



Modelagem e simulações da dispersão de poluentes na Lagoa dos Patos

Modeling and simulations of pollutants dispersion in the Lagoa dos Patos

Modelización y simulaciones de dispersión de contaminantes en Lagoa dos Patos

Ludmila Vitória Ribeiro Rocumba

Universidade Federal de São Carlos - *Campus* Sorocaba

ludmilarocumba@estudante.ufscar.br

ORCID: 0009-0002-3818-1903

Graciele Paraguaia Silveira

Universidade Federal de São Carlos - *Campus* Sorocaba

graciele@ufscar.br

ORCID: 0000-0002-8610-4841

Resumo. A sobrevivência da vida no planeta Terra depende de recursos naturais indispensáveis, como a água. O crescimento da industrialização e da urbanização tem provocado grande impacto nos ecossistemas e na biodiversidade, que assim como as pessoas, necessitam dos corpos d'água. Neste artigo é apresentado um estudo acerca da dispersão de poluentes em meios aquáticos, mediante o uso da modelagem matemática e das simulações computacionais. O modelo utilizado foi construído com base na equação da difusão-advecção, equação esta que trata tanto da movimentação quanto da dispersão do poluente. As soluções numéricas foram obtidas via implementação computacional do método de diferenças finitas, em linguagem Python. Para a aplicação do modelo proposto foi escolhido como domínio a Lagoa dos Patos, maior laguna do Brasil, localizada na região Sul do país. As simulações expostas neste trabalho buscaram principalmente explorar diferentes situações e, para isto, foram idealizados alguns cenários, considerando distintos valores para o coeficiente de difusão e regime de ventos. Os resultados permitiram observar como o poluente se comporta na lagoa, explicitando a movimentação, a dispersão e a taxa de concentração do mesmo ao longo do tempo. Uma vez que se obtenha resultados como estes, torna-se possível a elaboração de estratégias para a contenção e limpeza do poluente, contribuindo para a minimização de danos causados ao meio aquático.

Palavras-chave. Equação da difusão-advecção, método de diferenças finitas, Lagoa dos Patos, poluentes.



Abstract. The survival of life on planet Earth depends on essential natural resources, such as water. The growth of industrialization and urbanization has had a major impact on ecosystems and biodiversity, which, like people, need water bodies. This article presents a study on the dispersion of pollutants in aquatic environments, using mathematical modeling and computer simulations. The model used was built based on the diffusion-advection equation, an equation that deals with both the movement and dispersion of the pollutant. The numerical solutions were obtained via computational implementation of the finite difference method, in Python language. To apply the proposed model, Lagoa dos Patos, the largest lagoon in Brazil, located in the southern region of the country, was chosen as the domain. The simulations presented in this work mainly sought to explore different situations and, for this, some scenarios were created, considering different values for the diffusion coefficient and wind regime. The results allow us to observe how the pollutant behaves in the lagoon, explaining its movement, dispersion and concentration rate over time. Once results like these are obtained, it becomes possible to develop strategies to contain and clean the pollutant, contributing to minimizing damage caused to the aquatic environment.

Keywords. Advection-diffusion equation, finite difference method, Lagoa dos Patos, pollutants.

Resumen. La supervivencia de la vida en el planeta Tierra depende de recursos naturales esenciales, como el agua. El crecimiento de la industrialización y la urbanización ha tenido un impacto importante en los ecosistemas y la biodiversidad, que, al igual que las personas, necesitan cuerpos de agua. Este artículo presenta un estudio sobre la dispersión de contaminantes en ambientes acuáticos, utilizando modelos matemáticos y simulaciones por computadora. El modelo utilizado se construyó a partir de la ecuación de difusión-advección, ecuación que trata tanto del movimiento como de la dispersión del contaminante. Las soluciones numéricas se obtuvieron mediante la implementación computacional del método de diferencias finitas, en lenguaje Python. Para aplicar el modelo propuesto, se eligió como dominio la Lagoa dos Patos, la laguna más grande de Brasil, ubicada en la región sur del país. Las simulaciones presentadas en este trabajo buscaron principalmente explorar diferentes situaciones y, para ello, se crearon algunos escenarios, considerando diferentes valores para el coeficiente de difusión y el régimen de viento. Los resultados permitieron observar cómo se comporta el contaminante en la laguna, explicando su movimiento, dispersión y tasa de concentración en el tiempo. Una vez obtenidos resultados como estos, es posible desarrollar estrategias para contener y limpiar el contaminante, contribuyendo a minimizar los daños causados al medio acuático.

Palabras clave. Ecuación de advección-difusión, método de diferencias finitas, Lago de Patos, contaminantes.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 92; secondary 92-10, 92B05.

1 Introdução

Com a globalização e o aumento da industrialização, houve um crescimento acelerado da concentração de resíduos que são maléficos ao meio ambiente e de problemas ambientais observados [6]. A poluição decorrente das indústrias, do agronegócio e da urbanização se caracteriza como um grave problema nos dias atuais, podendo tornar áreas inóspitas e fazer mal para a comunidade, fauna e flora local, uma vez que seus índices podem ultrapassar os aceitáveis para uma boa qualidade de vida [9].

Mediante a isso se viu necessário estudar quais os impactos que a poluição tem a curto, médio e longo prazo para o meio ambiente e sociedade, além de quais são os possíveis meios para evitá-la e mitigar seus danos. Para isso a comunidade científica, entidades e órgãos de defesa ambiental buscam aperfeiçoar o entendimento sobre a área e as políticas públicas existentes [9].

A matemática, especificamente a modelagem matemática, constitui-se em uma alternativa que auxilia na descrição de cenários de acidentes e crimes ambientais, para que se possa antever possíveis situações de alastramento e dispersão dos poluentes. O propósito é tornar executável medidas de precaução, prevenção e freamento dos mesmos, evitando, portanto, maiores danos e prejuízos.

Com relação a dispersão de poluentes em meios aquáticos, [4] usou como modelo a equação diferencial parcial (EDP) da difusão-advecção, para simulações computacionais envolvendo o lago Iberá (localizado na Argentina), discretizando-a por meio do método de elementos finitos, além de realizar testes considerando as interações entre um meio aéreo e aquático.

Os autores da referência [5] utilizaram a mesma equação, mas considerando o método de diferenças finitas centrado de segunda ordem e o método de Crank-Nicolson para as discretizações espacial e temporal. Ambas as pesquisas mostraram que a equação diferencial citada pode ser viável para o tratamento de problemas biológicos como este.

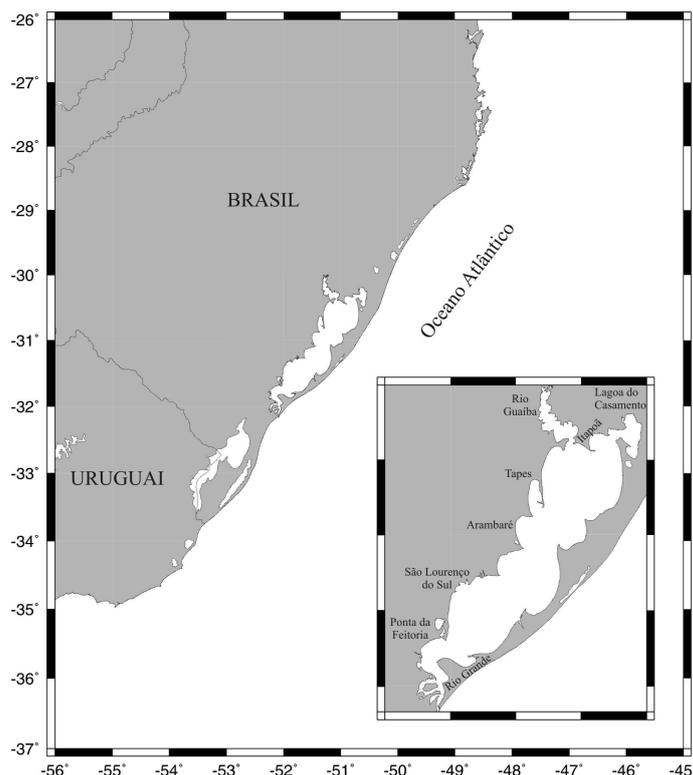
Diante disto, os objetivos deste trabalho foram estudar a equação da difusão-advecção e o método de diferenças finitas; desenvolver a programação computacional em linguagem Python e simular cenários de espalhamento de um poluente em um meio aquático, mais especificamente na Lagoa dos Patos, maior laguna do Brasil, localizada na região Sul do país.

A Seção 2 a seguir abordará a caracterização da área de estudo, discutindo suas propriedades geográficas e o sistema de ventos comuns na região. Na sequência, a modelagem matemática elaborada para o problema será descrita e por último serão apresentados os resultados obtidos a partir do modelo proposto.

2 Caracterização da área de estudo

O corpo aquático que foi a área de estudo escolhida nesta pesquisa é a Lagoa dos Patos, localizada na região Sul do Brasil. Tal lagoa possui um comprimento médio de 250 km , largura aproximada de 40 km e cerca de 5 m de profundidade, sendo o maior sistema lagunar da América do Sul. Sua localização está entre 30° e 32° de latitude sul, assim como mostra a Figura 1, possuindo uma área total da ordem de 10000 km^2 [2], [13].

Figura 1: Localização geográfica da lagoa.



Fonte: Castelhão e Moller, p. 92, 2003 [2].

A lagoa pode ser dividida geomorfologicamente em três partes, sendo as regiões inferior, média e superior. A parte inferior compreende a região entre a barra de Rio Grande e a barra da Feitoria; a parte média é constituída pela região entre a barra da Feitoria e

Itapoã; e a parte superior formada pelas áreas da Lagoa do Casamento e pela passagem de Itapoã para o Lago Guaíba [3].

A predominância da circulação na Lagoa dos Patos se dá pela ação dos ventos nordeste (NE) - sudoeste (SO) devido a sua grande dimensão. Seu segundo maior afluente é a descarga fluvial, que acompanha o eixo principal. Seu eixo principal também possui a orientação nordeste-sudoeste, coincidindo portanto com o regime de ventos predominantes na região [2], [10].

Em relação a circulação atmosférica há dois tipos de sistemas de alta pressão que irão influenciá-la: o anticiclone sobre o Oceano Atlântico e os anticiclones de origem polar. O primeiro é responsável pelas massas de ar quente e úmido, que são transportadas pelo vento nordeste. O segundo tipo diz respeito às massas de ar frio e seco que se deslocam para o norte [2].

A ocorrência do segundo tipo de sistema é mais comum no inverno e gera um aumento da ocorrência de ventos do quadrante sul na região, que normalmente tem como predominate o vento nordeste. Tanto o vento nordeste quanto o sudoeste possuem velocidades médias de 3 a 5 m/s [2].

Com respeito às condições ambientais, a Lagoa dos Patos sofre diferentes impactos devido principalmente aos municípios de Pelotas e Rio Grande, os centros urbanos mais importantes da região, estarem próximos de seu domínio.

Na cidade de Rio Grande o estuário da lagoa é utilizado para as instalações portuárias e ancoradouros, logo esta possui aspectos geopolíticos, sobretudo econômicos, de extrema relevância. Essa condição cria um cenário favorável para a industrialização e desenvolvimento intenso na região, gerando resíduos em excesso que são os responsáveis pela contaminação da lagoa [7].

Na próxima seção serão explicitados os detalhes da modelagem matemática elaborada.

3 Modelagem matemática

A modelagem matemática consiste num grande ferramental para diversas áreas do conhecimento, uma vez que busca entender e explicar situações reais a partir da matematização de fenômenos. Dessa forma, é possível ter um meio conciso de expressar ideias, levantar hipóteses, pesquisar e produzir dados a fim de calcular soluções analíticas (quando exequível) e numéricas, apoiadas muitas vezes em métodos científicos computacionais, viabilizando o tratamento matemático dos problemas analisados [1].

Interpretando matematicamente e estudando a natureza dos fenômenos (reais e/ou hipotéticos) que envolvem uma determinada situação, a modelagem matemática se encarrega de substituir a linguagem das hipóteses pela linguagem matemática, descrevendo

por meio de equações, operações matemáticas e gráficos o objeto de estudo, ajudando a compreendê-lo sob diferentes aspectos. [1].

3.1 Equação da difusão-advecção

O modelo matemático adotado para este trabalho foi a equação diferencial parcial da difusão-advecção. Considerando $u(x, y, t)$ a taxa de concentração do poluente no ponto (x, y) , em um dado instante t , a equação pode ser descrita genericamente por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{difusão\} - \{transporte\} - \{decaimento\} + \{fonte\}.$$

A difusão representa o deslocamento do poluente de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração. O transporte ocorre pela advecção, levando em conta o movimento do poluente ocasionado pelo fluxo da água, correnteza e pelo vento, sem que este se degrade no processo. O decaimento expressa as perdas de poluente provocadas por agentes naturais, tais como a evaporação e o consumo por parte de microrganismos e/ou flora que habitam o meio. A fonte, como a própria denominação sugere, expressa uma fonte poluidora e sua modelagem varia de acordo com o problema estudado, podendo assumir valores constantes ou uma função de uma ou mais variáveis [6], [4].

O decaimento, a difusão e o transporte podem ser modelados classicamente como [4] propõe:

$$\begin{aligned}\{decaimento\} &= \sigma u \\ \{difusão\} &= \nabla(\alpha \nabla u) \\ \{transporte\} &= \nabla \vec{W} u.\end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial parcial que descreve o processo de dispersão de poluente é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u - \vec{W} \nabla u - \sigma u + f, \quad (1)$$

em que α é o coeficiente de difusão, \vec{W} o vetor campo de velocidades, σ o coeficiente de decaimento e f a fonte poluidora. O campo de velocidades é resultado da circulação dos ventos na região, sobre a lagoa e de sua circulação superficial média, sendo a norma obtida por meio da expressão

$$W = cW_v + W_p \quad (2)$$

em que W_v é o valor dos ventos, c um coeficiente de proporcionalidade e W_p a circulação

superficial média [11].

3.2 Discretização da equação

Para a discretização da equação (1), o método de diferenças finitas foi escolhido para as variáveis espaciais e temporal, com aproximação para a primeira derivada do tipo diferença avançada na discretização temporal. O esquema Upwind foi aplicado para o termo advectivo, onde usam-se as diferenças avançada ou atrasada a depender da direção do vetor \vec{W} , e para a discretização espacial do termo difusivo foi empregado o esquema de diferenças finitas centrado de segunda ordem [8], [12].

3.2.1 Discretização temporal

Conforme mencionado anteriormente, na discretização temporal foi aplicado o método de diferenças finitas com aproximação para a primeira derivada do tipo diferença avançada.

Considere a série de Taylor $y(x)$ em torno de x_i , supondo que $y(x)$ possui $k + 1$ derivadas contínuas:

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y''(x_i) + \dots + \frac{(x - x_i)^{k+1}}{(k + 1)!}y^{k+1}(\zeta_i), \quad (3)$$

onde ζ está entre x e x_i . A diferença avançada é obtida tomando $k = 1$ na série descrita em (3), o que resulta em

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y''(\zeta_i). \quad (4)$$

Tomando o ponto $x = x_{i+1} = x_i + h$ e se o espaçamento h é muito pequeno, então se usadas as estimativas dos valores exatos $y(x_{i+1})$ e $y(x_i)$, a equação (4) se torna

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (5)$$

3.2.2 Discretização espacial

A discretização espacial possui duas partes distintas, a saber, os componentes difusivo e advectivo. O termo difusivo, como dito previamente, teve a discretização centrada de segunda ordem.

Para tanto, considere novamente a série de Taylor dada pela equação (3) e tome $k = 3$, logo

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}y''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{3!}y'''(x_i) +$$

$$\frac{(x - x_i)^4}{4!} y^{(iv)}(\zeta_i). \quad (6)$$

Escrevendo a equação (6) para o ponto $x = x_{i+1} = x_i + h$ e para o ponto $x = x_{i-1} = x_i - h$, somando ambas as expressões e organizando os termos (assumindo que h é muito pequeno), obtém-se

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (7)$$

Para a discretização espacial do termo advectivo foi adotado o esquema Upwind. Como define [8], tal esquema utiliza a aproximação de primeira ordem do tipo avançada ou atrasada, a depender do coeficiente que o acompanha.

Se $\vec{W} = (W_1, W_2)$ é o coeficiente mencionado, onde W_1 está relacionado ao eixo das abscissas e W_2 ao eixo das ordenadas, pode-se dizer que caso $W_n > 0$, com $n = 1, 2$, a solução irá se mover no sentido positivo em seu respectivo eixo e se $W_n < 0$, a solução se move no sentido negativo, e é justamente por conta disso que se faz necessário ajustar o método de aproximação. Se $W_n > 0$, a aproximação se dará pelo esquema atrasado e se $W_n < 0$ a opção será o esquema avançado.

A discretização de primeira ordem por diferença avançada foi encontrada na equação (5) e a discretização por diferença atrasada é obtida de maneira análoga, ou seja

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (8)$$

3.3 Modelo da dispersão no meio aquático

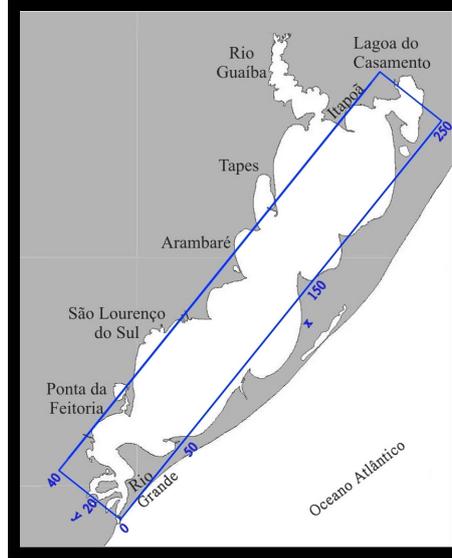
Nesta pesquisa, o domínio espacial possui duas dimensões (x, y) e assumiram-se algumas hipóteses importantes para o tratamento matemático do fenômeno estudado.

O domínio citado foi aproximado por um retângulo, mantendo as dimensões reais e o comprimento médio da Lagoa dos Patos, como pode ser visto na Figura 2.

Além disso, o parâmetro de difusibilidade α foi tomado como constante em todas as direções. Para o vetor campo de velocidades, o regime de ventos predominantes na Lagoa dos Patos contribuiu na definição dos cenários que foram simulados e serão apresentados. Por hipótese, o coeficiente de decaimento σ do agente poluidor é proporcional à própria poluição.

Por último, a escolha do tempo de simulação se deu de modo que a dinâmica do poluente ficasse compreendida no interior do domínio e/ou que tivesse concentração baixa ao se aproximar de alguma das fronteiras. Dessa forma, as condições de contorno adotadas são nulas.

Figura 2: Domínio utilizado sobreposto à Lagoa dos Patos



Fonte: Elaborada pelas autoras. Adaptado de [2].

Logo, o problema de valor inicial e de contorno é

$$\begin{cases} u_t - \alpha(u_{xx} + u_{yy}) + (W_1, W_2)(u_x, u_y) + \sigma u = 0, & x \in (0, L), y \in (0, M), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, M, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

em que L é o comprimento e M a largura do domínio, Δx , Δy e Δt são os comprimentos dos subintervalos espaciais e temporal em x , y e t , respectivamente, e $u(x_i, y_j, t_n) \approx U_{i,j}^n$. Pode-se discretizar a equação (9) fazendo uso das aproximações obtidas nas equações (5), (7) e (8). No caso em que $W_1 > 0$ e $W_2 > 0$ a equação resultante fica

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n(-2\gamma_1 - 2\gamma_2 - \delta_1 - \delta_2 - \beta + 1) + U_{i+1,j}^n\gamma_1 + U_{i,j+1}^n\gamma_2 + U_{i-1,j}^n(\gamma_1 + \delta_1) + U_{i,j-1}^n(\gamma_2 + \delta_2), \quad (10)$$

onde $\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} = \gamma_1$, $\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2} = \gamma_2$, $\frac{\Delta t W_1}{\Delta x} = \delta_1$, $\frac{\Delta t W_2}{\Delta y} = \delta_2$ e $\sigma\Delta t = \beta$.

Para os casos em que $W_1 > 0$ e $W_2 < 0$, $W_1 < 0$ e $W_2 > 0$ e $W_1 < 0$ e $W_2 < 0$, tem-se resultados análogos à equação (10).

Os métodos de diferenças finitas abordados neste estudo são *explícitos* de passo sim-

ples. Um método numérico é explícito de passo simples, se for possível determinar a solução em um tempo posterior, utilizando apenas a solução do tempo atual. Esta classe de esquemas numéricos é condicionalmente estável, isto é, para que produzam soluções aproximadas satisfatórias, alguns critérios são necessários durante as escolhas de Δx , Δy e Δt .

De acordo com [14], a restrição para o termo advectivo é denominada *condição CFL* (Courant, Friedrichs e Lewy). No caso de domínio espacial bidimensional, a condição devidamente adaptada é $|\delta_1| + |\delta_2| \leq 1$. Já para o termo difusivo, a restrição é dada por $\gamma_1 + \gamma_2 < 1/2$.

Um outro aspecto importante é que métodos numéricos em geral estão sujeitos à chamada *dissipação numérica*, que consiste em fornecer soluções excessivamente suavizadas [14]. Desse modo, torna-se essencial que vários testes sejam realizados com o código, a fim de verificar se as soluções obtidas estão coerentes com o fenômeno analisado.

4 Implementação computacional

A expressão descrita em (10), e suas formulações análogas, foram implementadas computacionalmente na linguagem Python, para a obtenção de soluções numéricas. A construção gráfica dos resultados foi efetuada, a fim de auxiliar na visualização e compreensão dos mesmos.

Além disso, cabe ressaltar que o código foi testado para equações diferenciais parciais, para as quais se conhece a solução analítica, tais como a equação da advecção linear e a equação da difusão. Posteriormente, com as confirmações de sua funcionalidade, o código foi modificado para atender as demandas específicas deste modelo.

4.1 Simulações e resultados

No que diz respeito ao procedimento de discretização da equação da difusão-advecção, todos os cenários possuem como comprimento do subintervalo temporal $\Delta t = 0,001$ dia. Em relação aos subintervalos espaciais tem-se $\Delta x = 0,08$ km em x e $\Delta y = 0,08$ km em y . As dimensões do domínio foram definidas considerando o comprimento e largura médios da Lagoa dos Patos, ou seja, $L = 250$ km e $M = 40$ km [2], [13].

Para as simulações numéricas, foi pressuposto que existe uma mancha de poluente presente na lagoa (domínio), no tempo inicial, isto é, em $t = 0$. A função definida para a condição inicial foi uma gaussiana:

$$f(x, y) = e^{-[(x-a)^2 + (y-b)^2]}, \quad (11)$$

onde a e b são as coordenadas do centro de f , que por sua vez é a localidade com a maior taxa de concentração do poluente. Outra característica importante é que, à medida em que se afasta do centro, ocorre o decaimento da concentração e há uma transição entre água com e sem poluente.

Para se obter diferentes cenários, assumiu-se condições iniciais distintas, mudando os valores para a e b na expressão (11). O objetivo é verificar o deslocamento e o espalhamento deste poluente com o passar do tempo. O campo de velocidade é dado pela equação (2), levando-se em conta apenas as interferências das correntes de ventos sobre a lagoa. Ademais foi atribuído a c o valor de 3%, conforme consta na literatura (referência [11]). As condições de contorno assumidas neste estudo são nulas.

Em [4], foram obtidos valores de parâmetros referentes ao poluente, tais como os coeficientes de dispersão e de decaimento. Já [10], [2] e [13] trazem especificamente parâmetros relacionados às características da lagoa, tais como as dimensões do domínio e velocidades dos ventos na região.

Os dois primeiros cenários examinados, ver Figuras 3 e 4, respectivamente, foram executados como testes numéricos, diferenciando-se apenas pelo percurso realizado pelo poluente. Em vista disso, constatou-se a implementação correta do esquema Upwind.

O primeiro cenário ou teste 1, Figura 3, foi implementado supondo ventos na direção nordeste, com velocidades moderadas, ou seja, ventos compreendidos entre 5 e 11 km/h . Nesse contexto, o valor atribuído foi 10,8 km/h , valor comum do regime de ventos na Lagoa dos Patos. Para a condição inicial, dada por (11), tem-se $a = 3$ e $b = 37$.

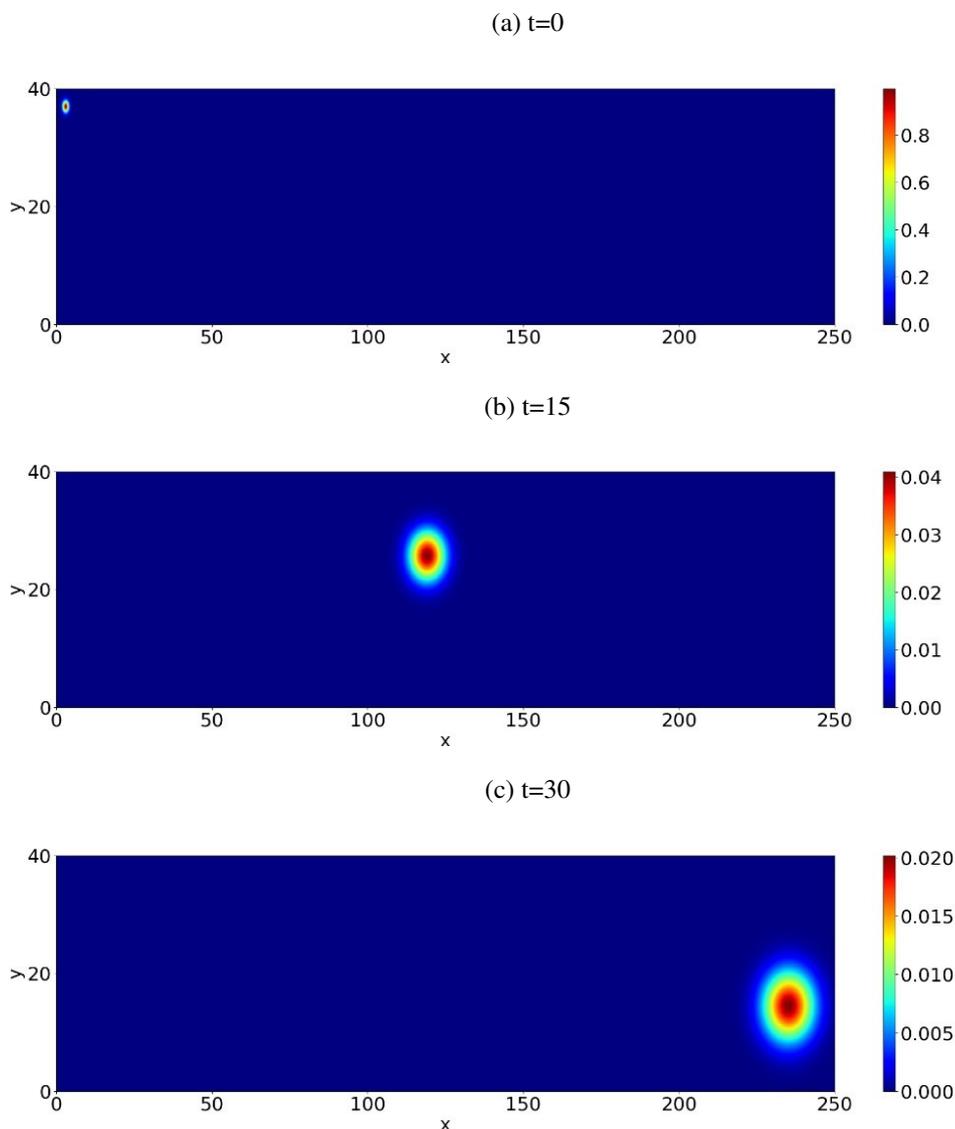
A Figura 3 apresenta a evolução da dispersão ao longo do tempo para este caso, com a condição inicial exposta na Figura 3a. Transcorridos 15 dias, tem-se a Figura 3b e após 30 dias, a Figura 3c. Observa-se que a mancha de poluente se move na direção nordeste, que é a direção predominante dos ventos e possui uma movimentação significativa, devido a sua velocidade. Nesse caso, a difusibilidade é moderada, ou seja, $\alpha = 0,01 km^2/h$, logo a difusão ou o espalhamento do poluente é mais baixo e a mancha mantém uma maior concentração da substância em sua região central.

No segundo cenário, ver Figura 4, tem-se novamente ventos moderados e difusibilidade moderada, com $\alpha = 0,01 km^2/h$. Nesta situação foram adotadas correntes de ventos na direção sudoeste e para a condição inicial foram atribuídos os valores $a = 247$ e $b = 3$. Verifica-se que a mancha de poluente se desloca para a referida direção.

Nestes testes buscou-se representar de forma mais verossímil o que ocorre na Lagoa dos Patos, uma vez que foram utilizadas as primeira e segunda direções mais prováveis das correntes de ventos naquela localidade. Como o vento é moderado, equivalendo a 10,8 km/h , a mancha de poluente se desloca consideravelmente nas duas situações.

As simulações que se seguem foram executadas principalmente com o propósito de

Figura 3: Simulação do cenário 1 - Vento nordeste.

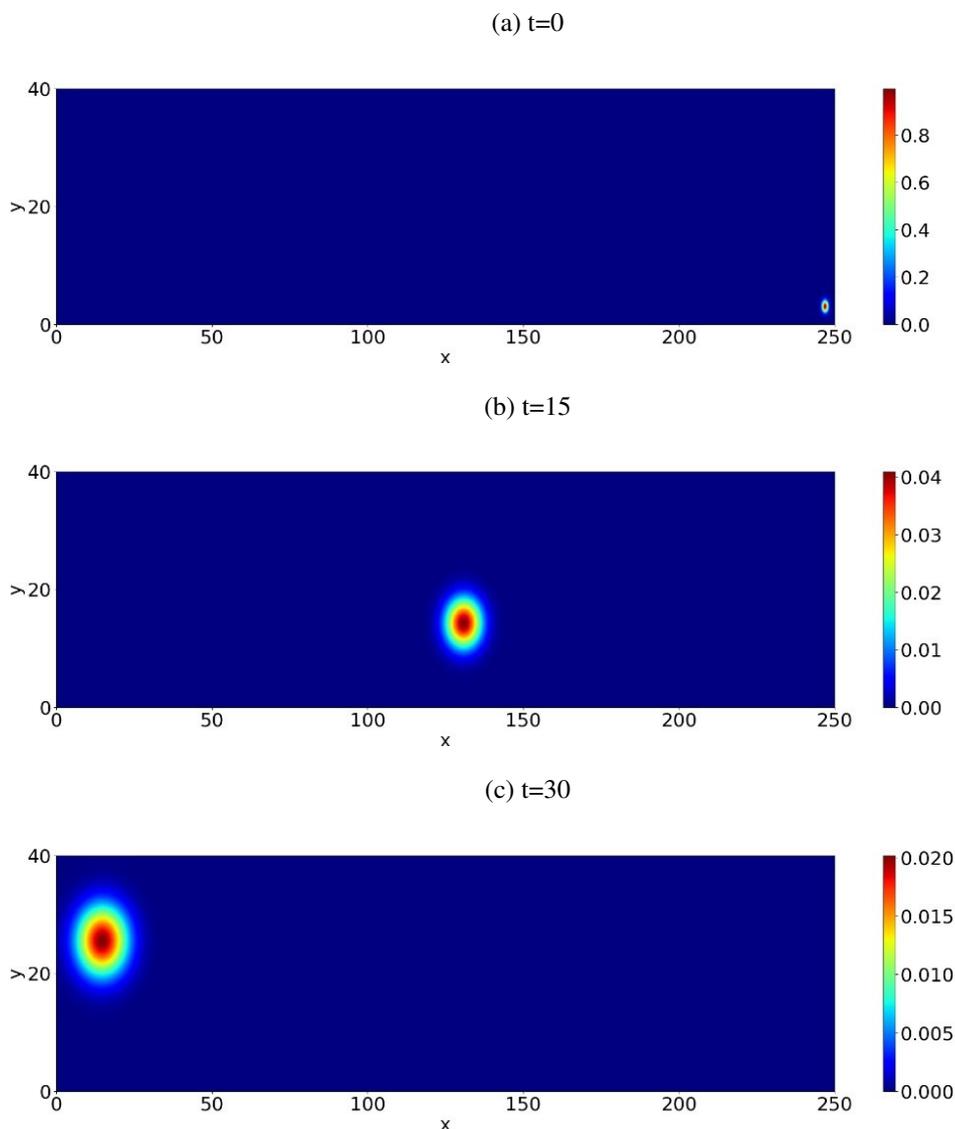


Fonte: Elaborada pelas autoras.

supor diferentes condições iniciais, de difusibilidade e de ventos, levando em conta os municípios localizados próximos à Lagoa dos Patos, conforme consta na Figura 2.

No cenário 3, Figura 5, há predominância de ventos moderados e uma difusibilidade alta, $\alpha > 0,01 \text{ km}^2/h$. A direção do vetor campo de velocidade foi sudeste, com valor equivalente a 7 km/h , e o coeficiente de difusibilidade escolhido foi $\alpha = 0,033 \text{ km}^2/h$. Para a condição inicial tem-se o poluente localizado próximo a Itapoã, sendo $a = 230$ e $b = 35$.

Figura 4: Simulação do cenário 2 - Vento sudoeste.



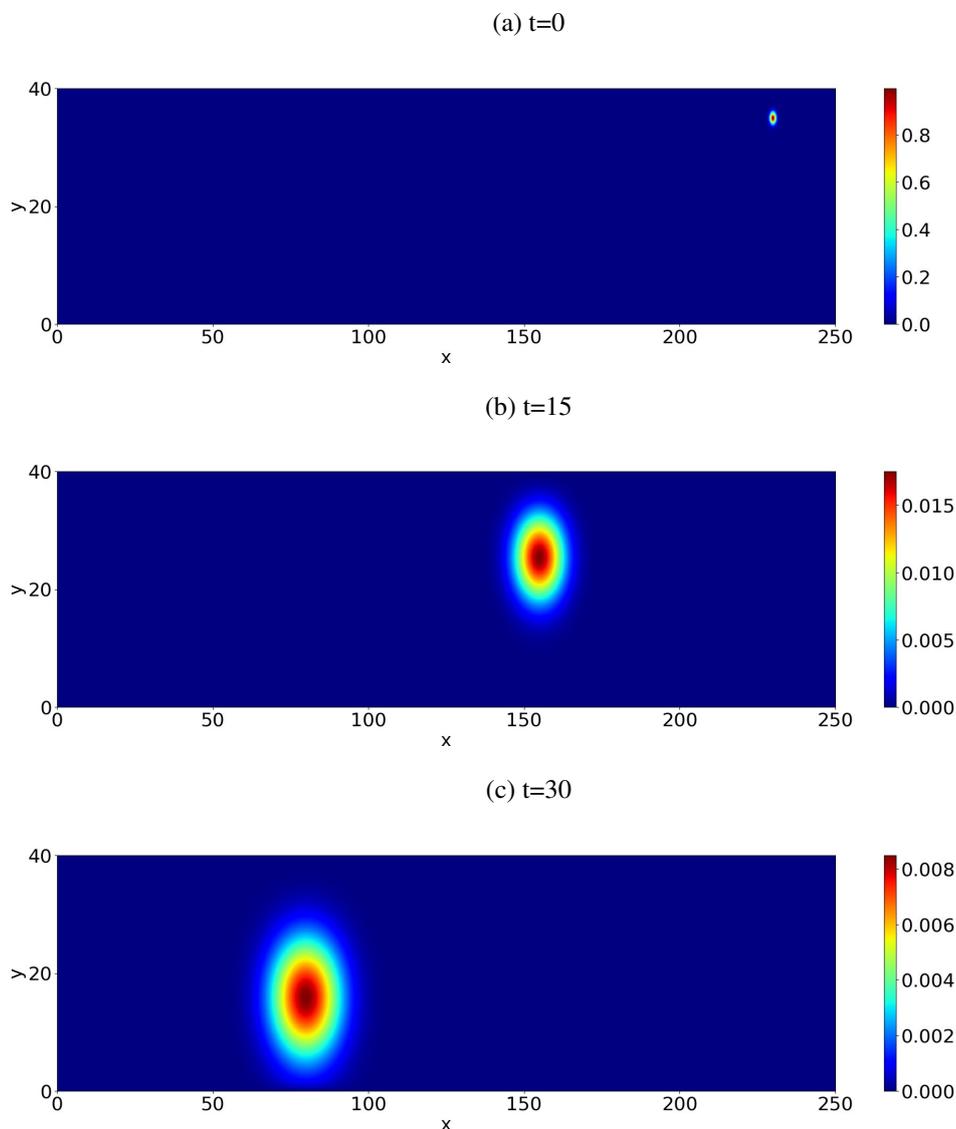
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Ao final da evolução temporal, Figura 5c, tem-se uma taxa de concentração de poluente menor em comparação aos casos dos cenários 1 e 2, provocada justamente pela maior difusibilidade.

O cenário 4, Figura 6, foi construído considerando uma difusibilidade alta, $\alpha = 0,033 \text{ km}^2/h$, e ventos fracos de $3 \text{ km}/h$ na direção noroeste. Para a condição inicial a mancha de poluente tem seu foco próximo a Rio Grande, com $a = 10$ e $b = 6$ na expressão (11).

Note que o espalhamento da mancha é menor em comparação à situação anterior e

Figura 5: Simulação do cenário 3 - Vento moderado e difusibilidade alta.

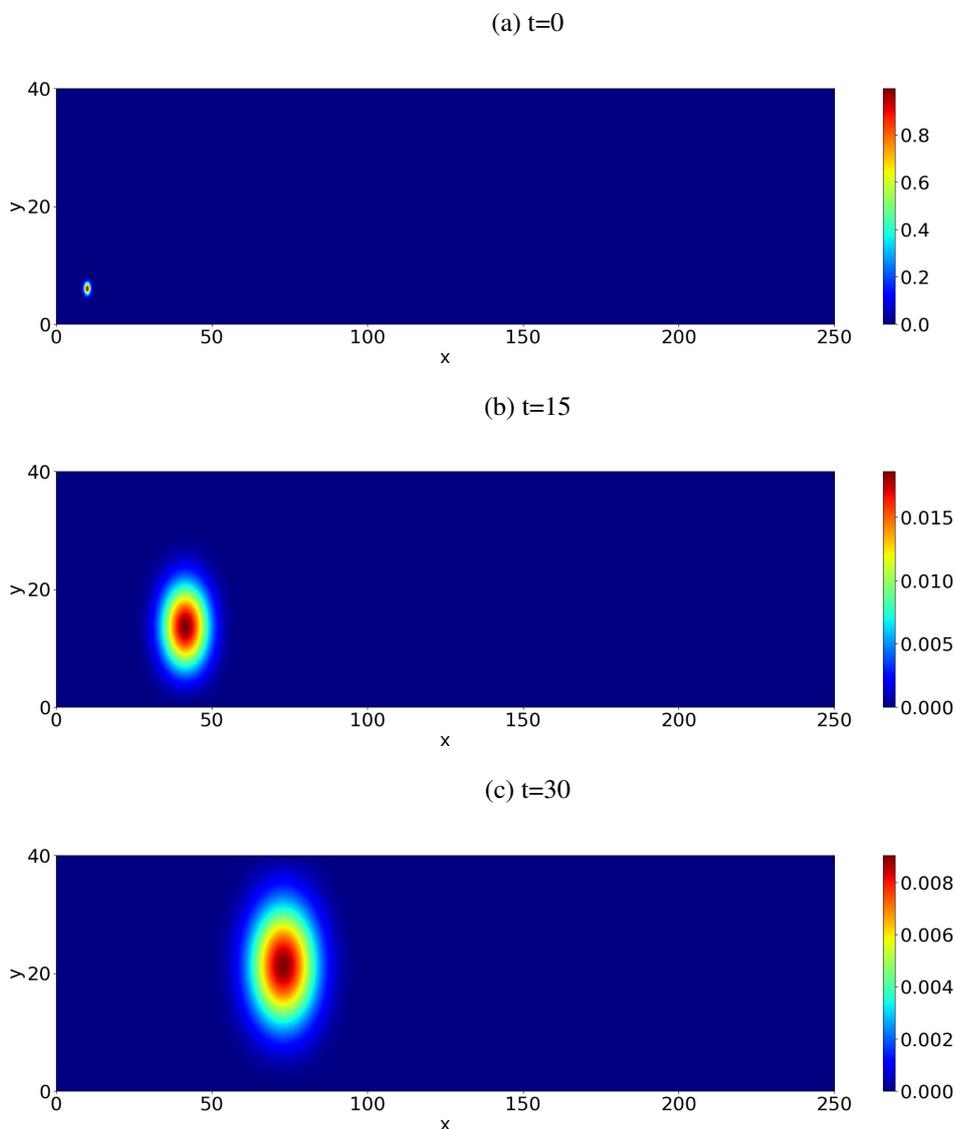


Fonte: Elaborada pelas autoras.

não chega a percorrer metade do comprimento do domínio da lagoa na direção x .

Suponha agora que o foco inicial da poluição esteja localizado em Ponta da Feitoria (considerando por exemplo, $a = 30$ e $b = 35$), com ventos moderados de $6,5 \text{ km/h}$ na direção nordeste e que a difusibilidade é baixa, $\alpha = 0,01 \text{ km}^2/\text{h}$. Dessa maneira, o cenário 5, apresentado graficamente na Figura 7, mostra que apesar de haver um deslocamento significativo do poluente, que consegue atravessar mais da metade do domínio na direção x , a mancha se mantém concentrada numa pequena região.

Figura 6: Simulação do cenário 4 - Vento fraco e difusibilidade alta.

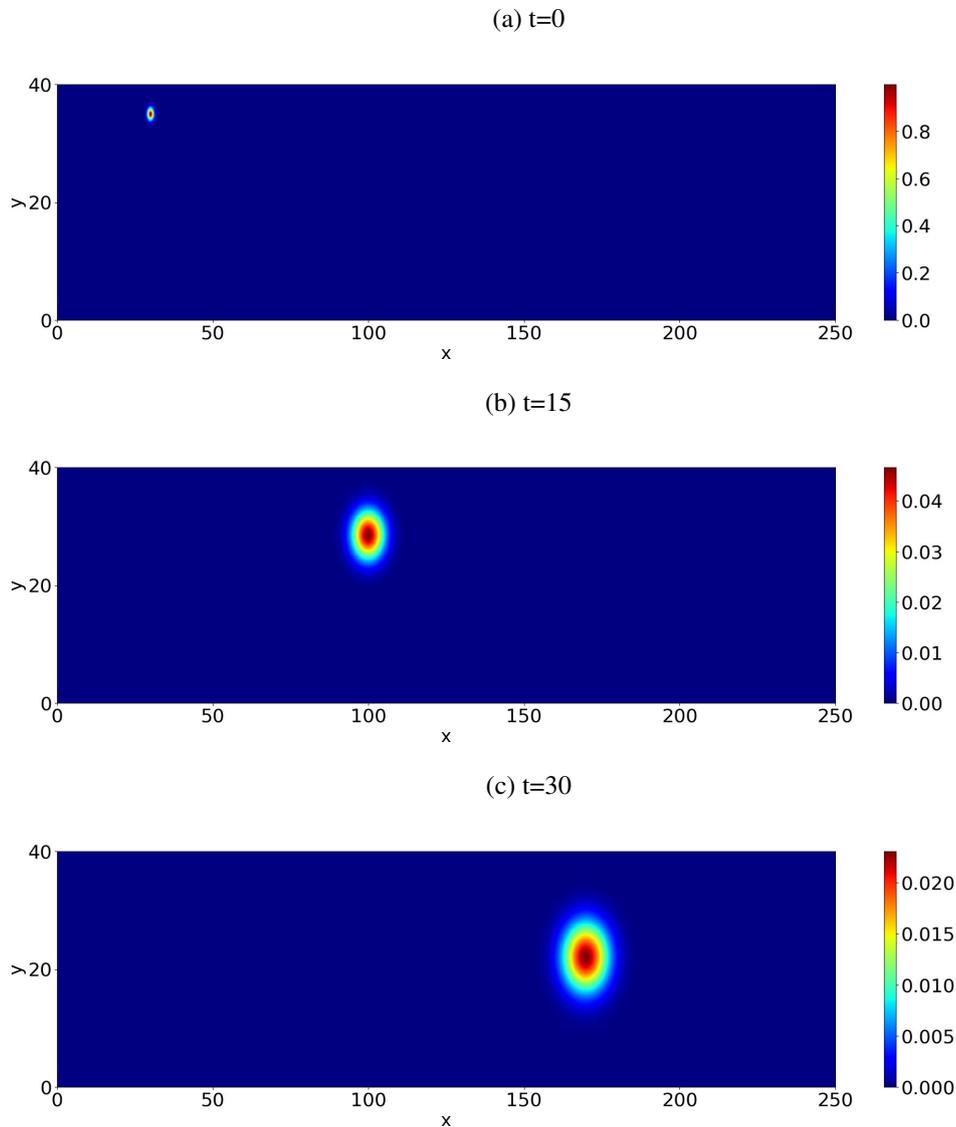


Fonte: Elaborada pelas autoras.

Mesmo assim, quando comparado aos cenários anteriores, este caso tem uma maior taxa de concentração do poluente na região onde este se encontra, como pode ser visto na Figura 7c, indicando que haverá mais malefícios nas pequenas regiões ao redor do contaminante.

No cenário 6, Figura 8, foram considerados ventos moderados na direção sudoeste, com velocidades de 7 km/h , e um coeficiente de difusibilidade $\alpha = 0,025 \text{ km}^2/\text{h}$, sendo portanto atribuída uma difusibilidade moderada. Ademais, para a condição inicial tem-se

Figura 7: Simulação do cenário 5 - Vento moderado e difusibilidade baixa.



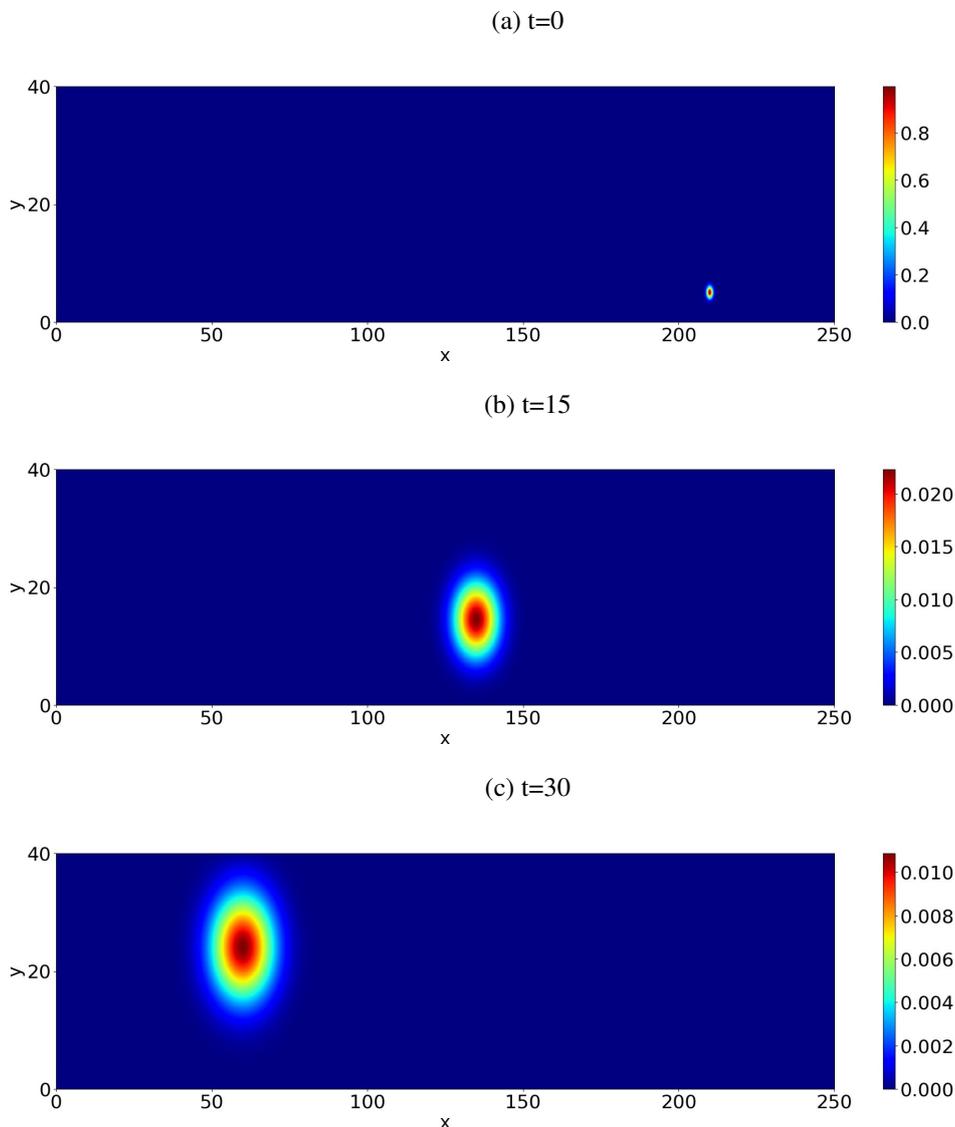
Fonte: Elaborada pelas autoras.

 $a = 210$ e $b = 5$.

Note que a mancha de poluente não somente se desloca em quase todo o domínio na direção de x , chegando em São Lourenço do Sul, mas também, devido a sua difusibilidade ser mais alta, ocupa ao final, Figura 8c, mais da metade do domínio na direção y .

Na Figura 9a, tem-se a evolução temporal da concentração máxima de poluente para os cenários 3, 4, 5 e 6, apresentados anteriormente. A Figura 9b destaca o subintervalo intermediário para o tempo (de 5 à 10 dias). Já a Figura 9c consiste em um zoom na parte

Figura 8: Simulação do cenário 6 - Vento moderado e difusibilidade moderada.



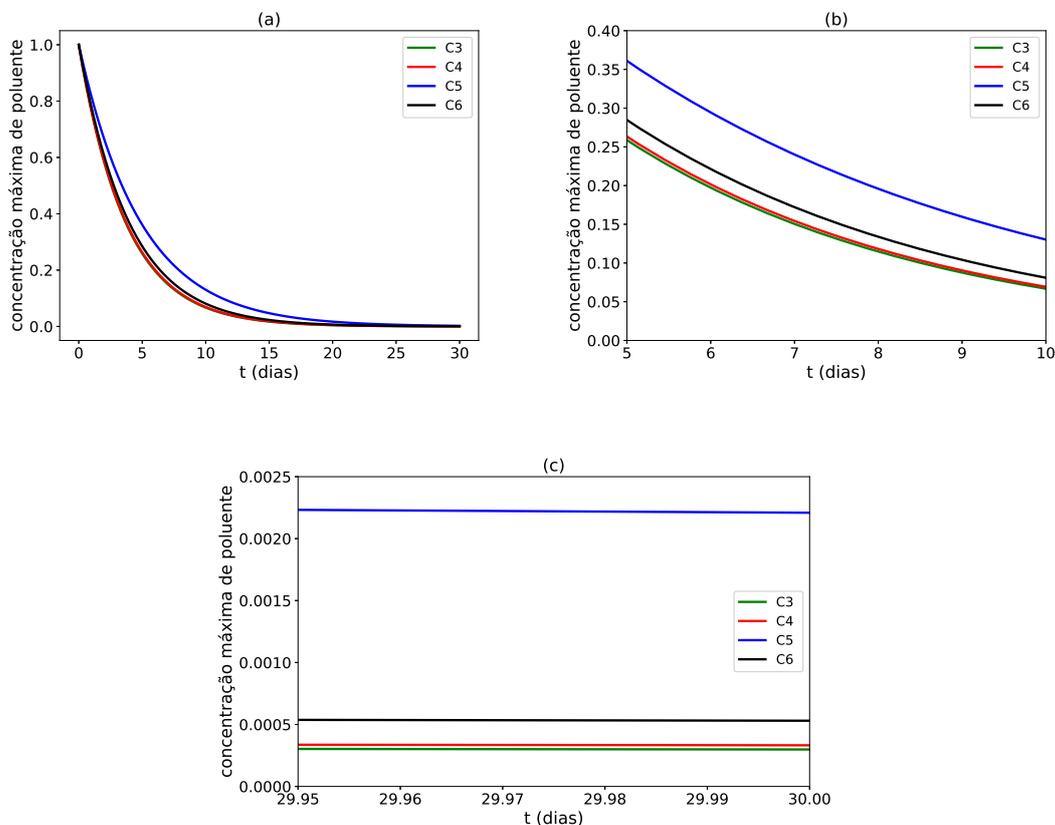
Fonte: Elaborada pelas autoras.

final dos gráficos, para se observar os valores das concentrações de poluente nos quais cada cenário se estabilizou.

A partir das simulações apresentadas, ficou evidenciada a utilidade do modelo matemático, juntamente com métodos numéricos e ferramentas computacionais, visto que estas permitem a análise da movimentação, do deslocamento e da dispersão de poluentes.

Vale ressaltar que as escolhas dos métodos e dos espaçamentos das discretizações, mostraram-se adequadas para as situações com baixa e alta difusibilidade, caracterizando

Figura 9: Concentração máxima de poluente em função do tempo - cenários 3, 4, 5 e 6.



Fonte: Elaborada pelas autoras.

que a dissipação numérica inerente aos métodos, não prejudicou as soluções encontradas. Desse modo, torna-se factível a elaboração de estudos e estratégias para a contenção e limpeza do poluente, contribuindo para a minimização dos danos prováveis.

5 Conclusão

O propósito deste trabalho foi abordar o tema da poluição, valendo-se da aplicação da equação da difusão-advecção no intuito de representar esse fenômeno biológico. Além disso, por meio do método numérico de diferenças finitas e da linguagem de programação Python, simulações de cenários foram efetuadas para estudar como o poluente se comporta na Lagoa dos Patos, observando sua dispersão, deslocamento e taxa de concentração ao longo do tempo. A ideia é que investigações semelhantes a esta tornem viável a criação de estratégias para conter o avanço do poluente e minimizar os prejuízos

ambientais.

Uma vez que os resultados das simulações são apresentados graficamente, conclusões sobre o comportamento do poluente podem ser aferidas por diferentes profissionais de áreas correlatas e autoridades.

Embora o modelo possua algumas limitações, decorrentes da simplificação do mesmo para torná-lo mais tratável em uma iniciação científica, os resultados alcançados vão de acordo com o esperado. Pretende-se, em trabalhos futuros, obter aprimoramentos do modelo matemático, da estimação dos parâmetros e do código, explorando outras condições de contorno e iniciais, e determinando também o raio médio de poluição em função do tempo.

É preciso mencionar a emergência climática vivenciada pelo estado do Rio Grande Sul, iniciada no final de abril de 2024 e agravada no mês de maio, com fortes chuvas, alagamentos, inundações e enchentes na maior parte do estado, inclusive com aumento do nível da Lagoa dos Patos. Objetiva-se acompanhar a conjuntura de fatores, para se obter dados reais e efetuar simulações que sejam cada vez mais coerentes com a realidade.

Referências

- [1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- [2] CASTELÃO, R. M.; MÖLLER JR, O. O. Sobre a circulação tridimensional forçada por ventos na Lagoa dos Patos. **Atlântica**, Rio Grande, v. 25, n. 2, p. 91-106, 2003.
- [3] DELANEY, P. J. V. **Fisiografia e geologia de superfície da planície costeira do Rio Grande do Sul**. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1962.
- [4] DINIZ, G. L. **Dispersão de poluentes num sistema ar-água**: modelagem, aproximações e aplicações. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- [5] GUACA, D. C.; SILVA, J.F. R.; MEYER J. F. C. A. Método de Diferenças Finitas para a modelagem e simulação da dispersão de poluentes em meios aquáticos. **Biomatemática**, v. 25, p. 45-58, 2015.
- [6] INFORZATO, N. F. **Dispersão de poluentes num sistema ar-água**: modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional. Tese (Doutorado em matemática aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

- [7] KALIKOSKI, D. C.; VASCONCELLOS, M. Estudo das condições técnicas, econômicas e ambientais da pesca de pequena escala no estuário da Lagoa dos Patos, Brasil: uma metodologia de avaliação. FAO, Circular de Pesca e Aquicultura, n. 1075, p. 200, 2013.
- [8] LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations**. Philadelphia: SIAM, 2007.
- [9] MARCHUK, G. I. **Mathematical models in environmental problems**. Studies in Mathematical and its Applications, Vol. 16. North-Holland, Amsterdam: The Netherlands, 1986.
- [10] MÖLLER JR, O. O; CASTAING, P.; SALOMON, J. C.; LAZURE, P. The Influence of Local and Non-Local Forcing Effects on the Subtidal Circulation of Patos Lagoon. **Estuaries**, v. 24, n.2, p. 297-311, apr. 2001.
- [11] OLIVEIRA, R. F. **O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: modelagem, análise numérica e simulações**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- [12] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.
- [13] SANTOS, E. **Movimentação de água salobra na Laguna dos Patos/RS mediante a utilização de imagens modis**. Dissertação (Mestrado em Manejo e Conservação do Solo e da Água) - Programa de pós-graduação em manejo e conservação do solo e da água, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.
- [14] THOMAS, J. W. **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995.