Brazilian Electronic Journal of Mathematics, v.5, número especial - SiTAPEM, 2024.
ISSN: 2675-1313

Grandezas incomensuráveis e números irracionais [1]

Incommeasurable magnitudes and irrational numbers

Magnitudes inconmensurables y números irracionales

Fabrício Oliveira Silva
Escola Estadual Osmundo Gonzaga Filho
dante_1306@hotmail.com
ORCID: 0000-0003-1055-3533

Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Instituto de Matemática e Tecnologia - UFCAT
marcio.ribeiro@ufcat.edu.br
ORCID: 0000-0001-9915-2212

Resumo. Alguns livros de história da matemática assentam que a descoberta de grandezas incomensuráveis, por volta do século V, antes da Era Comum, esteve seguida de uma crise de fundamentação lógica nas estruturas da matemática. Notamos, a partir de algumas publicações e artigos, que essa crise de fundamentos talvez tenha sido um equívoco ou má interpretação dos escritos da antiguidade, pois, caso tenha ocorrido, ela não alterou os rumos das descobertas gregas. A solução proposta por Eudoxo decorre da evolução dos estudos que estavam em curso e, dois milênios depois, serviu como base para a construção dos cortes de Dedekind, basilar à concepção do conceito rigoroso de números reais (racionais e irracionais). Esse trabalho de pesquisa bibliográfica tem o intuito de revisitar e retomar, a partir do caráter histórico matemático, as principais ideias que despontaram com o surgimento das grandezas incomensuráveis e suas particularidades, desde a antiguidade grega, passando por sua consumação que culminou na ideia formal de números irracionais até chegarmos à atualidade. Como contribuição principal desse trabalho, destacamos a apresentação de novas perspectivas e enfoques do tema em voga a partir de olhares lançados ao passado por intermédio dos fatos históricos, possibilitando compreender como se deram os encadeamentos de ideias no percurso temporal, contribuindo com a ampliação da compreensão dos objetos e conceitos matemáticos na atualidade.

Palavras-chave. Comensurável, incomensurável, irracional.

[1] Trabalho apresentado no 1º Simpósio Sobre Trajetórias e Aprendizagens de Professores que Ensinam Matemática - SiTAPEM

Abstract. Some books on the history of mathematics argue that the discovery of incommeasurable quantities, around the 5th century, before the Common Era, was followed by a crisis of logical foundations in the structures of mathematics. We noticed, from some publications and articles, that this fundamental crisis may have been a mistake or a misinterpretation of ancient writings, because, if it had occurred, it did not alter the rumors of Greek discoveries. Eudoxo's proposed solution stems from the evolution of studies that were ongoing and, two millennia later, served as the basis for the construction of Dedekind's cuts, basic to the conception of the rigorous concept of real numbers (rational and irrational). This bibliographical research work aims to revisit and resume, from the historical mathematical character, the main ideas that emerged with the emergence of incommensurable quantities and their particularities, from Greek antiquity, through their consummation that culminated in the formal idea of irrational numbers until we reach the present day. As the main contribution of this work, we highlight the presentation of new perspectives and approaches to the topic in vogue based on looks at the past through historical facts, making it possible to understand how the chains of ideas took place over time, enabling the expansion of understanding of mathematical objects and concepts today.

Keywords. Commensurable, incommeasurable, irrational.

Resumen. Algunos libros de historia de las matemáticas sostienen que el descubrimiento de magnitudes inconmensurables, alrededor del siglo V antes de la Era Común, fue seguido por una crisis de fundamentación lógica en las estructuras de las matemáticas. Observamos, a partir de algunas publicaciones y artículos, que esta crisis de fundamentos tal vez haya sido un error o una mala interpretación de los escritos de la antigüedad, ya que, en caso de haber ocurrido, no alteró el curso de los descubrimientos griegos. La solución propuesta por Eudoxo surge de la evolución de los estudios que estaban en curso y, dos milenios después, sirvió como base para la construcción de los cortes de Dedekind, fundamentales para la concepción del concepto riguroso de números reales (racionales e irracionales). Este trabajo de investigación bibliográfica tiene como objetivo revisitar y retomar, desde el carácter histórico matemático, las principales ideas que surgieron con la aparición de las magnitudes inconmensurables y sus particularidades, desde la antigua Grecia, pasando por su culminación que resultó en la idea formal de números irracionales hasta llegar a la actualidad. Como contribución principal de este trabajo, destacamos la presentación de nuevas perspectivas y enfoques del tema en cuestión a partir de miradas al pasado a través de los hechos históricos, lo que permite comprender cómo se dieron los encadenamientos de ideas en el transcurso del tiempo, contribuyendo a la ampliación de la comprensión de los objetos y conceptos matemáticos en la actualidad.

Palabras clave. Commensurable, inconmensurable, irracional.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 01A55; secondary 01A20.

1 Introdução

Todo número racional não nulo é expresso como a razão de dois números inteiros não nulos. Por isso esses números são chamados de racionais. Segundo Leão (2019), uma proporção chamada pelos gregos de $\lambda o\gamma o\varsigma$ (logos), "razão", é a solução de uma divisão sem restos de dois inteiros não nulos. Os gregos tinham conhecimento de medidas por eles chamadas de $\breve{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$, "sem razão", cuja tradução para o latim é *inrationalis*, que deu origem à palavra irracional.

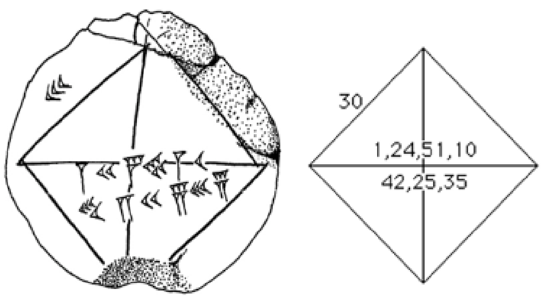
As grandezas irracionais não podem ser representadas pela razão de dois inteiros não nulos. Segundo Garbi (2007), a matemática da Grécia Antiga estava imersa em construções geométricas, sendo que os objetos de estudos matemáticos dos gregos antigos eram embasados em construções geométricas. As razões para os gregos eram construídas através da comensurabilidade, que é a ideia da existência de uma medida comum entre duas medidas de mesma grandeza (magnitudes). Contudo, quando duas medidas de mesma grandeza, por exemplo as medidas de dois segmentos (ou duas áreas ou dois volumes) não podem ser expressas por uma medida em comum, diz-se que elas são incomensuráveis. No livro X de Os Elementos, a primeira definição dada por Euclides é: "Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se" (EUCLIDES, 2009, p. 353).

A descoberta de medidas de grandezas incomensuráveis acarretou desenvolvimentos nas pesquisas matemáticas e novas abordagens para problemas matemáticos, como duplicação de áreas, relações entre segmentos notáveis de polígonos e sólidos geométricos. Vejamos, a partir dos fatos históricos, como esta descoberta acabou culminando no desenvolvimento formal da definição de número real (racional e irracional).

2 Comensuráveis e incomensuráveis

Para Eves (2004), os primeiros povos a terem um registro sistemático sobre números foram os sumérios, essa civilização foi a criadora de um sistema eficiente de escrita. Suas escritas eram feitas em tabletes de argila cozida e moldada em forma de cunha, esse material é encontrado conservado, mais de dois milênios após sua confecção. Em um tablete nomeado de YB-7289, conforme a Figura 1, é apresentado o desenho de um quadrado e sua diagonal, com uma numeração sexagesimal suméria que quando convertida a valores decimais obtém-se $1,414213$. Esse valor é uma ótima e surpreendente aproximação com seis casas decimais exatas, para o número que hoje sabemos ser irracional e que conhecemos como $\sqrt{2}$.

Figura 1: Tablete cuneiforme YB-7289



Fonte: Tatiana Roque, (2012).

A civilização egípcia nasceu e floresceu às margens do rio Nilo, eles desenvolveram uma matemática avançada e empírica. Os problemas que os egípcios se deparavam eram relacionados a questões práticas do cotidiano. Mastin (2010), apresenta um dos problemas expostos no papiro de Ahmes: "*Dividir* 3 *pães entre* 5 *pessoas?*" A solução dos egípcios: primeiro pegue dois pães e os divida em 3 partes, o que dá 6 pedaços de $1/3$; o outro pão, o divida em 5 partes; repartindo esses pedaços, cada pessoa ficará com $1/3 + 1/5$, porém sobra um pedaço de $1/3$, esse pedaço é dividido em 5 partes, assim temos $(1/3) : 5 = 1/15$. Logo cada pessoa recebe $1/3 + 1/5 + 1/15 = 9/15$, simplificando $3/5$. Atualmente resolvemos esse problema de forma direta, pois possuímos um sistema de numeração eficiente para contar. Tendo três pães, dividi-los com 5 pessoas, então cada pessoa recebe $3/5$ de pão. Alguns procedimentos empíricos dos egípcios, acabavam por tornar algumas de suas soluções mais intricadas que as atuais.

Os registros escritos dos egípcios eram feitos em rolos de papiros, uma fibra vegetal que se deteriora com o tempo, muitos deles se perderam, os que sobreviveram trouxeram aos estudiosos modernos problemas referentes a divisões, áreas e volumes.

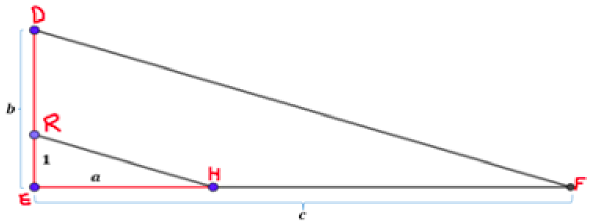
Para Launay (2019), a matemática desenvolvida pelos sumérios e egípcios era complexa, suas resoluções eram feitas por métodos empíricos que também exigiam criatividades. O denominador comum da matemática dessas civilizações é o empirismo.

Para Boyer (2012), no século VII AEC, os gregos iniciaram o desenvolvimento da matemática que hoje é denominada de matemática dedutiva axiomática. O desenvolvimento trilhou caminhos dedutivos com o intuito de desenvolver o conhecimento pelo conhecimento, o empirismo foi descartado e o desenvolvimento matemático se tornou um exercício intelectual.

Diferentemente dos outros povos, os gregos definiam seus objetos de estudos embasados no intelecto e organizado segundo uma lógica dedutiva. A geometria é um exemplo da exteriorização desses objetos idealizados intelectualmente e que não têm, necessariamente, uma existência física material. As operações matemáticas eram solúveis por meio de construções geométricas, feitas por régua sem escala e compasso. Talvez pela falta de uma simbologia matemática apropriada ou por serem embasadas sobre verdades simples, essas construções geométricas lograram desenvolvimento.

Para Roque (2012), o desenvolvimento da matemática dedutiva segundo fontes antigas inicia-se com Tales de Mileto. O teorema das proporções ou simplesmente teorema de Tales, possibilitou aos gregos fazerem contas aritméticas utilizando segmentos de retas. Por exemplo: tome dois segmentos de retas DE e EH perpendiculares no ponto E, com os respectivos comprimentos b e a, veja a Figura 2. Sobre DE, marque o ponto R, menor que b, cuja medida é uma unidade 1. Trace o segmento RH. Pelo ponto D trace uma paralela ao segmento RH que intersecta o prolongamento de EH no ponto F. Seja c a medida do segmento EF, conforme mostrado na Figura 2. Pela construção sabemos que os triângulos ERH e EDF são retângulos e semelhantes. Aplicando o teorema de Tales obtemos a relação: $1/a = b/c$ no que resulta em $c = ab$. Assim determinamos que o segmento de medida c é o produto das medidas a e b dos dois segmentos perpendiculares.

Figura 2: Triângulos que relacionam o teorema de Tales com o produto de dois números.

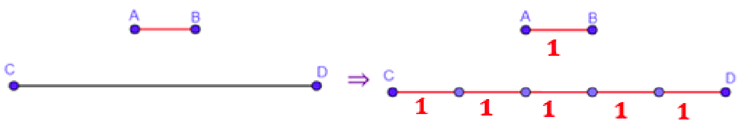


Fonte: próprio autor.

Devemos nos atentar ao que os gregos chamavam de números, pois a medida de um segmento é representada por um número, mas o segmento não é um número, ou seja, o número mede uma grandeza (magnitude). Segundo Roque (2012, p. 106), os comerciantes, os pastores e as mulheres utilizavam o sistema de numeração ática, uma forma prática que o cidadão comum tinha para executar cálculos práticos. A utilização das quatro operações aritméticas sempre foi algo extremamente importante para o comércio, a administração de propriedades e a cobrança de impostos. Contudo, os estudiosos gregos não utilizavam a numeração ática, o intuito desses estudiosos era compreender as estruturas intrínsecas dos números. O motivo disso se deve à utilização de segmentos para representar os números inteiros, $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*arithmós*), esses segmentos eram divididos igualmente em segmentos ainda menores, que os estudiosos chamam de unidade (U), a unidade é indivisível. Na obra Os Elementos, livro VII, é apresentado o que hoje conhecemos como Aritmética, conforme Euclides (2009, p. 269), “Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma”, “E número é a quantidade composta de unidades”. Atente-se que o “número” é sempre inteiro e positivo.

A noção de comensurabilidade entre duas medidas de mesma grandeza se dá quando existe uma “unidade” de medida que caiba, de forma exata, nas duas medidas. Assim, no caso de dois segmentos AB e CD, então CD é múltiplo de AB, se AB couber em CD um número inteiro de vezes. Assim, se $CD/AB = m$, com $m \in \mathbb{N}$, isto é, $CD = m \cdot AB$, então CD é dito múltiplo de AB. Além disso, esses dois segmentos são medidos pela mesma unidade, a saber, o próprio segmento AB, logo, eles são segmentos comensuráveis. A Figura 3 mostra um exemplo em que temos o segmento AB cabendo 5 vezes no segmento CD, assim, $AB = 5CD$. Logo, AB e CD são comensuráveis.

Figura 3: Segmentos de tamanhos múltiplos.

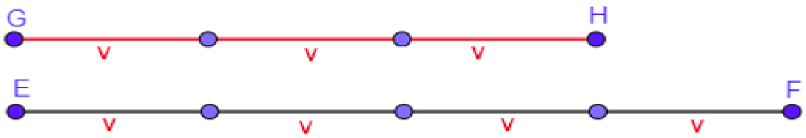


Fonte: próprio autor.

Se os segmentos EF e GH não são múltiplos um do outro, então, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, teremos $EF > m \cdot GH$ ou $EF < m \cdot GH$, jamais a igualdade, veja a Figura 4. Escolhendo convenientemente, caso exista, um segmento de medida V de forma que V encaixe p vezes em GH e V encaixe q vezes em EF, teremos dois segmentos múltiplos de V. Assim a relação: $GH/EF = p/q$, com p e q inteiros positivos, representam segmentos comensuráveis, pois são mensuráveis pela mesma medida V. Na Figura 4 podemos ver que, apesar de EF não ser múltiplo de GH, ainda assim, eles são mensuráveis pela medida V.

Os gregos convencionaram, equivocadamente, que para quaisquer dois segmentos, sempre existiria uma unidade convenientemente pequena que mediria ambos os segmentos. Para Boyer (2012, p. 71), houve o surgimento de uma crença alicerçada no contexto da comensurabilidade. Isto porque, uma vez que um segmento pode ser dividido em partes cada vez menores, ilimitadas vezes, então dados dois segmentos, deveria existir um terceiro segmento, suficientemente pequeno, de forma a se tornar uma unidade, capaz de caber uma quantidade inteira de vezes em ambos os segmentos dados. Sob uma perspec-

Figura 4: Segmentos não múltiplos.



Fonte: próprio autor.

tiva construtiva, parecia não existir motivos para duvidar da afirmação. Contudo isso se revelou falso.

3 A incomensurabilidade da diagonal e lado de um quadrado

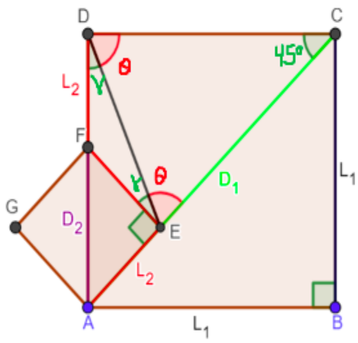
Segundo Garbi (2007), os pitagóricos, membros de uma seita fundada por Pitágoras de Samos, detentores de um enorme conhecimento numérico, tomavam os números sob uma áurea mística. Os estudos e os conhecimentos que os pitagóricos obtiveram, os levaram a engendrar uma relação intrínseca dos números com a realidade, de onde cunharam o lema "*no universo tudo é número*". A base do sistema filosófico pitagórico eram as grandezas comensuráveis, o viés de confirmação do seu lema, se expressa na música, as notas musicais são relações fracionárias do tamanho da corda e as partes que essa corda foi dividida. Por ironia é creditada aos pitagóricos a descoberta das grandezas incomensuráveis.

Segundo Leão (2019), não existem fontes confiáveis que expliquem o método que os pitagóricos utilizaram para encontrar as grandezas incomensuráveis. A proposição 2 do Livro X, presente em Os Elementos, apresenta o processo de antifairese ($\acute{\alpha}\nu\theta\upsilon\varphi\acute{\alpha}i\rho\epsilon\sigma i\varsigma$), um algoritmo capaz de determinar a inexistência de uma unidade que possa medir, simultaneamente, dois segmentos, como por exemplo a diagonal e o lado de um quadrado. "Caso sendo subtraída, de duas magnitudes (expostas) desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis" (EUCLIDES, 2009, p. 355).

Vejamos a descrição de um argumento geométrico que demonstra o fato de que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis. Considere um quadrado $ABCD$, conforme Figura 5, cujo lado $AB = L_1$ e a diagonal $AC = D_1$. Suponha que L_1 e D_1 sejam comensuráveis, portanto, eles podem ser expressos em função de alguma unidade finita, o que faz de cada um deles um múltiplo de alguma unidade finita, digamos v. Com centro em C e raio $CD = L_1$, tracemos um arco de circunferência DE, o qual intersecta a diagonal AC em E. Seja EF a tangente a esse arco em E. Note que obtemos outro quadrado menor, $AEFG$, cujo lado $AE = L_2$, onde $L_2 = D_1 - L_1$. De fato, é fácil provar que o triângulo FDE é isósceles, o que nos fornece $FD = L_2 = FE$. Essa conclusão garante que $L_1 = D_2 + L_2$, onde D_2 é a diagonal FA do quadrado menor.

Ao explicitar os valores de L_2 e D_2 em função de L_1 e D_1 obtemos: $L_2 = D_1 - L_1$, donde segue que $D_2 = L_1 - L_2 = L_1 - (D_1 - L_1)$. Então, concluímos que: $D_2 = 2L_1 - D_1$. Como L_2 e D_2 são dependentes de L_1 e D_1 e esses, por sua vez, possuem algum múltiplo da mesma unidade v, segue que L_2 e D_2 também possuem algum múltiplo da mesma unidade v. Como L_2 é o lado do quadrado $AEFG$, sua medida é menor que a metade de L_1 e o mesmo é válido para D_2, sua medida é menor que a metade de D_1. Assim, se no quadrado menor aplicarmos uma construção análoga à que fizemos anteriormente, podemos construir um outro quadrado com lado L_3 e diagonal D_3, menores que a metade de L_2 e D_2, respectivamente. E, analogamente, podemos ver que L_3 e D_3 são múltiplos da mesma unidade v, uma vez que $L_3 = D_2 - L_2$ e $D_3 = 2L_2 - D_2$. Este processo pode ser repetido quantas vezes quisermos, e a cada repetição obtemos um novo quadrado cujos lados e diagonal são menores que os anteriores e ainda assim, estes lados e diagonais são múltiplos de um valor fixo v. O que é absurdo, pois em algum momento tanto o lado quanto a diagonal ficarão menores que v. O absurdo advém de supormos que L_1 e D_1 são comensuráveis, logo eles só podem ser incomensuráveis.

Figura 5: Incomensurabilidade do lado do quadrado e sua diagonal.



Fonte: próprio autor.

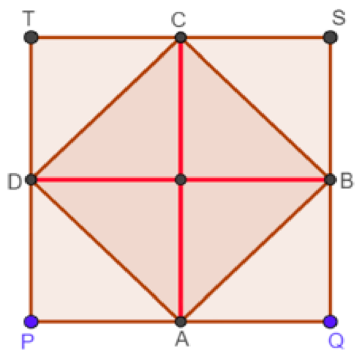
A incomensurabilidade, segundo Roque (2012), acarretou mudanças de paradigmas para a matemática grega, porém muitos livros sobre a história da matemática vão enfatizar que houve uma crise nos fundamentos matemáticos. Mas segundo alguns autores, como Leão (2019) e a própria Roque (2012), nunca houve uma crise dessa, ou não há bibliografias da época que descrevam essa crise. Contudo, escritos da época evidenciam o tratamento que os gregos davam às grandezas incomensuráveis. No diálogo de Platão, Mênon, vemos a utilização do método pedagógico socrático, lidando com grandezas incomensuráveis.

Pode-se sintetizar o diálogo de Sócrates da seguinte forma: dado um quadrado com o lado medindo dois pés, sua superfície mede quatro pés. Construir um quadrado com a superfície com o dobro da medida de quatro pés, ou seja, oito pés. Qual é a medida do lado desse quadrado?

Esse é um dos célebres problemas clássicos, conhecido como a duplicação da área de um quadrado: "dado um quadrado $ABCD$ de lado l, construir um outro quadrado que tenha o dobro da área de $ABCD$." Por mais simples que pareça a solução, uma pessoa não precavida poderá cogitar que dobrando o lado do quadrado, $2l$, sua área também dobrará, o que não é verdade. Então como resolvemos o problema?

A solução do problema induzida por Sócrates, consiste em tomar a medida da diagonal do quadrado que o lado mede dois pés, essa diagonal é o lado do quadrado cuja superfície mede oito pés, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6: Duplicação da área de um quadrado.



Fonte: próprio autor.

O quadrado $ABCD$ tem seus lados com medida de dois pés. O segmento CA é congruente a DB, sendo também a medida da diagonal de $ABCD$. O segmento CA tem a mesma medida dos lados do quadrado $PQST$, com o dobro da superfície do quadrado $ABCD$. O lado do quadrado é incomensurável com sua diagonal, porém as superfícies dos dois quadrados são comensuráveis.

Sócrates não escreveu nenhuma obra, todo ensinamento socrático é baseado nos escritos de seus discípulos, sendo um deles Platão, que era matemático. Apesar dos diálogos serem idealizações de Platão, a resolução expõe uma forma dos gregos lidarem com grandezas incomensuráveis, não as abominando, mas utilizando-as de forma construtiva.

Garbi (2007), conta que Platão estudou matemática com Árquitas e Timeu, matemáticos pertencentes aos pitagóricos. Esse conhecimento matemático de Platão está presente em seus diálogos: Timeu, Mênon, Teeteto. Aristóteles foi um discípulo de Platão, detentor de enorme conhecimento matemático. Nos escritos de Platão e Aristóteles, estão expostos métodos para operar grandezas incomensuráveis e explicações sobre a sua natureza.

4 Os números reais: de Eudoxo a Dedekind

O teorema de Tales é um resultado que relaciona segmentos e determina proporcionalidades. O teorema das proporções relaciona apenas grandezas de mesma espécie, como: linhas com linhas, áreas com áreas e volumes com volumes. Porém duas grandezas de mesma espécie que são incomensuráveis não detêm nenhuma proporção, pois se detivessem seriam comensuráveis. Então esse teorema não é aplicável, no caso da incomensurabilidade, mesmo assim, os segmentos incomensuráveis surgem espontaneamente na geometria. Eudoxo, um dos estudantes da Academia de Platão, conseguiu contornar um inconveniente existente entre o Teorema de Tales e as grandezas incomensuráveis.

Eves (2004), escreve que no século IV A. E. C., Eudoxo de Cnido, enunciou o que conhecemos como postulado Eudoxo-Arquimedes: “duas magnitudes podem ser comparadas quando um múltiplo de cada uma delas for maior do que a outra”, desse postulado, sabemos que o lado do quadrado é menor que a diagonal do quadrado; a diagonal é menor que o dobro do lado do quadrado ($l < d < 2l$). Esse postulado é a reformulação do teorema das proporções, possibilitando relacionar segmentos com áreas, áreas e volumes ou segmentos e volumes que são magnitudes de espécies diferentes.

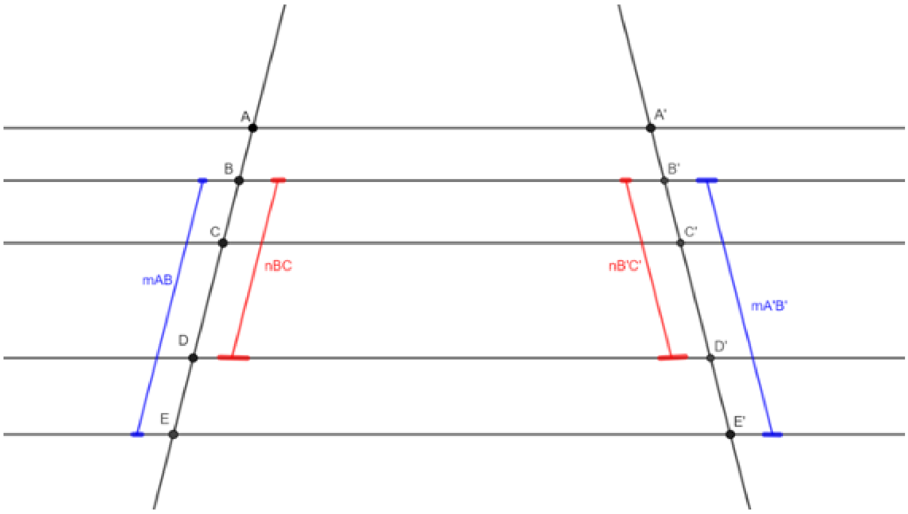
Em Boyer (2012), temos a explicação do postulado de Eudoxo: dadas quatro grandezas A, B, C, D, as duas primeiras de mesma espécie e as duas últimas também, mas os dois pares não são necessariamente de mesma espécie, assim as relações $A : B$ e $C : D$ são iguais sempre que, dados $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} mA > nB &\iff mc > nd;\\ mA = nB &\iff mc = nd;\\ mA < nB &\iff mc < nd. \end{aligned} \tag{1}$$

Eudoxo aplicou a relação (1) ao teorema de Tales: dado um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, como na Figura 7, onde os segmentos AB e BC são incomensuráveis entre si, tome $BE = mAB$, $BD = nBC$, $B'E' = mA'B'$ e $B'D' = nB'C'$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Da relação (1) temos: se $mAB = nBC$, então D e E coincidem. Logo, D' e E' também coincidem, caso contrário, por E coincidente com D haveria duas paralelas a BB'. Mas, se D' coincide com E' então $mA'B' = nB'C'$. Ou seja, $mAB = nBC \Rightarrow mA'B' = nB'C'$.

Suponhamos que $mAB > nBC$. Se esta hipótese não implicasse $mA'B' > nB'C'$, então ou $mA'B' = nB'C'$ ou $mA'B' < nB'C'$. A primeira relação é falsa, pelo raciocínio anterior ela obrigaria $mAB = nBC$ contrariando a hipótese. A segunda também não é possível pois $mAB > nBC$ significa que o ponto D está entre C e E', enquanto $mA'B' < nB'C'$ significa que o ponto E' estaria entre C' e D'. Mas isto obriga as retas DD' e EE' a se cruzarem, o que é um absurdo porque são paralelas. Logo $mAB > nBC \Rightarrow mA'B' > nB'C'$. De forma análoga prova-se que: $mAB < nBC \Rightarrow mA'B' < nB'C'$. Portanto pela definição de Eudoxo, $AB/BC = A'B'/B'C'$, e o teorema de Tales está demonstrado, independentemente da comensurabilidade, como exposto na Figura 7.

Figura 7: Teoria das proporções de Eudoxo.



Fonte: próprio autor.

Eudoxo, de forma brilhante resolveu os impasses decorrentes das grandezas incomensuráveis. O motivo da existência de algum inconveniente motivado pelos incomensuráveis é devido à natureza dedutiva de juízo sintético *a priori*. A veracidade de seus teoremas, embasam-se no rigor lógico e geométrico. Os matemáticos da antiguidade dispunham apenas da geometria, para provar rigorosamente seus teoremas, além da falta de um sistema notacional simbólico.

No século XIX, mais de dois mil anos depois de Eudoxo, a matemática se encontrava bastante desenvolvida, com uma notação mais sofisticada e consumada. Neste século a matemática começou sua fundamentação lógica-rigorosa, contudo as grandezas incomensuráveis, que deram lugar aos números irracionais, geravam equívocos. Georg Cantor (1845 a 1918), estudou o que denominou cardinalidade dos conjuntos numéricos. Ele utilizava a palavra cardinalidade para comparar conjuntos infinitos. Dizendo que dois conjuntos infinitos tinham a mesma **cardinalidade** quando existia uma bijeção entre eles. Portanto, estes conjuntos teriam, grosso modo, o mesmo "tanto" de elementos, lembrando que este "tanto" se refere a um infinito. Então os conjuntos com mesma cardinalidade teriam o mesmo infinito de elementos. Quando um conjunto numérico tinha uma bijeção com o conjunto dos naturais, isto é, tinha a mesma cardinalidade dos naturais, Cantor dizia que esse conjunto era infinito e **enumerável**. Cantor mostrou, surpreendentemente, que os inteiros eram conjuntos enumeráveis, assim como os racionais. Mais surpreendente ainda, foi a demonstração de que o conjunto dos números reais não são enumeráveis. Cantor provou que qualquer tentativa de bijeção entre os naturais e os reais sempre resulta em uma sobra de elementos no conjunto dos reais. Portanto, o conjunto dos números reais teriam um infinito diferente do infinito dos naturais, um infinito, por assim dizer, "maior" que o dos naturais, se pudéssemos comparar infinitos em termos de maiores e menores que outros. Cantor também observou que o conjunto dos números reais, sendo constituído pela união de racionais com irracionais, e além disso, o conjunto dos racionais sendo enumerável, só restaria aos irracionais serem não enumeráveis, já que os reais não são enumeráveis. Assim, Cantor chega à conclusão de que o conjunto dos números irracionais deve ser, grosso modo, de um infinito "maior" que o infinito dos racionais.

Em paralelo com Cantor, Richard Dedekind (1831 a 1916), desenvolveu a teoria dos números reais, que até então não tinha um embasamento rigoroso. A primeira questão que chamou a atenção de Dedekind foi a existência de uma relação biunívoca entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta.

Dedekind percebeu a falta de fundamentação dos números, que até então eram definidos pela geometria. O cálculo de Newton e Leibniz, era fundamentado pela geometria. Na obra "o que são e para que servem os números?" Dedekind mencionou: "os números são criações livres da mente humana; eles servem como um meio de aprender mais facilmente e mais distintamente a diferença das coisas". A pretensão era fundamentar os números de forma puramente lógica, o domínio do contínuo numérico criado em nossa mente.

Em Boyer (2012), veremos que o contínuo numérico é uma referência aos números reais. Existe uma relação entre o contínuo numérico, com a continuidade da reta, como especificado no axioma Cantor-Dedekind: "existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta". A continuidade é uma consequência da densidade de um número sobre a reta numérica, é a garantia que entre dois pontos distintos sempre existe um terceiro ponto distinto dos demais, ou, em linguagem aritmética, entre dois números distintos sempre existe outro número diferente dos demais. Os racionais são densos, pois entre dois racionais distintos sempre há um racional, mas eles não formam um contínuo.

Dedekind precisava determinar os números irracionais aritmeticamente. Segundo Oliveira (2022), qualquer número racional k separa o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais em duas classes A e B, de forma que todo número $a \in A$ é menor que todo elemento $b \in B$; o número k é o elemento máximo da classe A e k é o elemento mínimo da classe B. O número k é o elemento de separação dessas classes, então temos um *Schnitt*, ou corte de Dedekind. Essa propriedade garante que em um corte, existindo um elemento mínimo ou um elemento máximo, o corte é produzido por um número racional.

Existem cortes produzidos por números não racionais. Tome G um inteiro maior que zero que não é um quadrado perfeito, então existe um inteiro positivo n de forma que: $n^2 < G < (n+1)^2$. Todo número a da classe A seu quadrado é menor que G; como todo número b da classe B seu quadrado é maior que G. Se existe um número racional cujo quadrado é G, logo existem dois inteiros positivos v e w que satisfazem a equação $v^2 - Gw^2 = 0$, sendo que w é o menor inteiro cujo produto do seu quadrado por G é igual a um quadrado de um inteiro v, daí conclui-se que $nw < v < (n+1)w$. O número $w' = v - nw$, um inteiro positivo menor que w. Podemos escrever $v' = Gw - nv$, um inteiro positivo, assim obtemos: $v'^2 - Gw'^2 = (n^2 - G)(v^2 - Gw^2) = 0$, contrariando a hipótese sobre w. Portanto, o quadrado de qualquer número racional x ou é maior que G ou é menor que G. Resultando que não há uma classe A com um máximo e nem uma classe B com um mínimo. Se pusermos: $y = \frac{x(x^2+3G)}{3x^2+G}$, daí vem $y - x = \frac{2x(G-x^2)}{3x^2+G}$ e $y^2 - G = \frac{(x^2-G)^3}{(3x^2+G)^2}$, com x e y positivos.

Admitindo que $x \in A$, então $x^2 < G$, portanto $y > x$ e $y^2 < G$, assim $y \in A$. Porém se $x \in B$, então $x^2 > G$, portanto $y < x$ e $y^2 > G$, assim $y \in B$. Por conseguinte, este corte não é produzido por nenhum número racional. Para Oliveira (2022), sempre que obtivermos um corte não produzido por um número racional criamos um número irracional, completamente definido por este corte.

Para Ávila (2001), um corte é um par (A, B) de conjuntos não vazios de números racionais, satisfazendo as seguintes condições:

1. $A \cup B = \mathbb{Q}$;

2. Todo elemento de A é estritamente menor que todo elemento de B.

Como exemplo de corte consideremos os seguintes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 > 2\}.$$

Note que A e B são conjuntos não vazios de números racionais onde $A \cup B = \mathbb{Q}$, além disso, todo elemento de A é estritamente menor que todo elemento de B. Logo, temos que (A, B) é um corte. Como não existe nenhum racional x que satisfaça $x^2 = 2$, então não existe elemento máximo em A e nem mínimo em B. Portanto o número $\sqrt{2}$ deve ser criado como elemento de separação entre os conjuntos desse corte.

> Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional. (CARAÇA, 1975, p. 135).

Os cortes de Dedekind determinam completamente os números reais, caso o corte tenha um elemento separador entre os conjuntos, esse elemento será um número racional, caso contrário, isto é, caso o corte não tenha um elemento separador dos dois conjuntos, então ele definirá um número irracional. Cada corte bem definido corresponde rigorosamente a um número real. Porém os cortes ainda não respondem a real estrutura dos irracionais.

Aristóteles em seu Primeiros Analíticos: 'se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; esta contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas". (ARISTÓTELES apud ROQUE 2012). Demonstrações referentes aos irracionais, são feitas pelo método de redução ao absurdo, Aristóteles utilizava esse método na demonstração da incomensurabilidade entre grandezas. O processo de antifairese, ou subtração recíproca entre duas magnitudes de mesma espécie, desencadeia um processo recorrente sem fim, ao lidar com a incomensurabilidade. O análogo é observado no corte determinado por um número irracional.

Os irracionais são naturalmente constituídos por "infinitudes", revelada em sua representação decimal, onde está presente a dízima não periódica. A densidade é outra propriedade que corrobora com a natureza de infinitudes.

5 Considerações finais

Os sumérios, os babilônios e os egípcios conheciam os números irracionais, esses povos lidavam com problemas que envolviam cálculos de áreas e volumes, nesses cálculos aparecem valores irracionais. Esses matemáticos compreendiam a diferença entre valores irracionais e valores discretos das contagens. Se eles compreendiam efetivamente as infinitudes presentes nos irracionais, não existem escritos que corroboram isto ou esses escritos não sobreviveram ao tempo. Garbi (2007) explicita o valor do π para cada uma dessas civilizações. Para os egípcios esse valor era $3,16$, para os babilônios era $3,125$, para os hebreus era 3. Esses valores, foram obtidos da área de um quadrado em que seu lado era alguma fração do diâmetro de uma circunferência, ou o cálculo do diâmetro inscrito e circunscrito em uma circunferência de raio unitário.

Os gregos conheciam o pi, mas eles determinaram seu valor como $22/7$, que é aproximadamente $3,14$. Vale ressaltar que a quantidade de casas decimais consideradas para o valor de pi, foi uma construção desenvolvida ao longo da história da matemática e o nome atual dessa constante irracional foi dada por Euler no século XVIII. Os matemáticos gregos, conheciam as infinitudes dos irracionais, o seu método de antifairese atesta isso. Na representação numérica dos valores irracionais as frações serviam para representar esses valores, o motivo disso era a falta de um sistema de numeração mais eficiente, ou, um sistema notacional eficiente.

Na época de Richard Dedekind, a matemática havia progredido, existia um sistema numérico e notacional eficiente. Porém a natureza dos números reais era desconhecida, o postulado de Eudoxo trouxe uma luz e uma forma de determinar aritmeticamente o que são os números irracionais, e sua representação decimal com uma infinitude de valores distintos após a vírgula e sem um padrão periódico de repetição desses valores.

Os gregos ao se depararem com as grandezas incomensuráveis, observaram que não existia nenhuma unidade arbitrária capaz de medir uma grandeza incomensurável com outra grandeza, e por mais que se tentassem, eles deparavam com uma nova cadeia de procedimentos infindáveis. A propriedade notável dos irracionais são as infindáveis casas após a vírgula sem repetição de um período determinado.

Os irracionais aparecem na natureza de forma espontânea. Em inúmeras relações matemáticas empíricas, as medidas são irracionais. Um número irracional pode ser visto como o limite da convergência de uma sequência de números racionais que o aproxima. Além disso, quanto maior a precisão da ferramenta de medida que se utiliza para uma aproximação por racional, menor o erro observado entre esse e o irracional. Os racionais possuem a mesma cardinalidade dos naturais, mas os reais não possuem essa cardinalidade, ou seja, o infinito dos racionais é distinto do infinito dos reais. Uma consequência imediata disto é que o infinito dos irracionais é diferente do infinito dos racionais, e podemos, grosso modo, afirmar que o infinito dos irracionais é "maior" que o infinito dos racionais.

Por fim, revisitar e retomar algumas das principais ideias que se deram com o surgimento das grandezas incomensuráveis, a partir de uma perspectiva histórica, equivale a lançar olhares mais aprofundados ao passado, a partir dos fatos históricos, o que permite compreender como se deram os encadeamentos de ideias no percurso temporal da construção do conhecimento matemático, possibilitando a ampliação da compreensão de objetos e conceitos matemáticos na atualidade.

Referências

[1] ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura.** 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

[2] BOYER, C. B.; MERZBACH, U.C. **História da matemática.** Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

[3] CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 1975.

[4] EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução: Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2009.

[5] EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

[6] GARBI, G. G. **A rainha das ciências:** um passeio pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[7] LEÃO, A. **Euclides e a incomensurabilidade:** o profundo tear das abrangências - Os sumos segredos do livro X. 1. ed. São Paulo: Chiados books, 2019.

[8] LAUNAY, M. **A fascinante história da matemática:** da pré-história aos dias de hoje. Tradução: Clóvis Marques. 1.ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

[9] MASTIN, L. **Egyptian mathematics.** 2010. Disponível em: `https://www.storyofmathematics.com/egyptian.html`. Acesso em: 5 abr. 2023.

[10] NIVEN, I. **Números: racionais e irracionais.** Tradução: Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

[11] OLIVEIRA, A. J. F. **Dedekind e os números:** antologia de textos fundacionais de Richard Dedekind. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022. 194 p.

[12] PLATÃO. **Mênon.** Tradução: Maura Iglésia. 8. ed. Rio de Janeiro: Loyola, 2001. 120 p.

[13] ROQUE, T. M.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 467 p.

[14] IMPERATIVO MATEMÁTICO. **Tudo o que você precisa saber sobre os números reais:** uma não tão breve história do espaço. 2020. 1 vídeo (38 min). Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=FPMkpma-4-8`. Acesso em: 02 fev. 2023.

Submetido em 15 dez. 2023
Aceito em 05 mar. 2024