



Matrizes e partições de inteiros¹

Arrays and integers partitions

Igor Vallis Christ

Universidade Federal do Espírito Santo

ivcchrist@hotmail.com

ORCID: 0000-0002-0309-8360

Victor Martins

Universidade Federal do Espírito Santo

victor.n.martins@ufes.br

ORCID: 0000-0001-7154-1670

Resumo. Apresentamos, neste trabalho, um estudo sobre as novas representações matriciais de partições introduzidas em 2011, ferramenta promissora dentro da teoria das partições de inteiros. Todas as representações discutidas aqui consistem de matrizes de duas linhas, porém variam quanto as suas condições definidoras. Trazemos exemplos de representações para partições irrestritas e algumas com restrições, em particular as partições que compõem a primeira e a segunda identidades de Rogers-Ramanujan. Buscamos evidenciar algumas das principais utilidades das representações matriciais na teoria e passos seguintes que podem ser dados em trabalhos futuros sobre o tema. Finalizamos com resultados sobre representações matriciais relacionadas a Identidade de Schur.

Palavras-chave. Partições de inteiros. Representações matriciais. Identidades.

Abstract. In this work, we present a study on the new matrix representations of partitions introduced in 2011, a promising tool in the integer partitions theory. All representations discussed here consist of two-line arrays, but with distincts defining conditions. We bring examples of representations for partitions with or whitout restrictions, in particular the partitions of the first and second Rogers-Ramanujan identities. We seek to highlight some of the main uses of matrix representations in theory and the next steps that can be taken in future works on the subject. We end with results about matrix representations related to Schur's Identity.

Keywords. Integers partitions. matrix representation. Identities.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 11P81; secondary 11P84, 05A87.

¹I. V. C. desenvolveu o trabalho durante o projeto de PIIC 2020/2021 da Universidade Federal do Espírito Santo sob orientação de V.M. e agradece ao CNPq pelo suporte financeiro.

1 Introdução

Para cada inteiro positivo n , definimos $p(n)$ como sendo o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados **partes**, na qual a ordem dessas partes não importa. Cada uma dessas somas é chamada de **partição** de n . Neste trabalho não é nosso objetivo aprofundar os estudos sobre a função $p(n)$, entretanto é importante ressaltar que a busca por fórmulas para tal função foi algo que contribuiu consideravelmente para os avanços das pesquisas na teoria. Em [2] é apresentado um pouco da importância da busca por tal fórmula. No que segue, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ denota uma partição de n em que os λ_i são partes da partição e estão dispostas em ordem decrescente. Por exemplo, as partições de 5 são: (5); (4, 1); (3, 2); (3, 1, 1); (2, 2, 1); (2, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 1, 1). Daí, $p(5) = 7$. Para um primeiro contato com a teoria e mais detalhes sobre os conceitos básicos, sugerimos [6].

Por vezes estamos interessados em partições de n satisfazendo determinada condição, seriam as chamadas partições restritas ou com restrições. Desta forma, é usual na teoria, indicar por $p(n \mid *)$ o número de partições de n satisfazendo a condição $*$. Na teoria das partições, um conceito que contribuiu muito para a evolução da área, bem como trouxe a atenção de muitos matemáticos para esta, foi o conceito de identidade. Afirmações como “o número de partições de n do tipo A é igual ao número de partições de n do tipo B ” são chamadas de **identidades em partições**.

Problemas relacionados a identidades de partições ficaram muito famosos, já que por vezes não é viável o cálculo do número de partições de n para determinadas condições, ou para determinado n grande, porém, através de uma identidade, podemos encontrar famílias de partições que possuem um mesmo número de partições. Por conta disso, diversos problemas relacionados a partições emergiram na teoria e isso acontece corriqueiramente na área, conjecturam-se identidades cujas demonstrações tornam-se problemas em aberto para a teoria e então busca-se a resolução destes problemas. As identidades de Rogers-Ramanujan, por exemplo, intrigaram muitos matemáticos quando surgiram, no início do século XX, uma vez que estavam relacionadas aos números primos 5, 7 e 11 e não haviam resultados análogos para demais números primos. A primeira identidade de Rogers-Ramanujan nos diz que

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \pmod{5}) = p(n \mid \text{partes 2-distintas}),$$

enquanto que a segunda identidade de Rogers-Ramanujan nos diz que

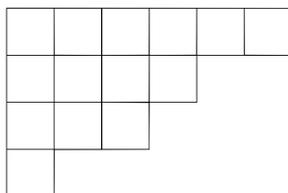
$$p(n \mid \text{partes} \equiv 2 \text{ ou } 3 \pmod{5}) = p(n \mid \text{partes 2-distintas e } > 1),$$

onde partes são 2-distintas se a diferença entre elas é de pelo menos 2.

Dentre as principais formas de demonstrações de identidades na teoria destacamos as **provas bijetivas** e as **provas através de funções geradoras**. Na primeira, buscamos uma bijeção entre dois conjuntos de partições e isso muitas vezes é feito utilizando as representações gráficas das partições; já na segunda, mostramos uma igualdade entre duas funções geradoras. Essas também, são, muito provavelmente, as duas principais ferramentas utilizadas na teoria de partições. Neste trabalho tratamos de uma nova ferramenta que vem se apresentando promissora: as novas representações matriciais de partições.

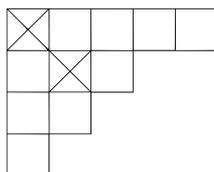
2 Preliminares

As duas representações gráficas mais usuais na teoria são o gráfico de Ferrers e o diagrama de Young. Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ de n , chamamos de **gráfico de Ferrers** de λ , o arranjo de n pontos dispostos em r linhas de forma decrescente, de modo que a linha i contenha λ_i pontos. Já o **diagrama de Young** é uma representação similar, porém usando quadrados ao invés de pontos. Abaixo temos o diagrama de Young da partição $(6, 4, 3, 1)$ de 14.



O maior quadrado possível de colocarmos “dentro” do diagrama de Young de uma partição de forma que seu canto superior esquerdo coincida com o canto superior esquerdo do diagrama de Young é chamado **quadrado de Durfee**.

Dado o diagrama de Young de uma partição, o **símbolo de Frobenius** dessa partição é uma representação matricial por meio de uma matriz de duas linhas. Com o auxílio de um exemplo, vejamos como é construído este símbolo: considere o diagrama de Young da partição $5 + 3 + 2 + 1$ de 11 abaixo, com sua “diagonal principal” destacada:



O símbolo de Frobenius dessa partição consiste em uma matriz de duas linhas com entradas inteiras não-negativas em ordem decrescente. O número s de entradas em cada

linha é dada pelo tamanho do lado do quadrado de Durfee da partição. No exemplo acima temos, $s = 2$. A j -ésima entrada da primeira linha da matriz consiste no número de quadrados da j -ésima linha do diagrama de Young a direita da diagonal principal. A j -ésima entrada da segunda linha da matriz consiste do número de quadrados da j -ésima coluna do diagrama de Young abaixo da diagonal principal. Desta forma, o símbolo de Frobenius para a partição $5 + 3 + 2 + 1$ é

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Novas representações matriciais

Novas representações matriciais de partições foram introduzidas em [5]. As representações matriciais que apresentaremos a seguir serão denominadas por matrizes dos tipos I, II e III. Concluiremos que existe o mesmo número de matrizes de cada um destes tipos. Os teoremas 1, 2 e 3 foram extraídos de [5] e, essencialmente, as 3 novas maneiras de representar uma partição via matrizes de duas linhas são detalhadas nas demonstrações destes teoremas e/ou nos exemplos subsequentes a cada resultado que apresentaremos.

Dado n um inteiro positivo, considere P_n o conjunto das matrizes de duas linhas da forma

$$P_n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^s (c_i + d_i) = n; s, c_i, d_i \in \mathbb{Z}_+, \forall 1 \leq i \leq s \right\}$$

Definimos a seguir três tipos de matrizes de P_n :

- **I:** matrizes de P_n tais que $c_s = 0, c_t = c_{t+1} + d_{t+1}, \forall 1 \leq t \leq s - 1$.
- **II:** matrizes de P_n tais que $c_s > 0, c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \forall 1 \leq t \leq s - 1$.
- **III:** matrizes de P_n tais que $d_t > 0, c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}, \forall 1 \leq t \leq s - 1$.

Teorema 1. *Dado n um inteiro positivo, o número de partições de n é igual ao número de matrizes do tipo I.*

Demonstração.

Dada uma partição de n em s partes, digamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$, vamos associar essa partição a uma matriz do tipo I. Para isto, basta dividirmos cada parte λ_i em duas partes, de modo a formar a coluna i da matriz, isto é, $\lambda_i = c_i + d_i$.

Como devemos ter $c_s = 0$, então $d_s = \lambda_s$. Assim, $c_{s-1} = c_s + d_s = \lambda_s$. Então, $\lambda_{s-1} = c_{s-1} + d_{s-1}$, ou seja, $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - \lambda_s$.

Continuando o processo temos $c_{s-2} = c_{s-1} + d_{s-1} = \lambda_{s-1}$ e $d_{s-2} = \lambda_{s-2} - \lambda_{s-1}$ e assim por diante, até obtermos $c_1 = \lambda_2$ e $d_1 = \lambda_1 - \lambda_2$.

Inversamente, dada uma matriz do tipo I, basta que somemos as entradas de cada coluna a fim de obtermos novamente a partição inicial.

Exemplo 1. A representação matricial do tipo I da partição $7 + 4 + 3 + 1$ de 15 é dada por

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observando a segunda linha da matriz acima, podemos notar que esta nos fornece uma completa descrição da partição conjugada da partição em questão, isto é, obtemos a descrição da partição obtida ao trocarmos as linhas pelas colunas do gráfico de Ferrers da partição inicial. Note que a segunda linha $(3 \ 1 \ 2 \ 1)$ descreve a partição conjugada $4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$ de $7 + 4 + 3 + 1$, pois nos diz o número de $1s$, $2s$, $3s$ e $4s$ da partição conjugada. Inversamente, a segunda linha $(1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ da representação matricial de $4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$ descreve a partição $7 + 4 + 3 + 1$, pois nos diz que há uma parte 1, nenhuma parte 2, uma parte 3, uma parte 4, nenhuma parte 5, nenhuma parte 6 e uma parte 7 na partição. Abaixo formalizamos esta conjectura que é válida para todas as representações matriciais do tipo I.

Corolário 1. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ uma partição de n e

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

a matriz do tipo I associada a partição λ obtida na demonstração do Teorema 1. Então

$$\bar{\lambda} = (\underbrace{s, \dots, s}_{d_s \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{3, \dots, 3}_{d_3 \text{ vezes}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{d_2 \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{d_1 \text{ vezes}})$$

é a partição conjugada de λ .

Demonstração. A partição conjugada $\bar{\lambda}$ de λ terá como colunas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Assim, o número de linhas do gráfico de Ferrers com apenas um ponto será a diferença entre λ_1 e λ_2 . O número de linhas com exatos dois pontos será a diferença entre λ_2 e λ_3 e assim sucessivamente, até que o número de linhas de $\bar{\lambda}$ com exatamente s pontos será λ_s . Pela demonstração do Teorema 1, temos $d_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \forall 1 \leq i \leq s-1$ e $d_s = \lambda_s$, o que encerra a demonstração.

Assim como o teorema anterior, os próximos dois teoremas se referem a representações matriciais de partições irrestritas, ou seja, aquelas que não exigem restrições sobre suas partes. Omitiremos as demonstrações dos outros dois teoremas de representação.

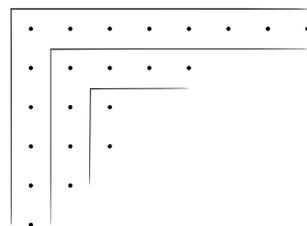
Mais detalhes e as provas destes e outros resultados podem ser encontrados em [5]. Ilustraremos a maneira de representar uma partição de acordo com os resultados através de exemplos.

Teorema 2 (Corolário 4.5, [5]). *Dado n um inteiro positivo, o número de partições de n é igual ao número de matrizes do tipo II.*

Abaixo temos a partição $(8, 5, 3, 3, 2, 1)$ de 22 e sua representação matricial do tipo II:

$$(8, 5, 3, 3, 2, 1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com auxílio do gráfico de Ferrers abaixo, no qual marcamos três arcos, torna-se fácil entender a forma com a qual cria-se a representação acima.



Note que o comprimento dos arcos do gráfico acima representam a soma de cada coluna da matriz, ou seja, 13, 7 e 2. Além disso, cada entrada d_i da segunda linha da matriz representa o número de vezes que i aparece como parte da partição em questão, desconsiderando as partes que aparecem no quadrado de Durfee de sua representação gráfica.

Proposição 1. *Para cada inteiro positivo n , existe o mesmo número de matrizes dos tipos I, II e III.*

Demonstração. Observe que, dos teoremas 1 e 2, temos que existe o mesmo número de matrizes dos tipos I e II. Resta mostrarmos que este número de matrizes coincide com o número de matrizes do tipo III existentes. Para provar isso é suficiente criar uma bijeção entre os conjuntos das matrizes do tipo II e matrizes do tipo III.

Seja $B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$ uma matriz genérica do tipo II. Façamos nela a seguinte operação: em cada coluna i de B , subtrairemos 1 da entrada c_i e adicionaremos 1 em sua entrada d_i , ou seja, cada coluna da matriz resultante será da forma: $\begin{pmatrix} c'_i \\ d'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i - 1 \\ d_i + 1 \end{pmatrix}$ em que c_i, d_i são as entradas da i -ésima coluna da matriz B .

Feita a operação descrita acima é fácil ver que a matriz resultante é do tipo III, uma vez que $d'_i > 0$ para todo i e além disso,

$$c'_t = c_t - 1 \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1} - 1 = 1 + c_{t+1} + d_{t+1} = 1 + c'_{t+1} + 1 + d'_{t+1} - 1 = 1 + c'_{t+1} + d'_{t+1},$$

para todo $1 \leq t \leq s - 1$. De maneira análoga a operação feita acima, podemos retornar a matriz B , basta-nos tomar $c_i = c'_i + 1$ e $d_i = d'_i - 1$.

Os teoremas apresentados, diferente da Proposição 1, têm por objetivo principal dar novas representações para partições. A proposição trata apenas da quantidade de matrizes e conseqüentemente da quantidade de partições, isto é, da função $p(n)$. Além disso, vale salientar que apesar da Proposição 1 não aparecer em [5], ela é consequência direta dos resultados lá apresentados, em especial dos aqui reproduzidos teoremas 1, 2 e 3. Este último será apresentado logo a seguir e apesar de ser colocado logo após a Proposição 1, sua demonstração independe dessa proposição.

Teorema 3 (Teorema 4.3, [5]). *O número de partições de n é igual ao número de matrizes do tipo III.*

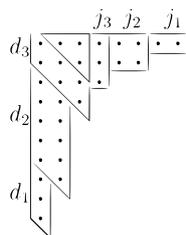
Apresentamos os passos iniciais da prova seguido de exemplos que ilustram uma bijeção entre o conjunto das partições de n e o conjunto das matrizes da forma do tipo III. Para isso reescrevamos a condição $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ da seguinte forma:

$$c_t = 1 + j_t + c_{t+1} + d_{t+1}, \forall t < s; \quad c_s = j_s; \quad j_t \geq 0. \quad (1)$$

Queremos definir uma bijeção entre o conjunto das partições de n com quadrado de Durfee de lado s e o conjunto das matrizes do tipo III satisfazendo (1), com s colunas. Como exemplo, se $s = 3$, então

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + j_1 + j_2 + j_3 + d_2 + d_3 & 1 + j_2 + j_3 + d_3 & j_3 \\ & d_1 & d_2 \\ & & d_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Compare (2) com a figura a seguir:



Observe que separamos o gráfico acima em diferentes conjuntos. Note que d_i é o número de diagonais que estão abaixo ou é a diagonal do quadrado de Durfee e que são paralelas a esta contendo i pontos, enquanto que j_i pode ser visto como a quantidade de pontos que falta para completar cada arco a partir de d_i ou então como o número de vezes que i aparece como parte na partição que se encontra à direita do quadrado de Durfee da partição em questão, porém rotacionada. Vale lembrar que os j_t 's podem ser nulos, porém $d_t > 0$ para qualquer t . Na figura acima, mostramos o exemplo da partição $\lambda = 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$ para a qual $d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = 2, j_1 = 2, j_2 = 2$ e $j_3 = 1$. A matriz associada a esta partição é, portanto,

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2. A seguir apresentamos todas as partições de 4 e suas respectivas representações matriciais para cada uma das construções obtidas nos resultados enunciados acima.

Tabela 1: Partições de 4 e as respectivas representações matriciais.

Partição	Símbolo de Frobenius	Matriz do tipo I	Matriz do tipo II	Matriz do tipo III
4	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3 + 1	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2 + 2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
1 + 1 + 1 + 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

4 Identidades em partições via matrizes de duas linhas

4.1 Identidades de Rogers-Ramanujan

Santos, Mondek e Ribeiro, [5], dão uma caracterização matricial das partições que aparecem nas identidades de Rogers-Ramanujan.

Teorema 4. *O número de partições de n com partes 2-distintas é igual ao número de matrizes do tipo II, tais que $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$.*

Para representarmos matricialmente as partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual a dois seguindo as restrições do teorema acima, basta que de início tomemos $c_s = 1$. É válido ressaltar que o número de partes que a partição possui repercute na quantidade de colunas que a matriz possuirá. Além disso, a soma dos componentes da coluna t deve resultar no valor da parte λ_t de n . Desta forma, d_s receberá o valor da subtração entre λ_s e c_s . Em seguida $c_{s-1} = 2 + c_s + d_s$ e $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - c_{s-1}$. Este processo se mantém de maneira análoga até que completemos todos os componentes da matriz. Abaixo ilustramos este processo através da apresentação das matrizes das partições $8 + 2$ e $8 + 6 + 4$ respectivamente:

- A representação matricial dada para a partição $8 + 2$ de 10 conforme restrições dadas no teorema acima é dada por $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
- A representação matricial dada para a partição $8 + 6 + 4$ de 18 conforme restrições do teorema acima é dada por $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Teorema 5. *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \quad (3)$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0, \quad \text{se } s \geq 2 \quad \text{e} \quad c_s = 0 \quad \text{se } s = 1;$$

$$c_{2i-1} = 5d_{2i+1} + 5d_{2i+3} + \cdots;$$

$$c_{2i} = 5\frac{d_{2i+2}}{4} + 5\frac{d_{2i+4}}{4} + \cdots;$$

$$4 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é par.}$$

Demonstração. Seja R_t o t -ésimo número do conjunto $\{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, \dots\}$ dos números naturais congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

Note que, R_t é um número congruente a 1 mod 5 se $t = 2i - 1$ e congruente a 4 mod 5 se $t = 2i \quad \forall i, t \geq 1$, ou seja

$$R_{2i-1} = 5(i-1) + 1 \quad \text{e} \quad R_{2i} = 5(i-1) + 4.$$

Dada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, suponhamos que R_s seja sua maior parte e que s seja um número par (o caso para s ímpar é análogo), daí

$$\begin{aligned} n &= j_1 R_1 + j_2 R_2 + \cdots + j_s R_s, \quad \text{com} \quad j_t \geq 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq s \\ &= j_1(5 \cdot 0 + 1) + j_2(5 \cdot 0 + 4) + \cdots + j_s \left[5 \left(\frac{s-2}{2} \right) + 4 \right] \\ &= 5 \left[0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + 2 \cdot j_5 + \cdots + \left(\frac{s-2}{2} \right) j_{s-1} \right] + (j_1 + j_3 + j_5 + \cdots + j_{s-1}) \\ &\quad + 5 \left[0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + 2 \cdot j_6 + \cdots + \left(\frac{s-2}{2} \right) j_s \right] + 4(j_2 + j_4 + j_6 + \cdots + j_s). \end{aligned}$$

Então, podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (3), satisfazendo as condições do teorema.

Reciprocamente, a partir da entrada d_t , com $1 \leq t \leq s$, de qualquer matriz do tipo (3) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = d_t$ se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{4}$ se t é par. Então, $n = j_1 R_1 + j_2 R_2 + \cdots + j_s R_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

Vamos escrever a matriz associada a partição $9 + 1$ de 10 pelo Teorema 5.

Como a maior parte da partição $9 + 1$ é $9 = R_4$, sabemos que a matriz deverá ter 4 colunas.

Note que

$$10 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 9.$$

Daí,

$$\begin{aligned} d_1 = j_1 = 1; \quad d_2 = 4j_2 = 4 \cdot 0 = 0; \quad d_3 = j_3 = 0; \quad d_4 = 4 \cdot j_4 = 4 \cdot 1 = 4; \\ c_1 = 5 \cdot d_3 = 0; \quad c_2 = 5 \frac{d_4}{4} = 5; \quad c_3 = 5 \cdot d_5 = 0; \quad c_4 = 5 \frac{d_6}{4} = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$9 + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A seguir apresentamos as representações das partições que são tratadas na segunda identidade de Rogers-Ramanujan.

Teorema 6. *O número de partições de n em que a diferença entre as partes é maior do que ou igual a dois e cada parte é maior do que ou igual a dois é igual ao número de matrizes do tipo II, tais que $c_s = 2$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$.*

Para representarmos matricialmente as partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual a dois e cada parte é maior ou igual a dois seguindo as restrições do teorema acima, basta que de início tomemos $c_s = 2$. É válido ressaltar que o número de partes que a partição possui repercute na quantidade de colunas que a matriz possuirá. Além disso, a soma dos componentes da coluna t deve resultar no valor da parte λ_t de n . Desta forma, d_s receberá o valor da subtração entre λ_s e c_s . Em seguida, $c_{s-1} = 2 + c_s + d_s$ e $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - c_{s-1}$. Este processo se mantém de maneira análoga até que completemos todos os componentes da matriz. Abaixo ilustramos este processo através da apresentação das matrizes das partições $11 + 7 + 3$ e $13 + 8 + 5$ respectivamente:

- A representação matricial da partição $11 + 7 + 3$ de 21 dadas as restrições do teorema acima é dada por:
$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
- A representação matricial da partição $13 + 8 + 5$ de 26 dadas as restrições do teorema acima é dada por:
$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 7. *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \quad (4)$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0;$$

$$c_{2i-1} = 5 \frac{d_{2i+1}}{2} + 5 \frac{d_{2i+3}}{2} + \cdots ;$$

$$c_{2i} = 5 \frac{d_{2i+2}}{3} + 5 \frac{d_{2i+4}}{3} + \cdots ;$$

$$2 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é ímpar.}$$

$$3 \mid d_t, \text{ se } t \text{ é par.}$$

Demonstração. Seja L_t o t -ésimo inteiro positivo congruente a $\pm 2 \pmod{5}$. Assim, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, temos que:

- Se $t = 2_i - 1$ então $L_t = L_{2_i-1} = 5(i - 1) + 2$.
- Se $t = 2_i$ então $L_t = L_{2_i} = 5(i - 1) + 3$.

Tomada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$, suponhamos que L_s seja a maior parte e que s seja ímpar. Atentamos ao leitor que o caso em que s é par é análogo e pode ser encontrado em [8].

$$n = j_1 L_1 + \cdots + j_s L_s \text{ com } j_t \geq 0, \forall t \in [1, s].$$

$$\begin{aligned} &= j_1(5 \cdot 0 + 2) + j_2(5 \cdot 0 + 3) + j_3(5 \cdot 1 + 2) + j_4(5 \cdot 1 + 3) + \cdots + j_s \left[5 \left(\frac{s-1}{2} \right) + 2 \right] \\ &= 5 \left[0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + \cdots + \left(\frac{s-1}{2} \right) j_s \right] + 2(j_1 + j_3 + \cdots + j_s) \\ &\quad + 5 \left[0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + \cdots + \left(\frac{s-3}{2} \right) j_{s-1} \right] + 2(j_2 + j_4 + \cdots + j_{s-1}) \end{aligned}$$

É fácil ver que podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (4) satisfazendo todas as condições do teorema.

Reciprocamente, a partir da entrada d_t em que $t \in [1, s]$ de qualquer matriz do tipo (4) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = \frac{d_t}{2}$, se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{3}$, se t é par. Então, $n = j_1 L_1 + \cdots + j_s L_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$.

Vamos escrever a matriz associada a partição (17, 12, 12, 7, 3, 3, 3, 2, 2) pelo Teorema 7. Primeiro note que: $61 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 0 \cdot 13 + 1 \cdot 17$. Observe que a maior parte da partição em questão é $17 = L_7$ e portanto a matriz que estamos criando deverá possuir sete colunas.

Como $d_t = 2j_t$ se t é ímpar e $d_t = 3j_t$ se t é par, então temos que:

$$d_1 = 2 \cdot 2 = 4; d_2 = 3 \cdot 3 = 9; d_3 = 2 \cdot 1 = 2; d_4 = 3 \cdot 0 = 0;$$

$$d_5 = 2 \cdot 2 = 4; d_6 = 3 \cdot 0 = 0; d_7 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Como $c_{2i-1} = 5 \frac{d_{2i+1}}{2} + 5 \frac{d_{2i+3}}{2} + \dots$ e $c_{2i} = 5 \frac{d_{2i+2}}{3} + 5 \frac{d_{2i+4}}{3} + \dots$ temos que:

$$c_1 = 5 \cdot \frac{2}{2} + 5 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{2}{2} = 20; c_2 = 5 \cdot \frac{0}{3} + 5 \cdot \frac{0}{3} = 0; c_3 = 5 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{2}{2} = 15;$$

$$c_4 = 5 \cdot \frac{0}{3} = 0; c_5 = 5 \cdot \frac{2}{2} = 5; c_6 = 5 \cdot \frac{0}{3} = 0; c_7 = 5 \cdot \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto a matriz que queremos escrever é

$$\begin{pmatrix} 20 & 0 & 15 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Em [8], Wagner apresenta alguns resultados obtidos analisando as representações matriciais das partições envolvidas nas identidades de Rogers-Ramanujan. Algumas identidades são obtidas através da análise dessas novas representações.

4.2 Representações matriciais e provas bijetivas

Finalizaremos, apresentando a seguir mais algumas representações matriciais de partições com restrições e além disso, mostraremos que esse novo tipo de representação não se trata apenas de uma maneira diferente de apresentar partições, mas também de uma nova ferramenta para provar resultados dentro da teoria. Iremos utilizar essas representações para mostrar algumas identidades (Teorema 9 e Teorema 10). Para mais resultados, envolvendo identidades em partições e demonstrações envolvendo a representação matricial de partições, sugerimos [1, 7].

Teorema 8 (Resultado 4.1, [7]). *O número de partições de n em partes congruentes a 2 mod 4 é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_s \end{pmatrix} \quad (5)$$

em que $c_s = 2$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$, $d_t \equiv 0 \pmod{2}$ e $\sum_i^s (c_i + d_i) = n$.

Para ilustrar a ideia da prova do teorema acima, apresentamos em detalhes o exemplo abaixo, onde dada uma partição com partes congruentes a 2 mod 4, encontramos a matriz de duas linhas associada a essa partição na forma (5).

Exemplo 3. *Considere a partição (14, 6, 6, 2) de 28. Do fato que todas as partes desta partição são congruentes a 2 mod 4, podemos afirmar que cada uma destas é um múltiplo*

de 2 por um número ímpar. Desta forma, podemos dividir cada uma destas partes a fim de termos uma partição de 14 em partes ímpares: (7, 3, 3, 1).

A fim de termos uma partição em partes distintas somamos as partes que se repetem e assim temos então a partição (7, 6, 1). Para concluirmos nossa construção, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 1 (Corolário 5.2, [5]). *Existe uma bijeção entre o conjunto de partições de n em partes distintas e o conjunto de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_i^s (c_i + d_i) = n$.

Utilizando o lema acima, podemos associar à partição (7, 6, 1) uma matriz de duas linhas. De maneira análoga a forma com a qual confeccionamos as representações matriciais do tipo 1, temos a representação $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ para a partição (7, 6, 1) dada.

Multiplicando cada uma das entradas desta matriz por 2 teremos uma matriz da forma (5), ou seja, a representação matricial de (14, 6, 6, 2) na forma (5) é

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil observar que o processo inverso nos retorna uma partição em partes congruentes a 2 mod 4.

A representação matricial dada no Teorema 8 pode ser utilizada para mostrar a identidade dada pelo teorema a seguir:

Teorema 9 (Teorema 4.1, [7]). *O número de partições de n em partes congruentes a 2 mod 4 é igual ao número de partições $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de n , satisfazendo as seguintes restrições:*

- (i) a maior parte λ_1 é par;
- (ii) as partes ímpares são menores ou iguais a $\frac{\lambda_1}{2}$;
- (iii) cada parte ímpar aparece um número par de vezes;
- (iv) se a parte $2k$, $k > 1$, aparece como parte então a parte $2(k - 1)$ também aparece;

(v) partes pares maiores que $\frac{\lambda_1}{2}$ aparecem apenas uma vez.

Exemplo 4. Neste exemplo ilustraremos a identidade do teorema anterior evidenciando uma bijeção entre as partições de n em partes congruentes a 2 mod 4 e àquelas dadas pelas condições (i) a (v). Para isso, faremos uso da representação matricial das partições com partes congruentes a 2 mod 4.

Tomemos como exemplo a partição $(14, 6, 6, 2)$ de 28. Sabemos, do Exemplo 3, que a representação matricial de $(14, 6, 6, 2)$ é $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Trabalharemos com esta representação matricial, a fim de achar sua partição correspondente a identidade do Teorema 9.

Note que toda matriz de duas linhas satisfazendo as condições (8) pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + d_2 + \cdots + d_s & (2s - 2) + d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 2 \\ & d_1 & & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2s & 2s - 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 0 \\ & d_1 & & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Por conta disso, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomemos a primeira matriz de (6) como a matriz associada a partição $2s + (2s - 2) + \cdots + 4 + 2$ e a segunda como a matriz associada a partição α que possui d_t partes t para todo $1 \leq t \leq s$. Sendo assim,

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (6, 4, 2) \text{ e } \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2).$$

Para obtermos uma partição de n que satisfaça as cinco condições do Teorema 9 basta juntamos as duas partições que são representadas pelas duas matrizes de (6). Para nosso exemplo numérico temos então a partição $(6, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. De maneira inversa retornamos a partição inicial.

Vejamos outro resultado envolvendo partições com partes 2-distintas. Sabemos pela primeira identidade de Rogers-Ramanujan que o número de partições de n com partes

2-distintas é igual ao número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, logo, temos aqui uma nova identidade envolvendo partições de n com esta restrição.

Teorema 10 (Teorema 4.2, [7]). *O número de partições de um inteiro positivo n em partes 2-distintas é igual ao número de partições de n satisfazendo as condições:*

- (i) *se a parte $2j + 1$, $j > 1$, aparece como parte então a parte $2(j - 1) + 1$ também aparece;*
- (ii) *cada parte par é menor do que ou igual ao número de partes ímpares diferentes;*
- (iii) *a maior parte é ímpar, $2k - 1$, e cada parte ímpar maior do que k aparece apenas uma vez.*

Demonstração. Pelo Teorema 4, podemos representar cada partição de um inteiro positivo n em partes 2-distintas como uma matriz de duas linhas da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n . Ou seja, cada uma destas matrizes pode ser vista da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2s - 1 + d_2 + \cdots + d_s & (2s - 1) - 1 + d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 3 + d_s & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2s - 1 & 2(s - 1) - 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 + \cdots + d_s & d_3 + \cdots + d_s & \cdots & 0 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Associamos a primeira matriz à direita da igualdade com a partição $\lambda = (2s - 1), (2(s - 1) - 1), \dots, 1$, enquanto que a segunda matriz da direita relacionamos com a partição μ que possui d_1 partes 1, d_2 partes 2, \dots , d_s partes s . Considerando a partição $\alpha = \lambda \cup \mu$, vemos que α satisfaz (i), que cada parte par é menor do que ou igual ao número de partes ímpares diferentes e cada parte ímpar maior do que s aparece apenas uma vez, em que $2s - 1$ é a sua maior parte. O processo inverso referente ao que foi dito acima nos leva de uma partição satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do teorema para uma matriz na forma dada no Teorema 4.

O exemplo numérico abaixo nos ajuda a compreender o processo inverso da bijeção construída na demonstração acima.

Exemplo 5. Considere a partição $\alpha = (13, 11, 9, 7, 6, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$ que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 10. Faça $\alpha = \lambda \cup \mu$, sendo $\lambda = (13, 11, 9, 7, 5, 3, 1)$ e $\mu = (6, 5, 2, 2, 1)$. Como a maior parte de λ é $13 = 2 \times 7 - 1$, sabemos que a matriz de duas linhas terá sete linhas. Já a segunda matriz na forma dada na demonstração do teorema será construída adotando $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 0, d_4 = 0, d_5 = 1, d_6 = 1, d_7 = 0$. Sendo assim, a representação matricial de α , dada pelo Teorema 4 será

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 11 & 9 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E pela demonstração do Teorema 4 podemos a partir dessa matriz, obter uma partição de n em partes 2-distintas.

4.2.1 Identidade de Schur

Utilizando como referência o estudo e resultados obtidos sobre as identidades de Rogers-Ramanujan, naturalmente procura-se fazer pesquisas análogas para outras identidades conhecidas na teoria. Por exemplo, em [3] foi apresentado um processo intuitivo de redescoberta da identidade de Schur, baseado no que foi feito em [6] para as identidades de Rogers-Ramanujan. Assim, naturalmente, ao estudarmos as representações matriciais das identidades de Rogers-Ramanujan, várias questões foram surgindo a respeito de outras identidades, em particular a de Schur. Apresentamos alguns resultados sobre representação matricial que nos remetem a essa identidade, e, de certa forma, ter uma perspectiva de continuidade. Começamos lembrando a identidade de Schur:

Teorema 11 (Identidade de Schur). *O número de partições de um inteiro positivo n com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{6}$ é igual ao número de partições de n em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3.*

Pelo já apresentado, dois caminhos naturais se apresentam:

- obter as representações matriciais das partições envolvidas na identidade de Schur;
- obter a representação matricial de um dos tipos de partições da identidade e utilizá-la para buscar uma nova prova bijetiva para o resultado.

Seguindo as ideias de generalizações de resultados sobre as representações matriciais propostos por Wagner na Seção 2.3 de [8], apresentaremos a seguir a representação matricial das partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{6}$.

Teorema 12. *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{6}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix} \quad (7)$$

em que suas entradas inteiras não-negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0;$$

$$c_{2i-1} = 6d_{2i+1} + 6d_{2i+3} + \cdots ;$$

$$c_{2i} = 6\frac{d_{2i+2}}{5} + 6\frac{d_{2i+4}}{5} + \cdots ;$$

$$5 \mid d_t, \quad \text{se } t \text{ é par.}$$

Demonstração. Seja V_i o i -ésimo número do conjunto $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, \dots\}$ dos números naturais congruentes a $\pm 1 \pmod{6}$. Note que, V_t é um número congruente a 1 $\pmod{6}$ se $t = 2i - 1$ e congruente a $-1 \pmod{6}$ (ou $5 \pmod{6}$) se $t = 2i \quad \forall i, t \geq 1$, ou seja

$$V_{2i-1} = 6(i-1) + 1 \quad \text{e} \quad V_{2i} = 6(i-1) + 5.$$

Dada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{6}$, suponhamos que V_s seja sua maior parte e que s seja um número par (o caso para s ímpar é análogo), daí

$$\begin{aligned} n &= j_1 V_1 + j_2 V_2 + \cdots + j_s V_s, \quad \text{com } j_t \geq 0, \quad \text{para } 1 \leq t \leq s \\ &= j_1(6 \cdot 0 + 1) + j_2(6 \cdot 0 + 5) + \cdots + j_s \left[6 \left(\frac{s-2}{2} \right) + 5 \right] \\ &= 6 \left[0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + 2 \cdot j_5 + \cdots + \left(\frac{s-1}{2} \right) j_{s-1} \right] + (j_1 + j_3 + j_5 + \cdots + j_{s-1}) \\ &\quad + 6 \left[0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + 2 \cdot j_6 + \cdots + \left(\frac{s-2}{2} \right) j_s \right] + 5(j_2 + j_4 + j_6 + \cdots + j_s). \end{aligned}$$

Então, podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (7), satisfazendo as condições dadas.

Reciprocamente, a partir da entrada d_t , com $1 \leq t \leq s$, de qualquer matriz do tipo (7) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = d_t$ se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{4}$ se t é par.

Então, $n = j_1V_1 + j_2V_2 + \cdots + j_sV_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{6}$.

Por fim, ainda que não seja a representação matricial do outro tipo de partição envolvida na identidade de Schur, acreditamos que o resultado abaixo, motivado pelo Teorema 4, possa ser um ponto de partida para atingir tal objetivo.

Teorema 13. *O número de partições de n com partes 3-distintas é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

em que $c_s = 1$, $c_t = 3 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e a soma de todas as entradas é igual a n .

Demonstração. Para representarmos matricialmente as partições de n em que a diferença entre as partes é maior ou igual a três seguindo as restrições do teorema acima, basta que de início tomemos $c_s = 1$. É válido ressaltar que o número de partes que a partição possui repercute na quantidade de colunas que a matriz possuirá. Além disso, a soma dos componentes da coluna t deve resultar no valor da parte λ_t de n . Desta forma, d_s receberá o valor da subtração entre λ_s e c_s . Em seguida $c_{s-1} = 3 + c_s + d_s$ e $d_{s-1} = \lambda_{s-1} - c_{s-1}$. Este processo se mantém de maneira análoga até que completemos todos os componentes da matriz e assim teremos representado matricialmente a partição de n , seguindo as restrições do teorema. Para voltarmos da matriz para a partição basta que somemos as entradas de cada coluna e tomemos o resultado como parte da partição. Desta forma temos uma bijeção para os conjuntos referidos no teorema.

5 Considerações Finais

Como qualquer pesquisa em matemática, a utilização de novas ferramentas pode abrir um universo de possibilidades de avanços científicos. Neste sentido, as novas representações matriciais introduzidas em [5] já se mostram promissoras. Como vimos, não tratam apenas de maneiras distintas de apresentar uma partição, já que, podem ser utilizadas na demonstração de resultados dentro da teoria. Trabalhos recentes procuram investigar e utilizar ainda mais essas matrizes, como em [4], por exemplo. E mesmo nos trabalhos onde as novas representações são utilizadas apenas como uma nova maneira de apresentar resultados já conhecidos, vale levantar a discussão sobre quais os ganhos e simplificações que são possíveis obter nessa nova apresentação.

Referências

- [1] BRIETZKE, E. H. M., SANTOS, J. P. O., SILVA, R. **Bijjective proofs using two-line matrix representations for partitions.** The Ramanujan Journal, 23, 265-295, 2010.
- [2] CHRIST, I. V. **A importância dos problemas em matemática: um exemplo na teoria das partições de inteiros.** Trabalho de Conclusão de Curso (licenciatura em matemática), Universidade Federal do Espírito Santo, Alegre, ES, 2020.
- [3] CHRIST, I. V., MARTINS, V. **Provas bijetivas e funções geradoras no estudo de partições de inteiros.** Revista de Matemática de Ouro Preto, v. 2, p. 94-137, 2020.
- [4] SANTOS, J. P. O., MATTE, M. L. **A New Approach to Integer Partitions.** Bull Braz Math Soc, New Series, 49, 811-847, 2018.
- [5] SANTOS, J. P. O., MONDEK, P., RIBEIRO, A. C. **New Two-Line Arrays Representing Partitions.** Annals of Combinatorics, 15, 341-354, 2011.
- [6] SANTOS, J. P. O., SILVA, R. **Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números.** 1. Colóquio de Matemática da Região Sul, UFSM, Santa Maria, RS, 2010.
- [7] SILVA, R. **Provas bijetivas através de nova representação matricial para partições.** Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP, 2009.
- [8] WAGNER, A. **Novos Resultados na Teoria de Partições obtidos por meio da Representação Matricial.** Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP, 2016.