Brazilian Electronic Journal of Mathematics, v.4, jan/dez, 2023. ISSN: 2675-1313

Relações bi, tri e n-dimensionais de Mersenne [1]

Two-dimensional, three-dimensional and n-dimensional Mersenne relations

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Inst. Fed. de Educ., Ciência e Tec. do Estado do Ceará - IFCE
milenacarolina24@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4446-155X

Renata Passos Machado Vieira
Universidade Federal do Ceará - UFC
re.passosm@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1966-7097

Francisco Regis Vieira Alves
Inst. Fed. de Educ., Ciência e Tec. do Estado do Ceará - IFCE
fregis@ifce.edu.br
ORCID: 0000-0003-3710-1561

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD
pcatarino23@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6917-5093

Roger Oliveira Sousa
Universidade Estadual do Ceará - UECE
roger.oliveira@uece.br
ORCID: 0009-0001-8545-8306

Resumo. A sequência de Mersenne, batizada em homenagem ao matemático francês Marin Mersenne, é uma progressão recursiva de segunda ordem representada por um modelo unidimensional, cujos números podem ser expressos na forma $M_n = 2^n - 1$. Esta pesquisa tem como objetivo explorar e investigar as relações recorrentes em diferentes dimensões, incluindo as bidimensionais $(M(n, m))$, tridimensionais $(M(n, m, p))$ e n-dimensionais $(M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t))$. O modelo unidimensional utilizado é definido pela recorrência $M_{n+1} = 3M_n - 2M_{n-1}$, onde n é um número inteiro não negativo, e os valores iniciais são estabelecidos como $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. A pesquisa examina a evolução da sequência e seu processo de complexificação. Durante essa análise, são identificadas propriedades matemáticas das relações desses números, enfatizando o aumento dimensional da sequência

[1] A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito do projeto UID/CED/00194/2020.

e a introdução de unidades imaginárias i, j, $\cdots$, μ_n. Isso culmina na generalização das relações n-dimensionais, proporcionando uma compreensão mais abrangente e profunda da sequência de Mersenne.

Palavras-chave. Sequência de Mersenne. Relações bidimensionais. Relações tridimensionais. Relações n-dimensionais.

Abstract. The Mersenne sequence, named in honor of the French mathematician Marin Mersenne, is a second-order recursive progression represented by a one-dimensional model, and its numbers can also be described in the form $M_n = 2^n - 1$. This research aims to explore and investigate the recurring relationships in two-dimensional $(M(n, m))$, three-dimensional $(M(n, m, p))$, and n-dimensional $(M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t))$ spaces based on the one-dimensional model $M_{n+1} = 3M_n - 2M_{n-1}$, where n is a non-negative integer, and the initial values are set as $M_0 = 0$ and $M_1 = 1$. The evolution of the sequence is examined along with its process of complexification. Throughout this analysis, mathematical properties of these number relations are identified, emphasizing the dimensional expansion of the sequence and the inclusion of imaginary units $i, j, \cdots, \mu_n$, culminating in the generalization of n-dimensional relationships.

Keywords. Mersenne Sequence. Two-dimensional relationships. Three-dimensional relationships. n-dimensional relations.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 11B37; secondary 11B39.

1 Introdução

A sequência de Mersenne, a qual o nome é atribuído em homenagem ao matemático francês Marin Mersenne (1588 - 1648), é uma sequência linear e recursiva de segunda ordem. Os números de Mersenne são descritos na forma $M_n = 2^n - 1$, com n inteiro não negativo [6, 7].

Após alguns estudos, [4], introduziram uma nova relação, baseada na fórmula original e na recorrência da sequência de Fibonacci, dada por: $M_{n+1} = 3M_n - 2M_{n-1}, n \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$, com os valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$.

A equação característica dessa sequência é dada pela equação característica $x^2 - 3x + 2 = 0$, apresentando as duas soluções para este polinômio como sendo raízes reais 2 e 1. Destaca-se que o primeiro valor possui relação com o número de cobre (valor de aproximadamente 2). Esta relação é dada ao definir uma subsequência, obtida pela divisão de um termo da sequência pelo seu antecessor [1, 2, 3].

A partir dessa relação de recorrência, conhecida também como modelo unidimensional, e, com base nos estudos de [5], serão inseridas unidades imaginárias, realizando um aumento da dimensão da sequência de Mersenne. Diante disso, serão explorados os aspectos matemáticos das relações recorrentes bidimensionais, tridimensionais e da sua generalização n-dimensional.

De fato, a evolução matemática das identidades bidimensionais dessa sequência é dada por meio de duas variáveis m e n para os números na forma complexa $M(n,m)$, e devem satisfazer as relações recorrentes: $M(n+2,m) = 3M(n+1,m)-2M(n,m)$ e $M(n,m+2) = 3M(n,m+1) - 2M(n,m)$. De maneira similar, obtém-se que as identidades tridimensionais $M(n,m,p)$, com as seguintes relações de recorrência: $M(n+2,m,p) = 3M(n+1,m,p) - 2M(n,m,p)$, $M(n,m+2,p) = 3M(n,m+1,p) - 2M(n,m,p)$ e $M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p)$. A generalização do processo de complexificação dessa sequência é dada pela obtenção das relações n-dimensionais com $n_1, n_2, \cdots, n_t$ variáveis para os números $M(n_1,n_2,\cdots,n_t)$.

2 As relações bidimensionais de Mersenne

A seguir, serão estudadas as relações bidimensionais de Mersenne, com base no seu modelo unidimensional [8, 9, 10]. Considera-se $\mathbb{N}$ como o conjunto dos inteiros não negativos.

Definição 1. *Os números na forma $M(n,m)$, com $n,m \in \mathbb{N}$, são definidos como a* Sequência Bidimensional de Mersenne*, satisfazendo as seguintes relações de recorrência:*

$$\begin{cases} M(n+2,m) &= 3M(n+1,m) - 2M(n,m) \\ M(n,m+2) &= 3M(n,m+1) - 2M(n,m) \end{cases}$$

com as condições iniciais: $M(0,0) = 0; M(1,0) = 1; M(0,1) = i$ e $M(1,1) = 1+i$, onde $i^2 = -1$.

Lema 1. *Valem as seguintes propriedades:*
(a) $M(n,0) = M_n$;
(b) $M(0,m) = M_m i$;
(c) $M(1,m) = M_1 + M_m i$;
(d) $M(n,1) = M_n + M_1 i$.

Demonstração. (a) Através da recorrência $M(n+2,m) = 3M(n+1,m) - 2M(n,m)$, fixando $m = 0$, recorre-se ao Princípio de Indução Matemática para a prova deste Lema. Nesse sentido, para $n = 0$, temos uma condição inicial:

$$M(0,0) = 0 = M_0$$

Tem-se que a igualdade é válida, tendo em vista que $M(0,0) = 0$.
Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l,0) = M_l$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(k+1,0)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,0) &= 3M(k,0) - 2M(k-1,0) \\ &= 3M_k - 2M_{k-1} \\ &= M_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se a validade do Lema 1 (a).
(b) Utilizando a recorrência $M(n,m+2) = 3M(n,m+1) - 2M(n,m)$ e o Princípio de Indução Matemática, tem-se:
para $m = 0$, temos uma condição inicial:

$$M(0,0) = 0 = M_0$$

Tem-se que a igualdade é válida, pois $M(0,0) = M_0 i$.
Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(0,l) = M_l i$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(0,k+1)$.

$$\begin{aligned} M(0,k+1) &= 3M(0,k) - 2M(0,k-1) \\ &= 3M_k i - 2M_{k-1} i \\ &= M_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, tem-se a validade do Lema 1 (b).
(c) Utilizando a recorrência $M(n,m+2) = 3M(n,m+1) - 2M(n,m)$, fixando $n = 1$, pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:
para $m = 0$, usando-se o item (a):

$$M(1,0) = M_1 = M_1 + M_0 i$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(1, l) = M_1 + M_l i$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(1, k+1)$.

$$\begin{aligned} M(1,k+1) &= 3M(1,k) - 2M(1,k-1) \\ &= 3(M_1 + M_k i) - 2(M_1 + M_{k-1} i) \\ &= 3M_1 - 2M_1 + 3M_k i - 2M_{k-1} i \\ &= M_1 + M_{k+1} i \end{aligned}$$

Logo, tem-se que o Lema 1 (c) é válido.
(d) Utilizando a recorrência $M(n+2, m) = 3M(n+1, m) - 2M(n, m)$, fixando $m = 1$, pelo Princípio de Indução Matemática, tem-se:
para $n = 0$, usando-se o item (b):

$$M(0,1) = M_1 i = M_0 + M_1 i$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l, 1) = M_l + M_1 i$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(k+1, 1)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,1) &= 3M(k,1) - 2M(k-1,1) \\ &= 3(M_k + M_1 i) - 2(M_{k-1} + M_1 i) \\ &= 3M_k - 2M_{k-1} + 3M_1 i - 2M_1 i \\ &= M_{k+1} + M_1 i \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 1 (d). $\square$

Teorema 1. *Para os dois inteiros não negativos n, m, os números bidimensionais de Mersenne são descritos por:*

$$M(n,m) = M_n + M_m i.$$

Demonstração. *Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como meio de prova para o teorema em questão. Comecemos por fixar $n \in \mathbb{N}$ e vamos usar indução sobre m. Para $m = 0$, pelo Lema 1(a), temos:*

$$M(n,0) = M_n = M_n + 0i = M_n + M_0 i$$

Suponhamos agora que é válido para todo $0 < l \leq k$, com n fixo, ou seja, $M(n, l) =$

$M_n + M_l i$. *Vamos mostrar que isso implica na validade para* $M(n, k+1)$.

$$\begin{aligned} M(n,k+1) &= 3M(n,k) - 2M(n,k-1) \\ &= 3(M_n + M_k i) - 2(M_n + M_{k-1} i) \\ &= 3M_n - 2M_n + 3M_k i - 2M_{k-1} i \\ &= M_n + M_{k+1} i \end{aligned}$$

Como pretendíamos mostrar.
Agora, vamos fixar $m \in \mathbb{N}$ *e usar indução sobre* n.
Para $n = 0$, *pelo Lema 1(b), temos:*

$$M(0,m) = M_m i = 0 + M_m i = M_0 + M_m i$$

Suponhamos agora que é válido para todo $0 < l \leq k$, *com* m *fixo, ou seja,* $M(l,m) = M_l + M_m i$. *Vamos mostrar que isso implica na validade para* $M(k+1, m)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,m) &= 3M(k,m) - 2M(k-1,m) \\ &= 3(M_k + M_m i) - 2(M_{k-1} + M_m i) \\ &= 3M_k - 2M_{k-1} + 3M_m i - 2M_m i \\ &= M_{k+1} + M_m i \end{aligned}$$

O que completa a demonstração do teorema. □

3 As relações tridimensionais de Mersenne

Nesta seção, serão apresentadas as relações tridimensionais de Mersenne, a partir do seu modelo unidimensional.

Definição 2. *Os números na forma* $M(n,m,p)$ *são definidos como a Sequência Tridimensional de Mersenne, satisfazendo as seguintes relações de recorrência, em que* n, m, p *são inteiros não negativos:*

$$\begin{cases} M(n+2,m,p) = 3M(n+1,m,p) - 2M(n,m,p) \\ M(n,m+2,p) = 3M(n,m+1,p) - 2M(n,m,p) \\ M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $M(0,0,0) = 0, M(1,0,0) = 1, M(0,1,0) = i, M(0,0,1) = j, M(1,0,1) = 1+j, M(1,1,0) = 1+i, M(0,1,1) = i+j, M(1,1,1) = 1+i+j$, *onde*

$i^2 = j^2 = -1$.

Lema 2. *As seguintes propriedades são válidas para a sequência tridimensional de Mersenne:*
(a) $M(n,0,0) = M_n$;
(b) $M(0,m,0) = M_m i$;
(c) $M(0,0,p) = M_p j$;
(d) $M(n,1,0) = M_n + M_1 i$;
(e) $M(n,0,1) = M_n + M_1 j$;
(f) $M(n,1,1) = M_n + M_1 i + M_1 j$;
(g) $M(1,m,0) = M_1 + M_m i$;
(h) $M(0,m,1) = M_m i + M_1 j$;
(i) $M(1,m,1) = M_1 + M_m i + M_1 j$;
(j) $M(1,0,p) = M_1 + M_p j$;
(k) $M(0,1,p) = M_1 i + M_p j$;
(l) $M(1,1,p) = M_1 + M_1 i + M_p j$;
(m) $M(n,m,0) = M_n + M_m i$;
(n) $M(n,0,p) = M_n + M_p j$;
(o) $M(0,m,p) = M_m i + M_p j$.

Demonstração. (a) Através da recorrência $M(n+2,m,p) = 3M(n+1,m,p) - 2M(n,m,p)$, fixando os valores de $m = 0$, $p = 0$, aplicaremos o princípio de indução sobre n. Para $n = 0$, temos uma condição inicial, conforme Definição 2:

$$M(0,0,0) = 0 = M_0;$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leqslant k$, ou seja, $M(l,0,0) = M_l$.
Vamos mostrar que isso implica para $M(k+1,0,0)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,0,0) &= 3M(k,0,0) - 2M(k-1,0,0) \\ &= 3M_k - 2M_{k-1} \\ &= M_{k+1} \end{aligned}$$

Desse modo, o Princípio da Indução Finita nos garante a validade do Lema 2(a).
(b) Através da recorrência $M(n,m+2,p) = 3M(n,m+1,p) - 2M(n,m,p)$, fixando $n = 0$, $p = 0$, aplicaremos indução sobre m. Nesse sentido, para $m = 0$, tem-se uma condição inicial da Definição 2:

$$M(0,0,0) = 0 = M_0 i$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leqslant k$, ou seja, $M(0, l, 0) = M_l i$.
Vamos mostrar que isso implica que também é válido para $M(0, k + 1, 0)$.

$$\begin{aligned} M(0, k+1, 0) &= 3M(0, k, 0) - 2M(0, k-1, 0) \\ &= 3M_k i - 2M_{k-1} i \\ &= M_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(b).
(c) Através da recorrência $M(n, m, p+2) = 3M(n, m, p+1) - 2M(n, m, p)$ da Definição 2, fixando $n = 0$, $m = 0$, aplicaremos indução sobre p. Nesse sentido, para $p = 0$, temos uma condição inicial da Definição 2:

$$M(0, 0, 0) = 0 = M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(0, 0, l) = M_l j$.
Vamos mostrar que isso implica que também é válido para $M(0, 0, k + 1)$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0, 0, k+1) &= 3M(0, 0, k) - 2M(0, 0, k-1) \\ &= 3M_k j - 2M_{k-1} j \\ &= M_{k+1} j \end{aligned}$$

Logo, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(c).
(d) Através da recorrência $M(n + 2, m, p) = 3M(n + 1, m, p) - 2M(n, m, p)$, fixando $m = 1$, $p = 0$, aplicaremos indução sobre n. Nesse sentido, para $n = 0$, usando o item (b):

$$M(0, 1, 0) = M_1 i = M_0 + M_1 i$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l, 1, 0) = M_l + M_1 i$.
Vamos mostrar que isso implica que também é válido para $M(k + 1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} M(k+1, 1, 0) &= 3M(k, 1, 0) - 2M(k-1, 1, 0) \\ &= 3(M_k + M_1 i) - 2(M_{k-1} + M_1 i) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_1 - 2M_1) i \\ &= M_{k+1} + M_1 i \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(d).
(e) Através da recorrência $M(n+2, m, p) = 3M(n+1, m, p) - 2M(n, m, p)$ da Definição

2, fixando $m = 0$, $p = 1$, aplicaremos indução em n. Nesse sentido, para $n = 0$, usando-se o item (c):

$$M(0, 0, 1) = M_1 j = M_0 + M_1 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l, 0, 1) = M_l + M_1 j$.

Vamos mostrar que isso implica também que é válido para $M(k + 1, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,0,1) &= 3M(k,0,1) - 2M(k-1,0,1) \\ &= 3(M_k + M_1 j) - 2(M_{k-1} + M_1 j) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_1 - 2M_1)j \\ &= M_{k+1} + M_1 j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução garante-nos a validade do Lema 2(e).
(f) Através da recorrência $M(n+2, m, p) = 3M(n+1, m, p) - 2M(n, m, p)$ da Definição 2, fixando $m = 1$, $p = 1$, aplicaremos indução em n. Para $n = 0$, temos a condição inicial conforme Definição 2, logo:

$$M(0, 1, 1) = i + j = M_0 + M_1 i + M_1 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l, 1, 1) = M_l + M_1 i + M_1 j$. Vamos mostrar que isso implica que também é válido para $M(k + 1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,1,1) &= 3M(k,1,1) - 2M(k-1,1,1) \\ &= 3(M_k + M_1 i + M_1 j) - 2(M_{k-1} + M_1 i + M_1 j) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_1 - 2M_1)i + (3M_1 - 2M_1)j \\ &= M_{k+1} + M_1 i + M_1 j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(f).
(g) Através da recorrência $M(n, m+2, p) = 3M(n, m+1, p) - 2M(n, m, p)$ da Definição 2, fixando $n = 1$, $p = 0$, aplicaremos indução sobre m. Para $m = 0$, usando-se o item (a):

$$M(1, 0, 0) = M_1 = M_1 + M_0 i \quad (1)$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(1, l, 0) = M_1 + M_l i$.

Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(1, k+1, 0)$.

$$\begin{aligned} M(1,k+1,0) &= 3M(1,k,0) - 2M(1,k-1,0) \\ &= 3(M_1 + M_k i) - 2(M_1 + M_{k-1} i) \\ &= (3M_1 - 2M_1) + (3M_k - 2M_{k-1}) i \\ &= M_1 + M_{k+1} i \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(g).
(h) Através da recorrência $M(n, m+2, p) = 3M(n, m+1, p) - 2M(n, m, p)$ da Definição 2, fixando $n = 0$, $p = 1$, aplicaremos indução sobre m. Para $m = 0$, temos a seguinte expressão conforme Definição 2:

$$M(0,0,1) = j = M_0 i + M_1 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(0, l, 1) = M_l i + M_1 j$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(0, k+1, 1)$.

$$\begin{aligned} M(0,k+1,1) &= 3M(0,k,1) - 2M(0,k-1,1) \\ &= 3(M_k i + M_1 j) - 2(M_{k-1} i + M_1 j) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) i + (3M_1 - 2M_1) j \\ &= M_{k+1} i + M_1 j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(h).
(i) Através da recorrência $M(n, m+2, p) = 3M(n, m+1, p) - 2M(n, m, p)$ da Definição 2, fixando $n = 1$, $p = 1$, aplicaremos indução sobre m. Para $m = 0$, temos uma condição inicial conforme Definição 2.

$$M(1,0,1) = i + j = M_1 + M_0 i + M_1 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(1, l, 1) = M_1 + M_l i + M_1 j$. Vamos mostrar que isso implica que também é válido para $M(1, k+1, 1)$.

$$\begin{aligned} M(1,k+1,1) &= 3M(1,k,1) - 2M(1,k-1,1) \\ &= 3(M_1 + M_k i + M_1 j) - 2(M_1 + M_{k-1} i + M_1 j) \\ &= (3M_1 - 2M_1) + (3M_k - 2M_{k-1}) i + (3M_1 - 2M_1) j \\ &= M_1 + M_{k+1} i + M_1 j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(i).
(j) Através da recorrência $M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2, fixando $n = 1$, $m = 0$, aplicaremos indução sobre p. Para $p = 0$, usando-se o item (a):

$$M(1,0,0) = M_1 = M_1 + M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(1,0,l) = M_1 + M_l j$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(1,0,k+1)$.

$$\begin{aligned} M(1,0,k+1) &= 3M(1,0,k) - 2M(1,0,k-1) \\ &= 3(M_1 + M_k j) - 2(M_1 + M_{k-1} j) \\ &= (3M_1 - 2M_1) + (3M_k - 2M_{k-1}) j \\ &= M_1 + M_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(j).
(k) Através da recorrência $M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2, fixando $n = 0$, $m = 1$, aplicaremos indução sobre p. Para $p = 0$, usando-se o item (b):

$$M(0,1,0) = M_1 i = M_1 i + M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(0,1,l) = M_1 i + M_l j$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(0,1,k+1)$.

$$\begin{aligned} M(0,1,k+1) &= 3M(0,1,k) - 2M(0,1,k-1) \\ &= 3(M_1 i + M_k j) - 2(M_1 i + M_{k-1} j) \\ &= (3M_1 - 2M_1) i + (3M_k - 2M_{k-1}) j \\ &= M_1 i + M_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(k).
(l) Através da recorrência $M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2, fixando $n = 1$, $m = 1$, aplicaremos indução sobre p. Para $p = 0$, tem-se uma condição inicial conforme a Definição 2:

$$M(1,1,0) = 1 + i = M_1 + M_1 i + M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(1,1,l) = M_1 + M_1 i + M_l j$.

Vamos mostrar que continua isso implica que é válido para $M(1,1,k+1)$.

$$\begin{aligned} M(1,1,k+1) &= 3M(1,1,k) - 2M(1,1,k-1) \\ &= 3(M_1 + M_1 i + M_k j) - 2(M_1 + M_1 i + M_{k-1} j) \\ &= (3M_1 - 2M_1) + (3M_1 - 2M_1)i + (3M_k - 2M_{k-1})j \\ &= M_1 + M_1 i + M_{k+1} j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio da Indução Finita garante-nos a validade do Lema 2(l).
(m) Através da recorrência $M(n,m+2,p) = 3M(n,m+1,p) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2, começaremos fixando n, tomando $p = 0$ e aplicando indução sobre m. Para $m = 0$, usando-se o item (a):

$$M(n,0,0) = M_n = M_n + M_0 i$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(n,l,0) = M_n + M_l i$. Vamos mostrar que continua isso implica que é válido para $M(k+1,1,0)$.

$$\begin{aligned} M(n,k+1,0) &= 3M(n,k,0) - 2M(n,k-1,0) \\ &= 3(M_n + M_k i) - 2(M_n + M_{k-1} i) \\ &= (3M_n - 2M_n) - (3M_k - 2M_{k-1})i \\ &= M_n + M_{k+1} i \end{aligned}$$

Agora, fixando m, tomando $p = 0$ e usando indução sobre n, através da recorrência $M(n+1,m,p) = 3M(n,m,p) - 2M(n-1,m,p)$ da Definição 2, tem-se:
para $n = 0$, usando-se o item (b):

$$M(0,m,0) = M_m i = M_0 + M_m i$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l,m,0) = M_l + M_m i$. Vamos mostrar que continua isso implica que é válido para $M(k+1,m,0)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,m,0) &= 3M(k,m,0) - 2M(k-1,m,0) \\ &= 3(M_k + M_m i) - 2(M_{k-1} + M_m i) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_m - 2M_m)i \\ &= M_{k+1} + M_m i \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio de Indução garante-nos que é válido o Lema 2(m).

(n) Através da recorrência $M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2, começaremos fixando n, tomando $m = 0$ e aplicando indução sobre p. Para $p = 0$, pelo item (a):

$$M(n,0,0) = M_n = M_n + M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(n,0,l) = M_n + M_l j$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(n,0,k+1)$.

$$\begin{aligned} M(n,0,k+1) &= 3M(n,0,k) - 2M(n,0,k-1) \\ &= 3(M_n + M_k j) - 2(M_n + M_{k-1} j) \\ &= (3M_n - 2M_n) + (3M_k - 2M_{k-1})j \\ &= M_n + M_{k+1} j \end{aligned}$$

Agora, fixando p, tomando $m = 0$ e usando indução sobre n, através da recorrência $M(n+2,m,p) = 3M(n+1,m,p) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2. Para $n = 0$, usando-se o item (c):

$$M(0,0,p) = M_p j = M_0 + M_p j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(l,0,p) = M_l + M_p j$. Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(k+1,0,p)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,0,p) &= 3M(k,0,p) - 2M(k-1,0,p) \\ &= 3(M_k + M_p j) - 2(M_{k-1} + M_p j) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_p - 2M_p)j \\ &= M_{k+1} + M_p j \end{aligned}$$

Com isso, o Princípio de Indução garante-nos que é válido o Lema 2(n).
(o) Através da recorrência $M(n,m,p+2) = 3M(n,m,p+1) - 2M(n,m,p)$ da Definição 2, para $n = 0$, começaremos fixando m e aplicando indução sobre p. Para $p = 0$, pelo item (b):

$$M(0,m,0) = M_m i = M_m i + M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(0,m,l) = M_m i + M_l j$.

Vamos mostrar que isso implica na validade para $M(0,m,k+1)$.

$$\begin{aligned}
M(0,m,k+1) &= 3M(0,m,k)-2M(0,m,k-1)\\
&= 3(M_m i + M_k j) - 2(M_m i + M_{k-1} j)\\
&= (3M_m - 2M_m)i + (3M_k - 2M_{k-1})j\\
&= M_m i + M_{k+1} j
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. Agora, fixando p, tomando $n=0$ e usando indução sobre m, através da recorrência $M(n,m+1,p) = 3M(n,m,p) - 2M(n,m-1,p)$ da Definição 2, tem-se:
para $m=0$, usando-se o item (c):

$$M(0,0,p) = M_p j = M_0 i + M_p j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, ou seja, $M(0,l,p) = M_l i + M_p j$. Vamos mostrar que isso implica que continua válido para $M(0,k+1,p)$.

$$\begin{aligned}
M(0,k+1,p) &= 3M(0,k,p)-2M(0,k-1,p)\\
&= 3(M_k i + M_p j) - 2(M_{k-1} i + M_p j)\\
&= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_p - 2M_p)j\\
&= M_{k+1} i + M_p j
\end{aligned}$$

Com isso, o Princípio de Indução garante-nos que é válido o Lema 2(o). □

Teorema 2. *Sejam $n,m,p \in \mathbb{N}$, os números tridimensionais de Mersenne são descritos por:*

$$M(n,m,p) = M_n + M_m i + M_p j.$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova para o teorema em questão. Comecemos considerando n e m valores fixos, aplicaremos indução sobre p. Usando-se o Lema 2(m), para $p=0$:

$$M(n,m,0) = M_n + M_m i = M_n + M_m i + M_0 j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, com n e m fixados, ou seja, $M(n,m,l) = M_n + M_m i + M_l j$.

Vamos mostrar que isso implica que continua válido para $M(n,m,k+1)$.

$$\begin{aligned} M(n,m,k+1) &= 3M(n,m,k) - 2M(n,m,k-1) \\ &= 3(M_n + M_m i + M_k j) - 2(M_n + M_m i + M_{k-1} j) \\ &= (3M_n - 2M_n) + (3M_m - 2M_m)i + (3M_k - 2M_{k-1})j \\ &= M_n + M_m i + M_{k+1} j \end{aligned}$$

Agora, fixemos n e p e usemos indução sobre m. Nesse sentido, para $m = 0$, usando-se o Lema 3.2(n):

$$M(n,0,p) = M_n + M_p j = M_n + M_0 i + M_p j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, com n e p fixados, ou seja, $M(n,l,p) = M_n + M_l i + M_p j$.
Vamos mostrar que isso implica que continua válido para $M(n,k+1,p)$.

$$\begin{aligned} M(n,k+1,p) &= 3M(n,k,p) - 2M(n,k-1,p) \\ &= 3(M_n + M_k i + M_p j) - 2(M_n + M_{k-1} i + M_p j) \\ &= (3M_n - 2M_n) + (3M_k - 2M_{k-1})i + (3M_p - 2M_p)j \\ &= M_n + M_{k+1} i + M_p j \end{aligned}$$

Agora, fixemos m e p e usemos indução sobre n. Nesse sentido, para $n = 0$, usando-se o Lema 2(o):

$$M(0,m,p) = M_m i + M_p j = M_0 + M_m i + M_p j$$

Supondo que seja verdade para qualquer $0 < l \leq k$, com m e p fixados, ou seja, $M(l,m,p) = M_l + M_m i + M_p j$.
Vamos mostrar que isso implica que continua válido para $M(k+1,m,p)$.

$$\begin{aligned} M(k+1,m,p) &= 3M(k,m,p) - 2M(k-1,m,p) \\ &= 3(M_k + M_m i + M_p j) - 2(M_{k-1} + M_m i + M_p j) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_m - 2M_m)i + (3M_p - 2M_p)j \\ &= M_{k+1} + M_m i + M_p j \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. Com isso, concluímos a demonstração do teorema. □

4 As relações n-dimensionais de Mersenne

Nesta seção serão apresentados os números hipercomplexos de Mersenne. Segundo [8] esses números são apresentados na forma $G = (n, n_2, n_3, \cdots, n_t)$ possuindo n variáveis. Para apresentar os números hipercomplexos é realizado um processo evolutivo desses números; a partir da sua forma unidimensional, é apresentada sua relação recorrente bidimensional, na qual, é inserida a unidade imaginária i e na relação recorrente tridimensional, inserindo as unidades imaginárias i e j e assim sucessivamente até sua forma n-dimensional.

Definição 3. *Seja um número hipercomplexo $M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t)$ com n variáveis, para $n \geq 2$ vale, além da componente imaginária i, o seguinte conjunto de unidades imaginárias $(\mu_1 = i, \mu_2 = j, \cdots, \mu_n)$. Quanto às variáveis e sua notação, tem-se que $n = n_1$. Desse modo, são definidos os valores iniciais a seguir:*

$$\begin{aligned}
M(0,0,0,\cdots,0) &= 0\\
M(1,0,0,\cdots,0) &= 1\\
M(0,1,0,\cdots,0) &= \mu_1\\
M(0,0,1,\cdots,0) &= \mu_2\\
M(0,0,0,1,0,\cdots,0) &= \mu_3\\
\vdots &= \vdots\\
M(0,0,0,\cdots,1) &= \mu_n\\
M(1,1,1,\cdots,1) &= 1+\mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots+\mu_n\\
M(0,1,1,\cdots,1) &= \mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots+\mu_n\\
M(1,0,1,\cdots,1) &= 1+\mu_2+\mu_3+\cdots+\mu_n\\
\vdots &= \vdots\\
M(1,1,1,\cdots,1,0) &= 1+\mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots+\mu_{n-1}
\end{aligned}$$

Com isso, os números da forma $M(n, n_2, n_3, \cdots, n_t)$ devem satisfazer às seguintes condições n-dimensionais de recorrência:

$$\begin{cases}
M(n_1+1, n_2, \cdots, n_t) &= 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1-1, n_2, \cdots, n_t)\\
M(n_1, n_2+1, \cdots, n_t) &= 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2-1, \cdots, n_t)\\
\vdots &= \vdots\\
M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t+1) &= 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2, \cdots, n_t-1)
\end{cases}$$

Lema 3. *As seguinte propriedades são válidas para a sequência n-dimensional de Mer-*

senne:
(a) $M(n_1, 0, 0, \cdots, 0) = M_{n_1}$
(b) $M(0, n_2, 0, \cdots, 0) = M_{n_2}\mu_1$
(c) $M(0, 0, 0, \cdots, n_t) = M_{n_t}\mu_n$
(d) $M(n_1, 1, 0, \cdots, 0) = M_{n_1} + M_1\mu_1$
(e) $M(n_1, 0, 0, \cdots, 1) = M_{n_1} + \cdots + M_1\mu_n$
(f)$M(n_1, 1, 0, \cdots, 1) = M_{n_1} + M_1\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n$
(g) $M(1, n_2, 0, \cdots, 0) = M_1 + M_{n_2}\mu_1$
(h)$M(0, n_2, 0, \cdots, 1) = M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n$
(i) $M(1, n_2, 0, \cdots, 1) = M_1 + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n$
(j) $M(1, 0, 0, \cdots, n_t) = M_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n$
(k)$M(0, 1, 0, \cdots, n_t) = M_1\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n$
(l) $M(1, 1, 0, \cdots, n_t) = M_1 + M_1\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n$
(m)$M(n_1, n_2, 0, \cdots, 0) = M_{n_1} + M_{n_2}\mu_1$
(n) $M(n_1, 0, 0, \cdots, n_t) = M_{n_1} + \cdots + M_{n_t}\mu_n$
(o)$M(0, n_2, 0, \cdots, n_t) = M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n$

Demonstração. (a) Através da recorrência $M(n_1+1, n_2, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1-1, n_2, \cdots, n_t)$, fixando $n_2, \cdots, n_t$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_1, tem-se:
Para $n_1 = 0$

$$\begin{aligned} M(0,0,0,\cdots,0) &= M_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para $n_2, \cdots, n_t$ fixos e qualquer $k \leq n_1$, ou seja supondo que

$$M(k, 0, 0, \cdots, 0) = M_k$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(n_{k+1}, 0, 0, \cdots, 0) &= 3M(n_k, 0, 0, \cdots, 0) - 2M(n_{k-1}, 0, 0, \cdots, 0) \\ &= 3M_k - 2M_{k-1} \\ &= M_{k+1} \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (a).
(b) Através da recorrência $M(n_1, n_2+1, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2 - 1, \cdots, n_t)$, fixando n_1, n_3, $\cdots$, n_t iguais a zero e aplicando o método de indução em n_2, tem-se:

Para $n_2 = 0$

$$M(0,0,0,\cdots,0) = 0$$

Supondo que seja verdade para $n_1, \cdots, n_t$ fixos e qualquer $k \leq n_2$, ou seja supondo que

$$M(0,k,0,\cdots,0) = M_k\mu_1$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0,n_{k+1},0,\cdots,0) &= 3M(0,n_k,0,\cdots,0) - 2M(0,n_{k-1},0,\cdots,0) \\ &= 3M_k\mu_1 - 2M_{k-1}\mu_1 \\ &= M_{k+1}\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (b).
(c) Através da recorrência $M(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_t+1) = 3M(n_1,n_2,\cdots,n_t) - 2M(n_1,n_2,\cdots,n_t-1)$, fixando $n_1, n_2, \cdots$ iguais a zero e aplicando o método de indução em n_t, tem-se:
Para $n_t = 0$

$$M(0,0,0,\cdots,0) = 0$$

Supondo que seja verdade para $n_1, n_2, \cdots$ fixos e qualquer $k \leq n_t$, ou seja supondo que

$$M(0,0,0,\cdots,k) = M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0,0,0,\cdots,n_{k+1}) &= 3M(0,0,0,\cdots,n_k) - 2M(0,0,0,\cdots,n_{k-1}) \\ &= 3M_k\mu_n - 2M_{k-1}\mu_n \\ &= M_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (c).
(d) Através da recorrência $M(n_1+1,n_2,\cdots,n_t) = 3M(n_1,n_2,\cdots,n_t) - 2M(n_1-1,n_2,\cdots,n_t)$, fixando $n_2 = 1$, $n_t = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1. Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M(0,1,0,\cdots,0) &= M_0 + M_1\mu_1 \\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$M(k, 1, 0, \cdots, 0) = M_k + M_1\mu_1$$

Vamos mostrar que continua válido para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(k+1, 1, 0, \cdots, 0) &= 3M(k, 1, 0, \cdots, 0) - 2M(k-1, 1, 0, \cdots, 0) \\ &= 3(M_k + M_1\mu_1) - 2(M_{k-1} + M_1\mu_1) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_1 - 2M_1)\mu_1 \\ &= M_{k+1} + M_1\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (d).
(e) Através da recorrência $M(n_1 + 1, n_2, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1 - 1, n_2, \cdots, n_t)$, fixando $n_2 = 0$, $n_t = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1. Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M(0, 0, 0, \cdots, 1) &= M_0 + \cdots + M_1\mu_n \\ &= \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$M(k, 0, 0, \cdots, 1) = M_k + \cdots + M_1\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k + 1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(k+1, 0, 0, \cdots, 1) &= 3M(k, 0, 0, \cdots, 1) - 2M(k-1, 0, 0, \cdots, 1) \\ &= 3(M_k + \cdots + M_1\mu_n) - 2(M_{k-1} + \cdots + M_1\mu_n) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + \cdots + (3M_1 - 2M_1)\mu_n \\ &= M_{k+1} + \cdots + M_1\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (e).
(f) Através da recorrência $M(n_1 + 1, n_2, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1 - 1, n_2, \cdots, n_t)$, fixando $n_2 = 1$, $n_t = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_1.

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M(0,1,0,\cdots,1) &= M_0 + M_1\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n \\ &= \mu_1 + \cdots + \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$M(k,1,0,\cdots,1) = M_k + M_1\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(k+1,1,0,\cdots,1) &= 3M(k,1,0,\cdots,1) - 2M(k-1,1,0,\cdots,1) \\ &= 3(M_k + M_1\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n) - 2(M_{k-1} + M_1\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_1 - 2M_1)\mu_1 + \cdots + (3M_1 - 2M_1)\mu_n \\ &= M_{k+1} + M_1\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (f).
(g) Através da recorrência $M(n_1, n_2+1, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2 - 1, \cdots, n_t)$, fixando $n_1 = 1$, $n_t = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2. Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} M(1,0,0,\cdots,0) &= M_1 + M_0\mu_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$M(1,k,0,\cdots,0) = M_1 + M_k\mu_1$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(1,k+1,0,\cdots,0) &= 3M(1,k,0,\cdots,0) - 2M(1,k-1,0,\cdots,0) \\ &= 3(M_1 + M_k\mu_1) - 2(M_1 + M_{k-1}\mu_1) \\ &= (3M_1 - 2M_1) + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_1 \\ &= M_1 + M_{k+1}\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (g).

(h) Através da recorrência $M(n_1, n_2+1, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2 - 1, \cdots, n_t)$, fixando $n_1 = 0$, $n_t = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2. Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} M(0,0,0,\cdots,1) &= M_0\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n \\ &= \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$M(0,k,0,\cdots,1) = M_k\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0,k+1,0,\cdots,1) &= 3M(0,k,0,\cdots,1) - 2M(0,k-1,0,\cdots,1) \\ &= 3(M_k\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n) - 2(M_{k-1}\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1})\mu_1 + \cdots + (3M_1 - 2M_1)\mu_n \\ &= M_{k+1}\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (h).
(i) Através da recorrência $M(n_1, n_2+1, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2 - 1, \cdots, n_t)$, fixando $n_1 = 1$, $n_t = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_2. Nesse sentido, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} M(1,0,0,\cdots,1) &= M_1 + M_0\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n \\ &= 1 + \mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$M(1,k,0,\cdots,1) = M_1 + M_k\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$
\begin{aligned}
M(1, k+1, 0, \cdots, 1) &= 3M(1, k, 0, \cdots, 1) - 2M(1, k-1, 0, \cdots, 1) \\
&= 3(M_1 + M_k\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n) - \\
&\quad 2(M_1 + M_{k-1}\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n) \\
&= (3M_1 - 2M_1) + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_1 + \cdots + \\
&\quad (3M_1 - 2M_1)\mu_n \\
&= M_1 + M_{k+1}\mu_1 + \cdots + M_1\mu_n
\end{aligned}
$$

Com isso, é válido o Lema 3 (i).
(j) Através da recorrência $M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t + 1) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2, \cdots, n_t - 1)$, fixando $n_1 = 1, n_2 = 0$ e aplicando o princípio de indução sobre n_t.
Nesse sentido, para $n_t = 0$:

$$
\begin{aligned}
M(1, 0, 0, \cdots, 0) &= M_1 + \cdots + M_0\mu_n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_t$, ou seja, supondo que

$$M(1, 0, 0, \cdots, k) = M_1 + \cdots + M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k + 1$. Temos então

$$
\begin{aligned}
M(1, 0, 0, \cdots, k+1) &= 3M(1, 0, 0, \cdots, k) - 2M(1, 0, 0, \cdots, k-1) \\
&= 3(M_{k+1} + \cdots + M_k\mu_n) - 2(M_k + \cdots + M_{k-1}\mu_n) \\
&= (3M_{k+1} - 2M_k) + \cdots + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_n \\
&= M_{k+2} + \cdots + M_{k+1}\mu_n
\end{aligned}
$$

Com isso, é válido o Lema 3 (j).
(k) Através da recorrência $M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t + 1) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2, \cdots, n_t - 1)$, fixando $n_1 = 0, n_2 = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_t. Nesse sentido, para $n_t = 0$:

$$M(0, 1, 0, \cdots, 0) = M_1\mu_1 + \cdots + M_0\mu_n$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_t$, ou seja, supondo que

$$M(0,1,0,\cdots,k) = M_1\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0,1,0,\cdots,k+1) &= 3M(0,1,0,\cdots,k) - 2M(0,1,0,\cdots,k-1) \\ &= 3(M_1\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n) - 2(M_1\mu_1 + \cdots + M_{k-1}\mu_n) \\ &= (3M_1 - 2M_1)\mu_1 + \cdots + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_n \\ &= M_1\mu_1 + \cdots + M_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (k).
(l) Através da recorrência $M(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t + 1) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1, n_2, \cdots, n_t - 1)$, fixando $n_1 = 1, n_2 = 1$ e aplicando o princípio de indução sobre n_t. Nesse sentido, para $n_t = 0$:

$$\begin{aligned} M(1,1,0,\cdots,0) &= M_1 + M_1\mu_1 + \cdots + M_0\mu_n \\ &= 1 + \mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_t$, ou seja, supondo que

$$M(1,1,0,\cdots,k) = M_1 + M_1\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(1,1,0,\cdots,k+1) &= 3M(1,0,0,\cdots,k) - 2M(1,1,0,\cdots,k-1) \\ &= 3(M_1 + M_1\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n) - 2(M_1 + M_1\mu_1 + \cdots + M_{k-1}\mu_n) \\ &= (3M_1 - 2M_1) + (3M_1 - 2M_1)\mu_1 + \cdots + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_n \\ &= M_1 + M_1\mu_1 + \cdots + M_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (l).
(m) Através da recorrência $M(n_1 + 1, n_2, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1 - 1, n_2, \cdots, n_t)$, fixando n_2 e $n_t = 0$, aplicando indução em n_1. Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M(0,n_2,0,\cdots,0) &= M_0 + M_{n_2}\mu_1 \\ &= M_{n_2}\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida. Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$M(k, n_2, 0, \cdots, 0) = M_k + M_{n_2}\mu_1$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(k+1, n_2, 0, \cdots, 0) &= 3M(k, n_2, 0, \cdots, 0) - 2M(k-1, n_2, 0, \cdots, 0) \\ &= 3(M_k + M_{n_2}\mu_1) - 2(M_{k-1} + M_{n_2}\mu_1) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_{n_2} - 2M_{n_2})\mu_1 \\ &= M_{k+1} + M_{n_2}\mu_1 \end{aligned}$$

Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_2. Assim, para $n_2 = 0$:

$$\begin{aligned} M(n_1, 0, 0, \cdots, 0) &= M_{n_1} + M_0\mu_1 \\ &= M_{n_1} \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida. Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$M(n_1, k, 0, \cdots, 0) = M_{n_1} + M_k\mu_1$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(n_1, k+1, 0, \cdots, 0) &= 3M(n_1, k, 0, \cdots, 0) - 2M(n_1, k-1, 0, \cdots, 0) \\ &= 3(M_{n_1} + M_k\mu_1) - 2(M_{n_1} + M_{k-1}\mu_1) \\ &= (3M_{n-1}2M_{n_1}) + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_1 \\ &= M_{n_1} + M_{k+1}\mu_1 \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (m).

(n) Através da recorrência $M(n_1+1, n_2, \cdots, n_t) = 3M(n_1, n_2, \cdots, n_t) - 2M(n_1 - 1, n_2, \cdots, n_t)$, fixando n_t e $n_2 = 0$, aplicando indução em n_1.

Nesse sentido, para $n_1 = 0$:

$$\begin{aligned} M(0, 0, 0, \cdots, n_t) &= M_0 + \cdots + M_{n_t}\mu_n \\ &= M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida.

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$M(k, 0, 0, \cdots, n_t) = M_k + \cdots + M_{n_t}\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(k+1,0,0,\cdots,n_t) &= 3M(k,0,0,\cdots,n_t) - 2M(k-1,0,0,\cdots,n_t) \\ &= 3(M_k + \cdots + M_{n_t}\mu_n) - 2(M_{k-1} + \cdots + M_{n_t}\mu_n) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + \cdots + (3M_{n_t} - 2M_{n_t})\mu_n \\ &= M_{k+1} + \cdots + M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Agora fixando n_1 e aplicando indução em n_t. Nesse sentido, para $n_t = 0$:

$$\begin{aligned} M(n_1,0,0,\cdots,0) &= M_{n_1} + \cdots + M_0\mu_n \\ &= M_{n_1} \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida. Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_t$, ou seja, supondo que

$$M(n_1,0,0,\cdots,k) = M_{n_1} + \cdots + M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(n_1,0,0,\cdots,k+1) &= 3M(n_1,0,0,\cdots,k) - 2M(n_1,0,0,\cdots,k-1) \\ &= 3(M_{n_1} + \cdots + M_k\mu_n) - 2(M_{n_1} + \cdots + M_{k-1}\mu_n) \\ &= (3M_{n_1} - 2M_{n_1}) + \cdots + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_n \\ &= M_{n_1} + \cdots + M_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (n).
(o) Através da recorrência $M(n_1+1,n_2,\cdots,n_t) = 3M(n_1,n_2,\cdots,n_t) - 2M(n_1-1,n_2,\cdots,n_t)$, fixando n_2 e $n_1 = 0$, aplicando indução em n_t.
Nesse sentido, para $n_t = 0$:

$$M(0,n_2,0,\cdots,0) = M_{n_2}M_1\mu_1 + \cdots + M_{n_2+1}M_0\mu_n$$

Tem-se que a igualdade é válida. Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_t$, ou seja, supondo que

$$M(0,n_2,0,\cdots,k) = M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0,n_2,0,\cdots,k+1) &= 3M(0,n_2,0,\cdots,k)-2M(0,n_2,0,\cdots,k-1) \\ &= 3(M_{n_2}\mu_1+\cdots+M_k\mu_n)-2(M_{n_2}\mu_1+\cdots+M_{k-1}\mu_n) \\ &= (3M_{n_2}-2M_{n_2})\mu_1+\cdots+(3M_k-2M_{k-1})\mu_n \\ &= M_{n_2}\mu_1+\cdots+M_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Agora fixando n_t e aplicando indução em n_2. Nesse sentido, para $n_2=0$:

$$\begin{aligned} M(0,0,0,\cdots,n_t) &= M_0\mu_1+\cdots+M_{n_t}\mu_n \\ &= M_n\mu_m \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida. Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$M(0,k,0,\cdots,n_t) = M_k\mu_1+\cdots+M_{n_t}\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(0,k+1,0,\cdots,n_t) &= 3M(0,k,0,\cdots,n_t)-2M(0,k-1,0,\cdots,n_t) \\ &= 3(M_k\mu_1+\cdots+M_{n_t}\mu_n)-2(M_{k-1}\mu_1+\cdots+M_{n_t}\mu_n) \\ &= (3M_k-2M_{k-1})\mu_1+\cdots+(3M_{n_t}-2M_{n_t})\mu_n \\ &= M_{k+1}\mu_1+\cdots+M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Com isso, é válido o Lema 3 (o). □

Teorema 3. *Os números da forma $M(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_t)$, tal que n_1, n_2, $\cdots$, $n_t \in \mathbb{N}$ são determinados por:*

$$M(n_1,n_2,\cdots,n_t) = M_{n_1}+M_{n_2}\mu_1+\cdots+M_{n_t}\mu_n$$

Demonstração. Seja $n_1,n_2,\cdots,n_{n-1}$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_t. Para $n_t=0$

$$\begin{aligned} M(n_1,n_2,\cdots,0) &= M_{n_1}+M_{n_2}\mu_1+\cdots+M_0\mu_n \\ &= M_{n_1}+M_{n_2}\mu_1 \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (m).

Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_t$, ou seja, supondo que

$$M(n_1, n_2, \cdots, k) = M_{n_1} + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(n_1, n_2, \cdots, k+1) &= 3M(n_1, n_2, \cdots, k) - 2M(n_1, n_2, \cdots, k-1) \\ &= 3(M_{n_1} + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_k\mu_n) - \\ &\quad 2(M_{n_1} + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{k-1}\mu_n) \\ &= (3M_{n_1} - 2M_{n_1}) + (3M_{n_2} - 2M_{n_2})\mu_1 + \cdots + \\ &\quad (3M_k - 2M_{k-1})\mu_n \\ &= M_{n_1} + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{k+1}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar.
Agora para $n_1, \cdots, n_t$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_2.
Para $n_2 = 0$

$$\begin{aligned} M(n_1, 0, \cdots, n_t) &= M_{n_1} + M_0\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n \\ &= M_{n_1} + \cdots + M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema (n).
Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_2$, ou seja, supondo que

$$M(n_1, k, \cdots, n_t) = M_{n_1} + M_k\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(n_1, k+1, \cdots, n_t) &= 3M(n_1, k, \cdots, n_t) - 2M(n_1, k-1, \cdots, n_t) \\ &= 3(M_{n_1} + M_k\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n) - \\ &\quad 2(M_{n_1} + M_{k-1}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n) \\ &= (3M_{n_1} - 2M_{n_1}) + (3M_k - 2M_{k-1})\mu_1 + \cdots + \\ &\quad (3M_{n_t} - 2M_{n_t})\mu_n \\ &= M_{n_1} + M_{k+1}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar.
Agora para $n_2, \cdots, n_t$ valores fixos, iremos aplicar o princípio da indução sobre n_1.

Para $n_1 = 0$,

$$\begin{aligned} M(0, n_2, \cdots, n_t) &= M_0 + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n \\ &= M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Tem-se que a igualdade é válida pelo Lema 3 (o). Supondo que seja verdade para qualquer $k \leq n_1$, ou seja, supondo que

$$M(k, n_2, \cdots, n_t) = M_k + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n$$

Vamos mostrar que continua válido para $k+1$. Temos então

$$\begin{aligned} M(k+1, n_2, \cdots, n_t) &= 3M(k, n_2, \cdots, n_t) - 2M(k-1, n_2, \cdots, n_t) \\ &= 3(M_k + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n) - \\ &\quad 2(M_{k-1} + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n) \\ &= (3M_k - 2M_{k-1}) + (3M_{n_2} - 2M_{n_2})\mu_1 + \cdots + \\ &\quad (3M_{n_t} - 2M_{n_t})\mu_n \\ &= M_{k+1} + M_{n_2}\mu_1 + \cdots + M_{n_t}\mu_n \end{aligned}$$

Como queríamos provar. Com isso, o Teorema 3 é válido. □

5 Conclusão

Com origem no modelo recursivo unidimensional de Mersenne, dado pela relação $M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n, \forall n \in \mathbb{N}$, com valores iniciais definidos $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$, foram exploradas as relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais, obtendo, pelo método indutivo, a relação n-dimensional.

Com o viés de estudar a evolução matemática da sequência de Mersenne foram investigados os aspectos referentes a complexificação dessa sequência, desenvolvendo propriedades matemáticas em torno desses números. Desse modo, foram discutidas propriedades e Lemas matemáticos desse processo de complexificação da sequência de Mersenne, por meio de investigações em torno do acréscimo da unidade imaginária, realizando a inserção de unidades imaginárias e de suas correspondentes representações algébricas.

Referências

[1] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P.; MANGUEIRA, M. Discovering theorems about the Gaussian Mersenne sequence with the Maples help. **Annals. Computer Science Series**, v. XVII fasc. 1, 2019.

[2] ALVES, F. R. V.; et. al. Teaching recurrent sequences in Brazil using historical facts and graphical illustrations. **Acta Didactica Napocensia**, v. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

[3] ALVES, F. R. V. Bivariate Mersenne polynomials and matrices. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 26, n. 3, 83-95, 2020.

[4] CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. On the Mersenne sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 46, p. 37-53, 2016.

[5] HARMAN, C. J. Complex Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 1, p. 82-86, 1981.

[6] KOSHY, T.; GAO, Z. Catalan numbers with Mersenne subscripts. **Math. Scientist**, v. 38, n. 2, p. 86-91, 2013.

[7] MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. As generalizações das formas matriciais e dos quatérnios da sequência de Mersenne. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 1, n. 1, 1-17, 2021.

[8] OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais.** Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

[9] OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru,** v. 11, n. 2, p. 91-106, 2017.

[10] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019.

Submetido em 09 mai. 2023
Aceito em 15 dez. 2023