN, A.; MANIN, Y. **Linear Algebra and Geometry**. London: Gordon and Breach Science Publishers, 1989. DOI: https://doi.org/10.1201/9781466593480.

[11] MCDUFF, D.; SALAMON, D. **Introduction to Symplectic Topology**. 3 ed. Oxford: Oxford University Press, 2017. DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780198794899.001.0001.

[12] ROMAN, S. **Advanced Linear Algebra**. 3 ed. New York: Springer, 2007. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-72831-5.

[13] SAN MARTIN, L. A. B. **Grupos de Lie**. Campinas: Editora Unicamp, 2017.

Submetido em 23 abr. 2024
Aceito em 27 ago. 2024