Brazilian Electronic Journal of Mathematics, v.3 - n.6, jul/dez, 2022. ISSN: 2675-1313

Os quatérnios circulares hiperbólicos e os números hibrinomiais de Perrin

Perrin's hyperbolic circular quaternions and Perrin's hybridinomial numbers

Renata Passos Machado Vieira
Universidade Federal do Ceará
re.passosm@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1966-7097

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará
fregis@gmx.fr
ORCID: 0000-0003-3710-1561

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarino23@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6917-5093

Resumo. Estudos referentes as sequências lineares e recorrentes estão sendo realizados na literatura de Matemática Pura, ampliando assim o universo de evolução de sequências. De posse do estudo dos quatérnios circulares hiperbólicos de Fibonacci, foi possível definir para esta pesquisa, os quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin. Além disso, são introduzidos os números hibrinomiais de Perrin, tendo como base os números híbridos e polinomiais de Perrin. Diante disso, são estudadas algumas propriedades algébricas dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin, resultando na obtenção da sua respectiva função geradora, fórmula de Binet e forma matricial.

Palavras-chave. Números hiperbólicos duais. Hibrinomiais. Quatérnios circulares hiperbólicos. Sequência de Perrin.

Abstract. Studies referring to linear and recurrent sequences are being carried out in the Pure Mathematics literature, thus expanding the universe of sequence evolution. With the study of Fibonacci's hyperbolic circular quaternions, it was possible to define Perrin's hyperbolic circular quaternions for this research. In addition, Perrin's hybrid numbers are introduced, based on Perrin's hybrid and polynomial numbers.. Therefore, some algebraic properties of Perrin's circular hyperbolic quaternions are studied, resulting in obtaining their respective generating function, Binet formula and matrix form.

Keywords. Dual-hyperbolic numbers. Hybrinomials. Circular-hyperbolic quaternions. Perrin sequence.

Mathematics Subject Classification (MSC): 11B37, 05A19.

1 Introdução

Os quatérnios foram desenvolvidos por William Rowan Hamilton (1805-1865), sendo portanto uma extensão dos números complexo. Assim, possuem duas estruturas quaterniônicas: quatérnio em $\mathbb{R}$, com componentes reais, e os quatérnios complexos (biquatérnios) em $\mathbb{C}$, com variáveis complexas, existindo quatro dimensões [14]. Dessa forma, tem-se que um quatérnio é definido por:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde a, b, c e d são números reais e i, j, k a parte ortogonal na base $\mathbb{R}^3$. Tem-se ainda que $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ são dois quatérnios quaisquer. As operações escalares de adição, igualdade e multiplicação entre eles são:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

$q_1 = q_2$ apenas se $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$. E para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha q_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1 i + \alpha c_1 j + \alpha d_1 k$.

O conjunto dos números duais é um espaço vetorial topológico e uma álgebra comutativa sobre os números reais. De fato, pode-se generalizar (por intermédio de aspectos algébricos) de $\mathbb{R}$ para qualquer anel comutativo $\mathbb{R}$. Os números duais, foram definidos por Clifford [9], em que um número dual é definido como $d = a + \varepsilon a$, onde ε representa a unidade dual e $a \in \mathbb{N}$. Assim, a unidade dual possui um conjunto de regras $\varepsilon^2 = 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \varepsilon^n = 0, n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$. [16]. Os números duais é uma extensão dos números reais por um segundo componente denominado de parte dual [4].

Desenvolvidos por Clifford [9, 17], os números hiperbólicos são uma extensão bidimensional dos números reais definidos de forma análoga aos números complexos, sendo conhecidos também como números hiperbólicos complexos. Esses números são descritos por $\mathbb{H} = \{z = x + hy | h \notin \mathbb{R}, h^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$. A adição e multiplicação de dois desses números hiperbólicos n_1 e n_2, são dadas por [5, 18]:

$$n_1 \pm n_2 = (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2)$$
$$n_1 \times n_2 = (x_1 + hy_1)(x_2 + hy_2) = (x_1x_2) + (y_1y_2) + h(x_1y_2 + x_2y_1)$$

A multiplicação é comutativa, associativa e distributiva em relação à adição.

Já um número circular hiperbólico é expresso por:

$$\mathbb{CH} = \left\{ w = z_1 + z_2h | z_1, z_2 \in \mathbb{C}, i^2 = -1, h^2 = 1, h \neq \pm 1, (ih)^2 = 1 \right\},$$

em que se $z_1 = x_1 + x_2i$ e $z_2 = y_1 + y_2i$ então qualquer número circular hiperbólico pode ser escrito: $w = (x_1 + x_2i) + (y_1 + y_2i)h$, com $h^2 = 1, h \neq \pm = 1, ih = -hi, (ih)^2 = 1$ [5, 6]. As operações de adição e multiplicação de dois números circulares hiperbólicos w_1 e w_2 é dada por:

$$w_1 \pm w_2 = (z_1 + z_2h) \pm (z_3 + z_4h) = (z_1 \pm z_3) + (z_2 \pm z_4)h,$$
$$w_1 \times w_2 = (z_1 + z_2h) \times (z_3 + z_4h) = (z_1z_3 + z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)h$$

Portanto, conclui-se que os números circulares hiperbólicos representam uma generalização dos números hiperbólicos complexos. Esses números não são comutativos, possuindo uma tabela de multiplicação (ver Tabela 1).

Tabela 1: Tabela de multiplicação dos números circulares hiperbólicos. Fonte: Aydin [3].

$\times$	1	i	h	ih
1	1	i	h	ih
i	i	-1	ih	$-h$
h	h	$-ih$	1	$-i$
ih	ih	h	i	1

Aydin [3] invetigou sobre esses números, realizando uma junção com a sequência de Fibonacci. Assim, foi possível definir os números hiperbólicos de Fibonacci e os quatérnios hiperbólicos de Fibonacci. Doravante, será realizado um estudo desses números em relação a sequência de Perrin.

Introduzida em 1965 por Horadam, a sequência recorrente e linear, de segunda ordem, denominada de h_n, apresenta relação de recorrência dada por: $h_n = ph_{n-1} + qh_{n-2}, n \geqslant 2$ e valores iniciais $h_0 = a$ e $h_1 = b$ [8].

Com base nisso, tem-se os números polinomiais de Horadam, inserindo a variável x. Assim, esses números são denotados por $h_n(x) = h_n(x; a; b; p; q)$ e possuem relação de recorrência dada por: $h_n(x) = pxh_{n-1}(x) + qh_{n-2}(x), n \geqslant 3$ e valores iniciais $h_0(x) = a$ e $h_1(x) = bx$ [7]. Tão logo, percebe-se a inserção do polinômio x nessa sequência, definindo os seus respectivos valores iniciais atrelados aos números estudados.

Os números híbridos, denotado por $\mathbb{K}$, foram introduzidos por Ozdemir [15] sendo um número dado pela composição dos números duais, complexos e hiperbólicos. Esses números são definidos por: $\mathbb{K} = z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}$, em que $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$.

Diante disso, tem-se uma junção dos números híbridos com os números polinomiais, resultando nos números hibrinomiais, onde são aplicados a sequência de Perrin.

Criada pelo engenheiro francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910), a sequência de Perrin é uma sequência de terceira ordem com fórmula de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$. O seu polinômio característico é dado por $x^3 - x - 1 = 0$, com solução real o número plástico, acarretando numa relação dessa sequência com o número plástico, cujo valor aproximado é 1,32 [1, 11, 19, 20, 21].

Com o viés de contribuir no processo evolutivo da sequência de Perrin, é dado o processo de complexificação com o estudo dos quatérnios duais bicomplexos. Tem-se ainda outro processo de evolução dessa sequência, enfatizada pelo seu processo de complexificação, realizando o estudo dos números hibrinomiais de Perrin, resultando em algumas propriedades e teoremas matemáticos.

2 Os quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin

Nesta seção, estudaremos os quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin, destacando as suas definições.

Definição 1. *O quatérnio de Perrin é definido, com $n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}, i^2 = j^2 = k^2 = -1$, pela equação [13]:*

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}.$$

Definição 2. *Os números duais de Perrin, DP_n, são definidos por:*

$$DP_n = P_n + \varepsilon P_{n+1},$$

onde P_n representa o número de Perrin e ε a unidade dual.

Definição 3. *Os números hiperbólicos de Perrin, HP_n, é definida por:*

$$HP_n = P_n + hP_{n+1},$$

em que $h = 1$.

Definição 4. *Os números duais hiperbólicos de Perrin são definidos como:*

$$DHP_n = P_n + jP_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} + j\varepsilon P_{n+3},$$

onde $j^2 = 1, \varepsilon j = j\varepsilon, \varepsilon^2 = (j\varepsilon)^2 = 0.$

De posse das definições acima abordadas e com base no trabalho de Aydin [3], são então definidos os quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin.

Definição 5. *Os quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin são definidos como:*

$$\begin{aligned} CHP_n &= (P_n + iP_{n+1}) + (P_{n+2} + iP_{n+3})h \\ &= P_n + iP_{n+1} + hP_{n+2} + ihP_{n+3} \end{aligned}$$

Teorema 1. *A fórmula de recorrência dos quatérnios hipebólicos circulares de Perrin são definidos como:*

$$CHP_n = CHP_{n-2} + CHP_{n-3},$$

com $n \geqslant 3$.

Demonstração. *Com base na Definição 5, tem-se a soma de dois termos quaterniônicos circulares hiperbólicos consecutivos de Perrin, com* $n \geqslant 3$, *dados por* CHP_{n-2} *e* CHP_{n-3}. *Assim:* $CHP_{n-2} = P_{n-2} + iP_{n-1} + hP_n + ihP_{n+1}$ *e* $CHP_{n-3} = P_{n-3} + iP_{n-2} + hP_{n-1} + ihP_n$. *Logo:*

$$\begin{aligned} CHP_{n-2} + CHP_{n-3} &= (P_{n-2} + iP_{n-1} + hP_n + ihP_{n+1}) \\ &+ (P_{n-3} + iP_{n-2} + hP_{n-1} + ihP_n) \\ &= (P_{n-2} + P_{n-3}) + i(P_{n-1} + P_{n-2}) + h(P_n + P_{n-1}) \\ &+ ih(P_{n+1} + P_n) \\ &= P_n + iP_{n+1} + hP_{n+2} + ihP_{n+3} \\ &= CHP_n. \end{aligned}$$

Assim, estuda-se as operações de adição, subtração e multiplicação dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin.

$$CHP_n \pm CHP_m = (P_n \pm P_m) + i(P_{n+1} \pm P_{m+1}) + h(P_{n+2} \pm P_{m+2}) + ih(P_{n+3} \pm P_{m+3}).$$

A multiplicação de dois quatérnios circulares hiperbólicos, com base na tabela de multiplicação (ver Tabela 1), é dada por:

$$\begin{aligned} CHP_n \times CHP_m &= (P_nP_m - P_{n+1}P_{m+1} + P_{n+2}P_{m+2} + P_{n+3}P_{m+3}) \\ &+ i(P_{n+1}P_m + P_nP_{m+1} - P_{n+2}P_{m+3} + P_{n+3}P_{m+2}) \\ &+ h(P_nP_{m+2} - P_{n+1}P_{m+3} - P_{n+2}P_m + P_{n+3}P_{m+1}) \\ &+ ih(P_{n+1}P_{m+2} + P_nP_{m+3} + P_{n+3}P_m - P_{n+2}P_{m+1}) \\ &\neq CHP_m.CHP_n. \end{aligned}$$

3 Alguns resultados dos números quaterniônicos circulares hiperbólicos de Perrin

A seguir, são estudadas algumas propriedades e teoremas matemáticos, ressaltando a função geradora, fórmula de Binet e forma matricial dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin.

Teorema 2. *A função geradora dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin é dada por:*

$$g(CHP_n, x) = \frac{3 + 2h + 3ih + (2i + 3h + 2ih)x + (-1 + 3i + 2ih)x^2}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, x^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(CHP_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} CHP_n x^n = CHP_0 + CHP_1 x + CHP_2 x^2 + \ldots + CHP_n x^n + \ldots \quad (1)$$

$$x^2 g(CHP_n, x) = CHP_0 x^2 + CHP_1 x^3 + CHP_2 x^4 + \ldots + CHP_{n-2} x^n + \ldots \quad (2)$$

$$x^3 g(CHP_n, x) = CHP_0 x^3 + CHP_1 x^4 + CHP_2 x^5 + \ldots + CHP_{n-3} x^n + \ldots \quad (3)$$

Baseada na Equação (1-2-3), tem-se que:

$$\begin{aligned} (1 - x^2 - x^3)g(CHP_n, x) &= CHP_0 + CHP_1 x + (CHP_2 - CHP_0)x^2 \\ &+ (CHP_3 - CHP_1 - CHP_0)x^3 \\ &+ \ldots + (CHP_n - CHP_{n-2} - CHP_{n-3})x^n + \ldots \end{aligned}$$

Com base nos valores iniciais $CHP_0 = 3 + 2h + 3ih, CHP_1 = 2i + 3h + 2ih, CHP_2 = 2 + 3i + 2h + 5ih$ e na respectiva fórmula de recorrência dado pelo Teorema 1 ($CHP_n =$

$CHP_{n-2} + CHP_{n-3})$, pode-se obter:

$$
\begin{aligned}
(1 - x^2 - x^3)g(CHP_n, x) &= CHP_0 + CHP_1 x + (CHP_2 - CHP_0)x^2 \\
g(CHP_n, x) &= \frac{CHP_0 + CHP_1 x + (CHP_2 - CHP_0)x^2}{1 - x^2 - x^3} \\
g(CHP_n, x) &= \frac{3 + 2h + 3ih + (2i + 3h + 2ih)x + (-1 + 3i + 2ih)x^2}{1 - x^2 - x^3}.
\end{aligned}
$$

Teorema 3. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a fórmula de Binet dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin é:*

$$CHP_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$, e:

$\alpha = \frac{(2+3x_2x_3)+i(3-2x_2-2x_3)+h(2-3x_2-3x_3+2x_2x_3)+ih(5-2x_2-2x_3+3x_2x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$,
$\beta = \frac{(2+3x_1x_3)+i(3-2x_1-2x_3)+h(2-3x_1-3x_3+2x_1x_3)+ih(5-2x_1-2x_3+3x_1x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$,
$\gamma = \frac{(2+3x_1x_2)+i(3-2x_1-2x_2)+h(2-3x_1-3x_2+2x_1x_2)+ih(5-2x_1-2x_2+3x_1x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$.

Demonstração. *De posse da fórmula: $P_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$, pode-se utilizar a relação de recorrência dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin e os valores iniciais:*

$$CHP_0 = 3 + 2h + 3ih, CHP_1 = 2i + 3h + 2ih, CHP_2 = 2 + 3i + 2h + 5ih,$$

desenvolve-se o sistema de equações:

$$
\begin{cases}
\alpha + \beta + \gamma & = 3 + 2h + 3ih \\
\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 & = 2i + 3h + 2ih \\
\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 & = 2 + 3i + 2h + 5ih
\end{cases}
$$

Assim, resolvendo o sistema, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(2 + 3i + 2h + 5ih) - x_2(2i + 3h + 2ih) - x_3(2i + 3h + 2ih) + x_2x_3(3 + 2h + 3ih)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3}, \\
\beta &= \frac{(2 + 3i + 2h + 5ih) - x_1(2i + 3h + 2ih) - x_3(2i + 3h + 2ih) + x_1x_3(3 + 2h + 3ih)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3}, \\
\gamma &= \frac{(2 + 3i + 2h + 5ih) - x_1(2i + 3h + 2ih) - x_2(2i + 3h + 2ih) + x_1x_2(3 + 2h + 3ih)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.
\end{aligned}
$$

Desse modo, tem-se:

$$\alpha = \frac{(2+3x_2x_3)+i(3-2x_2-2x_3)+h(2-3x_2-3x_3+2x_2x_3)+ih(5-2x_2-2x_3+3x_2x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)},$$
$$\beta = \frac{(2+3x_1x_3)+i(3-2x_1-2x_3)+h(2-3x_1-3x_3+2x_1x_3)+ih(5-2x_1-2x_3+3x_1x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)},$$
$$\gamma = \frac{(2+3x_1x_2)+i(3-2x_1-2x_2)+h(2-3x_1-3x_2+2x_1x_2)+ih(5-2x_1-2x_2+3x_1x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Teorema 4. *Para $n \geqslant 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin é dada por:*

$$\begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} CHP_{n+2} & CHP_{n+1} & CHP_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. *Por meio do princípio da indução finita, para $n = 1$, tem-se:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} CHP_1 + CHP_0 & CHP_2 & CHP_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CHP_3 & CHP_2 & CHP_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} CHP_{k+2} & CHP_{k+1} & CHP_k \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} CHP_2 & CHP_1 & CHP_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} CHP_{k+2} & CHP_{k+1} & CHP_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CHP_{k+1} + CHP_k & CHP_{k+2} & CHP_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CHP_{k+3} & CHP_{k+2} & CHP_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4 Os números hibrinomiais de Perrin

Nesta seção, são introduzidos os números hibrinomiais de Perrin, com base nos números híbridos e polinomiais dessa sequência.

Levando em consideração os números híbridos da sequência de Padovan, estudado por Mangueira et al. (2020) [12], pode-se estabelecer uma conexão com os números de Padovan, uma vez que essas sequências diferem-se apenas em relação aos seus valores iniciais.

Definição 6. *Os números híbridos de Perrin, HP_n, são definidos por:*

$$HP_n = P_n + iP_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} + hP_{n+3},$$

onde P_n representa o número de Perrin e os valores iniciais $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$.

Teorema 5. *A relação de recorrência dos híbridos de Perrin é definida:*

$$HP_n = HP_{n-2} + HP_{n-3},$$

com $n \geqslant 3$ e os valores iniciais $HP_0 = 3 + 2\varepsilon + 3h, HP_1 = 2i + 3\varepsilon + 2h, HP_2 = 2 + 3i + 2\varepsilon + 5h$.

Demonstração. *Fundamentado na Definição 6, tem-se a soma de dois termos híbridos de Perrin consecutivos, com $n \geqslant 3$, $HP_{n-2} + HP_{n-3}$. Assim $HP_{n-2} = P_{n-2} + iP_{n-1} + \varepsilon P_n + hP_{n+1}$ e $HP_{n-3} = P_{n-3} + iP_{n-2} + \varepsilon P_{n-1} + hP_n$. Logo:*

$$\begin{aligned} HP_{n-2} + HP_{n-3} &= (P_{n-2} + iP_{n-1} + \varepsilon P_n + hP_{n+1}) + (P_{n-3} + iP_{n-2} + \varepsilon P_{n-1} + hP_n) \\ &= (P_{n-2} + P_{n-3}) + i(P_{n-1} + P_{n-2}) + \varepsilon(P_n + P_{n-1}) + h(P_{n+1} + P_n) \\ &= P_n + iP_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} + hP_{n+3} \\ &= HP_n. \end{aligned}$$

Definição 7. *Os números polinomiais de Perrin são definidos como:*

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x),$$

com $n \geqslant 3$ e valores iniciais $P_0(x) = 3, P_1(x) = 0, P_2(x) = 2$.

Definição 8. *Os números hibrinomiais de Perrin são definidos como:*

$$PH_n(x) = P_n(x) + iP_{n+1}(x) + \varepsilon P_{n+2}(x) + hP_{n+3}(x),$$

onde P_n representa o número de Perrin e os valores iniciais $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$.

Teorema 6. *A relação de recorrência dos números hibrinomiais de Perrin são definidos como:*

$$PH_n(x) = xPH_{n-2}(x) + PH_{n-3}(x),$$

com $n \geqslant 3$ e valores iniciais $PH_0(x) = 3 + 2\varepsilon + 3h, PH_1(x) = 2i + 3\varepsilon + 2x, PH_2(x) = 2 + 3i + 2x\varepsilon + h(3x + 2)$.

Demonstração. *Com base nas Definições 7 e 8, tem-se a soma de dois termos hibrinomiais de Perrin consecutivos, com $n \geqslant 3$, dados por $xPH_{n-2}(x)$ e $PH_{n-3}(x)$. Assim:*

$$\begin{aligned}
xPH_{n-2}(x) + PH_{n-3}(x) &= x(P_{n-2}(x) + iP_{n-1}(x) + \varepsilon P_n(x) + hP_{n+1}(x)) \\
&+ (P_{n-3}(x) + iP_{n-2}(x) + \varepsilon P_{n-1}(x) + hP_n(x)) \\
&= (xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x)) + i(xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)) \\
&+ \varepsilon(xP_n(x) \\
&+ P_{n-1}(x)) + h(xP_{n+1}(x) + P_n(x)) \\
&= P_n(x) + iP_{n+1}(x) + \varepsilon P_{n+2}(x) + hP_{n+3}(x) \\
&= PH_n(x).
\end{aligned}$$

Com base nas definições discutidas nesta seção, são estudadas algumas propriedades matemáticas em torno dos números hibrinomiais de Perrin, contribuindo para a evolução dessa sequência.

5 Alguns teoremas dos números hibrinomiais de Perrin

Nesta seção, são estudadas alguns teoremas matemáticos, destacando a função geradora, fórmula de Binet e forma matricial dos números hibrinomiais de Perrin, tendo em vista as definições abordadas na seção anterior.

Teorema 7. *A função geradora dos números hibrinomiais de Perrin é dada por:*

$$g(PH_n, x) = \frac{3 + 2x - x^2 + i(2x + 3x^2) + (2 + 3x - 2x^2 + 2x^3)\varepsilon + (3 + 3x^3 - x^2)h}{1 - x^2 - x^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, x^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(PH_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} PH_n x^n = PH_0 + PH_1 x + PH_2 x^2 + \ldots + PH_n x^n + \ldots \quad (4)$$

$$x^2 g(PH_n, x) = PH_0 x^2 + PH_1 x^3 + PH_2 x^4 + \ldots + PH_{n-2} x^n + \ldots \quad (5)$$

$$x^3 g(PH_n, x) = PH_0 x^3 + PH_1 x^4 + PH_2 x^5 + \ldots + PH_{n-3} x^n + \ldots \quad (6)$$

Baseada na Equação (4-5-6), tem-se que:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - x^3) g(PH_n, x) = {} & PH_0 + PH_1 x + (PH_2 - PH_0) x^2 + (PH_3 - PH_1 - PH_0) x^3 + \ldots \\ & + (PH_n - PH_{n-2} - PH_{n-3}) x^n + \ldots\end{aligned}$$

Com base nos valores iniciais: $PH_0(x) = 3 + 2\varepsilon + 3h, PH_1(x) = 2i + 3\varepsilon + 2x, PH_2(x) = 2 + 3i + 2x\varepsilon + h(3x + 2)$, e em sua respectiva fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - x^3) g(PH_n, x) &= PH_0 + PH_1 x + (PH_2 - PH_0) x^2 \\ g(PH_n, x) &= \frac{3 + 2\varepsilon + 3h + (2i + 3\varepsilon + 2)x + (-1 + 3i + 2(x - 1)\varepsilon + h(3x - 1))x^2}{1 - x^2 - x^3} \\ g(PH_n, x) &= \frac{3 + 2x - x^2 + i(2x + 3x^2) + (2 + 3x - 2x^2 + 2x^3)\varepsilon + (3 + 3x^3 - x^2)h}{1 - x^2 - x^3}.\end{aligned}$$

Teorema 8. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a fórmula de Binet dos números hibrinomiais de Perrin é:*

$$PH_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n,$$

em que r_1, r_2, r_3 são as raízes da equação $r^3 - r - 1 = 0$, e:
$\alpha = \frac{r_1(r_2 r_3 + r_1 + 2x) + i(1 + 2r_1) + \varepsilon(2x + 3r_1 + 2r_2 r_3) + h(3x + 2 + 3r_2 r_3)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}$,
$\beta = \frac{r_2(r_1 r_3 + r_2 + 2x) + i(1 + 2r_2) + \varepsilon(2x + 3r_2 + 2r_1 r_3) + h(3x + 2 + 3r_1 r_3)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)}$,
$\gamma = \frac{r_3(r_1 r_2 + r_3 + 2x) + i(1 + 2r_3) + \varepsilon(2x + 3r_3 + 2r_1 r_2) + h(3x + 2 + 3r_1 r_2)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$.

Demonstração. *De posse da fórmula: $PH_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$, pode-se utilizar a relação de recorrência dos números hibrinomiais de Perrin e os valores iniciais $PH_0(x) = 3 + 2\varepsilon + 3h, PH_1(x) = 2i + 3\varepsilon + 2x, PH_2(x) = 2 + 3i + 2x\varepsilon + h(3x + 2)$, desenvolve-se o sistema de equações:*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 3 + 2\varepsilon + 3h \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 & = 2i + 3\varepsilon + 2x \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 + \gamma r_3^2 & = 2 + 3i + 2x\varepsilon + h(3x + 2) \end{cases}$$

Assim, resolvendo o sistema, obtêm-se:

$$\alpha = \frac{(2+3i+2x\varepsilon+h(3x+2))-r_2(2i+3\varepsilon+2x)-r_3(2i+3\varepsilon+2x)+r_2r_3(3+2\varepsilon+3h)}{r_1^2-r_1r_2-r_1r_3+r_2r_3},$$
$$\beta = \frac{(2+3i+2x\varepsilon+h(3x+2))-r_1(2i+3\varepsilon+2x)-r_3(2i+3\varepsilon+2x)+r_1r_3(3+2\varepsilon+3h)}{r_2^2-r_2r_3-r_1r_2+r_1r_3},$$
$$\gamma = \frac{(2+3i+2x\varepsilon+h(3x+2)))-r_1(2i+3\varepsilon+2x)-r_2(2i+3\varepsilon+2x)+r_1r_2(3+2\varepsilon+3h)}{r_3^2+r_1r_2-r_1r_3-r_2r_3}.$$

Utilizando as relações de Girard: $r_1r_2r_3 = 1, r_1+r_2+r_3 = 0$ *e* $r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 = -1$, *tem-se que:*

$$\alpha = \frac{r_1(r_2r_3+r_1+2x)+i(1+2r_1)+\varepsilon(2x+3r_1+2r_2r_3)+h(3x+2+3r_2r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)},$$
$$\beta = \frac{r_2(r_1r_3+r_2+2x)+i(1+2r_2)+\varepsilon(2x+3r_2+2r_1r_3)+h(3x+2+3r_1r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)},$$
$$\gamma = \frac{r_3(r_1r_2+r_3+2x)+i(1+2r_3)+\varepsilon(2x+3r_3+2r_1r_2)+h(3x+2+3r_1r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}.$$

Teorema 9. *Para* $n \geqslant 1$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *a forma matricial dos números hibrinomiais de Perrin é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. *Por meio do princípio da indução finita, para* $n = 1$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} PH_1+PH_0 & PH_2 & PH_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PH_3 & PH_2 & PH_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, *tem-se que:*

$$\begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} PH_{k+2} & PH_{k+1} & PH_k \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k + 1$*:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} PH_{k+2} & PH_{k+1} & PH_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PH_{k+1} + PH_k & PH_{k+2} & PH_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PH_{k+3} & PH_{k+2} & PH_{k+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

6 Conclusão

Neste presente estudo foi possível realizar a introdução dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin. Com base nisso, investigou-se a evolução matemática em torno desses números, resultando na obtenção de propriedades e teoremas matemáticos desses números apresentados primordialmente.

De fato, foram abordadas a fórmula de Binet, função geradora e forma matricial dos quatérnios circulares hiperbólicos de Perrin, permitindo contribuir para a pesquisa evolutiva da sequência.

Surgindo dos estudos em torno dos números híbridos de Perrin e polinomiais, realizou-se uma investigação e definição sobre os números hibrinomiais de Perrin. Dessa forma, foi então introduzida e definida a fórmula de recorrência, tendo como base os trabalho de Horzum [7] e Kizilates [10]. Assim, algumas propriedades matemáticas foram abordadas, enfatizando o processo de evolução matemática de complexificação referente a esses números.

Por fim, foram estudadas algumas propriedades matemáticas, destacando a fórmula de Binet, função geradora e forma matricial. Para pesquisas futuras, busca-se uma aplicação dos números hibrinomiais em outras áreas, tais como ensino e informática [2].

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

Referências

[1] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. dos S. Teaching Recurrent Sequences in Brazil using Historical facts and graphical illustrations, **Acta Didactica Napocensia**, vol. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

[2] ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons Fractal from the Recurring Linear Sequence with Google Colab: An Example of Brazil X Portugal Research, **International Electronic Journal of Mathematics Education**, vol. 15, n. 3, p. 1-19, 2020.

[3] AYDIN, F. T. Circular-hyperbolic Fibonacci quaternions. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, vol. 26, n. 2, p. 167-176, 2020.

[4] PENNESTRI, E.; STEFANELLI, R. Linear Algebra and Numerical Algorithms Using Dual Numbers. **Multibody System Dynamics**, vol. 18, n. 3, p. 323-344, 2007.

[5] CIHAN, A.; AZAK, A. Z.; GUNGOR, M. A.; TOSUN, M.V. A study of Dual Hyperbolic Fibonacci and Lucas numbers. **An. St. Univ. Ovidius Constanta**, vol. 27, n. 1, p. 35-48, 2019.

[6] DATTOLI, G.; LICCIARDI, S.; PIDATELLA, R. M.; SABIA, E. Hybrid complex numbers: The matrix version. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, vol. 28, n. 3, p. 58, 2018.

[7] HORZUM, T; KOCER, E. G. On some properties of Horadam polynomials. **International Mathematical Forum**, vol. 4, n.25, p. 1243-1252, 2009.

[8] HAUKKANEN, P. A Note On Horadam?s Sequence. **The Fibonacci Quart.**, vol. 40, n. 4, p. 358-361, 2002.

[9] JANCEWICZ, B. **The extended Grassmann algebra of R^3, in Clifford (Geometric) Algebras with Applications and Engineering**. Birkhauser, Boston, p. 389-421, 1996.

[10] KIZILATES, C. A note on Horadam hybrinomials. **2020010116 (doi: 10.20944/preprints202001.0116.v1)**, p. 1-10, 2020.

[11] KNUTH, D. E. **The Art of Computer Programming**. Addison-Wesley, Reading, MA, vol.3, 2nd edition, 417, 1998.

[12] MANGUEIRA, M. et al. The hybrid numbers of Padovan and some identities. **2020010116 (Annales Mathematicae Silesianae**, vol. 34, n. 2, p. 256-267, 2020.

[13] ORHAN, D.; HAMZA, M. On the Split (s,t)-Padovan and (s,t)-Perrin Quaternions. **International Journal of Applied Mathematics and Informatics**, vol. 13, p. 25-28, 2019.

[14] OLIVEIRA, R. R. de O. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci:Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais**. Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

[15] OZDEMIR, M.; HAMZA, M. Introduction to Hybrid Numbers. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, vol. 28, n. 11, 2018.

[16] SHOHAN, M. On grassmann's products and clifford's dual unit. **International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM**, p. 173-180, 2000.

[17] SOBCZYK, G. The Hyperbolic Number Plane. **The College Mathematics Journal**, vol. 26, n. 4, p. 268-280, 1995.

[18] SOYKAN, Y.; GOCEN, M. Properties of hyperbolic generalized Pell numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, vol. 26, n. 4, p. 136-153, 2020.

[19] SUGUMARAN, A.; RAJESH, K. Os números duais de Padovan. I**International Journal of Pure and Applied Mathematics**, vol. 114, n. 6, p. 131-137, 2017.

[20] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V; CATARINO, P. M. C. A historic alanalys is of the padovan sequence. **International Journal of Trends in Mathematics Education Research**, vol. 3, n. 1, p. 8-12, 2020.

[21] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Explorando a sequência de Padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica. **Boletim GEPEM**, vol. 74, p. 161-169, 2019.

Submetido em 02 jun. 2022
Aceito em 08 set. 2022