Brazilian Electronic Journal of Mathematics, v.3 - n.5, jan/jun, 2022. ISSN: 2675-1313

Os números híbridos de K-Leonardo

K-Leonardo's hybrid numbers

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE
milenacarolina24@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4446-155X

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE
fregis@ifce.edu.br
ORCID: 0000-0003-3710-1561

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD
pcatarino23@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6917-5093

Resumo. Este trabalho apresenta um estudo sobre os números híbridos de K-Leonardo, a partir dos resultados obtidos sobre a sequência de Leonardo apresentado a princípio por Catarino e Borges (2020) e sobre o conjunto dos números híbridos, apresentado inicialmente por Özdemir (2018). De início, definiremos a sequência de K-Leonardo, sua recorrência e seus termos iniciais, e ainda, definiremos o conjunto dos números híbridos e propriedades inerentes a esses números. Com isso, ao longo do texto discutiremos a hibridização da sequência de K-Leonardo, que consiste em associar o conjunto dos números híbridos à sequência de K-Leonardo. Desse modo, apresentaremos uma nova recorrência, seus termos iniciais, sua extensão para os termos de índices não positivos, polinômio característico, forma matricial, função geradora, fórmula de Binet e propriedades vinculadas aos híbridos de K-Leonardo. Este trabalho tem o intuito de estudar e explorar a sequência de Leonardo e apresentar novos resultados matemáticos vinculados a esta sequência.

Palavras-chave. Sequência de Leonardo. Sequência de K-Leonardo. Números Híbridos. Números Híbridos de K-Leonardo.

Abstract. This work presents a study on Leonardo's K-hybrid numbers, based on the results obtained on the Leonardo sequence initially presented by Catarino and Borges (2020) and on the set of hybrid numbers, initially presented by Özdemir (2018). Initially, we will define the K-Leonardo sequence, its recurrence and its initial terms, and still, we will define the set of hybrid numbers and properties inherent to these numbers. Thus, throughout the text we will discuss the hybridization of the K-Leonardo sequence, which consists of associating the set of hybrid numbers with the K-Leonardo sequence. Thus, we will present a new recurrence, its initial terms, its extension to non-positive index terms, characteristic polynomial, matrix form, generating function, Binet's formula and properties linked to Leonardo's K-hybrids. This work aims to study and explore the Leonardo sequence and present new mathematical results linked to this sequence.

Keywords. Leonardo's sequence. K-Leonardo sequence. Hybrid Numbers. Leonardo's K-Hybrid numbers.

Mathematics Subject Classification (MSC): 11B36; 11B39.

1 Introdução

A sequência de Leonardo é discutida em Catarino e Borges (2019) [3], a qual é uma sequência que vem sendo explorada recentemente no âmbito matemático e é apresentada como uma sequência recorrente de números inteiros que está relacionado a sequência de Fibonacci e de Lucas que podem ser aplicadas em quase todos os campos da ciência. Esta sequência é formada pelos termos $1, 1, 3, 5, 9, 15...$ e gerada pela recorrência $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1$, ou ainda, $Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2}$ para $n \geq 2$ e $Le_0 = Le_1 = 1$ e $Le_2 = 3$ seus termos iniciais. Estudos em torno de sequências lineares recursivas podem ser encontrados nos trabalhos de [1, 2, 15, 16].

Por outro lado, tem-se o conjunto dos Números Híbridos, o qual foi apresentado por Özdemir (2018) [12], onde ele estudou três sistemas numéricos juntos, sendo eles: números complexos, hiperbólicos e duais, combinando-os um com os outros. Assim, ele denominou esses novos números de números híbridos. O conjunto desses números é denotado $\mathbb{K}$.

Definição 1. *O conjunto dos números híbridos é definido como:*

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}.$$

E ainda, pode-se efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos. Quanto a multiplicação dos números híbridos, tem-se que não é comutativa, mas tem a propriedade de associatividade e o conjunto $\mathbb{K}$ dos números híbridos forma um anel não comutativo em relação à adição e multiplicação.

Não obstante, temos o conjugado de um número híbrido $z = a+bi+c\varepsilon+dh$, denotado por $\overline{z}$, é definido como

$$\overline{z} = a - bi - c\varepsilon - dh$$

e o número real

$$C(z) = z\overline{z} = \overline{z}z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$$

é chamado de caráter do número híbrido, onde a raiz do valor absoluto desse número real será a norma do número híbrido z, assim temos que: $\|z\| = \sqrt{|C(z)|}$.

E ainda, tem-se que a matriz $\varphi(z) \in M_{2\times2}$ é chamada de matriz híbrida correspondente ao número híbrido z. Para os números complexos, duais e hiperbólicos, temos as seguintes representações matriciais:

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \varphi(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \varphi(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, tem-se:

$$\varphi_{a+bi+c\varepsilon+dh} = \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix}.$$

Assim, cada matriz 2×2 pode ser escrita como um composto de unidade, dual, complexo e hiperbólica.

Estudos em torno da hibridização de sequências podem ser encontrados nos trabalhos de [4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14].

Por outro lado, a seguir, motivados no trabalho de [6] a qual apresentou os números híbridos da sequência de K-Fibonacci e K-Lucas, neste trabalho, iremos definir os híbridos de K-Leonardo. A princípio apresentaremos os números de K-Leonardo, exibindo sua recorrência e seus termos iniciais. Logo mais, realizaremos a hibridização da sequência de K-Leonardo a qual mostraremos a recorrência da sequência híbrida de K-Leonardo e sua extensão para os índices inteiros não positivos. E ainda, seu polinômio característico, conjugado, caráter, norma, função geradora, fórmula de Binet, algumas propriedades inerentes a essa sequência e ainda, tem-se a forma matricial dos números híbridos de K-Leonardo, que foi obtida ao multiplicar o número híbrido de K-Leonardo pelas matrizes dos três sistemas númericos apresentado pelo Özdemir (2018) [12].

2 Resultados Principais

Nesta seção vamos definir os números de K-Leonardo e os híbridos de K-Leonardo e alguns resultados obtidos a partir dessa definição.

Uma das generalizações dos números de Leonardo é os números de K-Leonardo, denotados por $Le_{k,n}$. Esta sequência é dada pela seguinte recorrência, para $k \geq 1$ e $n \geq 2$:

$$Le_{k,n+1} = 2kLe_{k,n} - Le_{k,n-2}, \tag{1}$$

sendo $Le_{k,0} = Le_{k,1} = 1$ e $Le_{k,2} = 3$ seus termos iniciais.

Os primeiros termos da sequência de K-Leonardo são dados pela Tabela 1.

Tabela 1: Primeiros termos da sequência de K-Leonardo

n	$Le_{k,n}$
0	1
1	1
2	3
3	$6k - 1$
4	$12k^2 - 2k - 1$
5	$24k^3 - 4k^2 - 2k - 3$
6	$48k^4 - 8k^3 - 4k^2 - 12k + 1$
$\vdots$	$\vdots$

Cada sequência possui um polinômio característico, também chamada de equação característica, onde este está associado a ordem da sequência. Assim, tem-se que a equação característica desta sequência é $z^3 - 2kz^2 + 1 = 0$. Quanto a função geradora, ela permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes, possibilitando encontrar os números da sequência sem ser necessário calcular todos os números que o precedem. Portanto, a função geradora da sequência de K-Leonardo é dada por:

$$G_{Le_{k,n}}(t) = \frac{(Le_{k,0} + Le_{k,1}t)(1 - 2kt) + Le_{k,2}t^2}{1 - 2kt + t^3}. \tag{2}$$

Por outro lado, a seguir, definiremos os números híbridos de K-Leonardo e daremos algumas importantes propriedades, sua função geradora e fórmula de Binet para esses números.

Definição 2. *O número híbrido de K-Leonardo, denominado por $HLe_{k,n}$ é definido* *como:*

$$HLe_{k,n} = Le_{k,n} + Le_{k,n+1}i + Le_{k,n+2}\varepsilon + Le_{k,n+3}h.$$

Proposição 1. *A relação de recorrência da sequência híbrida de Leonardo, $k \geq 1$ e $n \geq 2$, é definida por:*

$$HLe_{k,n+1} = 2kHLe_{k,n} - HLe_{k,n-2}, \tag{3}$$

com os seguintes termos iniciais: $HLe_{k,0} = 1+i+3\varepsilon+(6k-1)h$, $HLe_{k,1} = 1+3i+(6k-1)\varepsilon+(12k^2-2k-1)h$ e $HLe_{k,2} = 3+(6k-1)i+(12k^2-2k-1)\varepsilon+(24k^3-4k^2-2k-3)h$.
Demonstração.

$$\begin{aligned}
HLe_{k,n+1} &= 2kHLe_{k,n} - HLe_{k,n-2} \\
&= 2k(Le_{k,n} + Le_{k,n+1}i + Le_{k,n+2}\varepsilon + Le_{k,n+3}h) - \\
&\quad (Le_{k,n-2} + Le_{k,n-1}i + Le_{k,n}\varepsilon + Le_{k,n+1}h) \\
&= (2kLe_{k,n} - Le_{k,n-2}) + (2kLe_{k,n+1} - Le_{k,n-1})i + \\
&\quad (2kLe_{k,n+2} - Le_{k,n})\varepsilon + (2kLe_{k,n+3} - Le_{k,n+1})h \\
&= Le_{k,n+1} + Le_{k,n+2}i + Le_{k,n+3}\varepsilon + Le_{k,n+4}h.
\end{aligned}$$

E ainda, extendendo esses indices inteiros não positivos, tem-se:

Definição 3. *A relação de recorrência para os indices inteiros não positivos da sequência híbrida de Leonardo, $n \geq 2$, é definida por:*

$$HLe_{k,-n} = 2kHLe_{k,-n+2} - HLe_{k,-n+3},$$

com os seguintes termos iniciais: $HLe_{k,0} = 1 + i + 3\varepsilon + (6k-1)h$, $HLe_{k,-1} = (2k-3) + i + \varepsilon + 3h$ e $HLe_{k,-2} = (2k-1) + (2k-3)i + \varepsilon + h$.

Dado as definições 2 e 3, conclui-se que essas definições são equivalentes.

Teorema 1. *O polinômio característico dos números híbridos de K-Leonardo é dado por:*

$$x^3 - 2kx^2 + 1 = 0,$$

possuindo três raízes, sendo duas iguais as raízes do polinômio característico da sequência de Fibonacci, $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_3 = 1$.
Demonstração. *Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Leonardo é dado por [7]:*

$$p(\lambda) = det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ *ou* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *e, no trabalho de [15], tem-se a matriz base da sequência de Leonardo, dada por:* $Q = \begin{bmatrix} 2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, $\lambda I - Q = \begin{bmatrix} \lambda - 2k & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

E ainda,

$$det(\lambda I - Q) = \begin{vmatrix} \lambda - 2k & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2k\lambda^2 + 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, *tem-se* $\lambda^2 - 2k\lambda^2 + 1 = 0$. *Logo,* $x^3 - 2kx^2 + 1 = 0$.

Baseado no que já foi apresentado anteriormente pode-se apresentar o seu conjugado, seu caráter e a norma de um número híbrido de K-Leonardo. Assim, tem-se que o conjugado de um número híbrido de K-Leonardo é apresentado como: $\overline{HLe_{k,n}} = Le_{k,n} - Le_{k,n+1}i - Le_{k,n+2}\varepsilon - Le_{k,n+3}h$. O produto de um número híbrido de K-Leonardo pelo o seu conjugado é denominado caráter de um número híbrido. Assim, tem-se que o caráter de um número híbrido de K-Leonardo é dado por: $C(HLe_{k,n}) = Le_{k,n}^2 + (Le_{k,n+1} - Le_{k,n+2})^2 - Le_{k,n+2}^2 - Le_{k,n+3}^2$. E, também, a norma de um número híbrido de K-Leonardo é gerado a partir da raíz quadrada do caráter do seu número híbrido. Com isso tem-se a norma de um número híbrido de K-Leonardo é como: $\|HLe_{k,n}\|^2 = | Le_{k,n+1}^2 - 2Le_{k,n+1}Le_{n+2} + 4Le_{k,n+2}Le_{k,n} - 4Le_{k,n+2}^2 |$.

Além disso, o número híbrido de K-Leonardo pode ser representado de forma matricial, a partir de uma matriz 2×2.

Proposição 2. *Uma matriz do número híbrido de* K*-Leonardo, com* $n \in \mathbb{N}$, *é dada por:*

$$\varphi_{HLe_{k,n}} = \begin{bmatrix} Le_{k,n} + Le_{k,n+2} & Le_{k,n+1} + Le_{k,n+2} - Le_{k,n} \\ 3Le_{k,n+2} - Le_{k,n} - Le_{k,n+1} & Le_{k,n} - Le_{k,n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\varphi_{Le_{k,n}} &= Le_{k,n}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Le_{k,n+1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + Le_{k,n+2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + Le_{k,n+3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Le_{k,n} + Le_{k,n+2} & Le_{k,n+1} - Le_{k,n+2} + Le_{k,n+3} \\ Le_{k,n+2} - Le_{k,n+1} + Le_{k,n+3} & Le_{k,n} - Le_{k,n+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Le_{k,n} + Le_{k,n+2} & Le_{k,n+1} - Le_{k,n+2} + 2Le_{k,n+2} - Le_{k,n} \\ Le_{k,n+2} - Le_{k,n+1} + 2Le_{k,n+2} - Le_{k,n} & Le_{k,n} - Le_{k,n+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Le_{k,n} + Le_{k,n+2} & Le_{k,n+1} + Le_{k,n+2} - Le_{k,n} \\ 3Le_{k,n+2} - Le_{k,n} - Le_{k,n+1} & Le_{k,n} - Le_{k,n+2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Proposição 3. *Se $\varphi_{HLe_{k,n}}$ corresponde a matriz hibrida do número híbrido de K-Leonardo, então $C(HLe_{k,n}) = det\varphi_{HLe_{k,n}}$ e $\|HLe_{k,n}\| = \sqrt{|\ det\varphi_{HLe_{k,n}}\ |}$.*
Demonstração.

$$\begin{aligned}
det\varphi_{HLe_{k,n}} &= \begin{vmatrix} Le_{k,n} + Le_{k,n+2} & Le_{k,n+1} + Le_{k,n+2} - Le_{k,n} \\ 3Le_{k,n+2} - Le_{k,n} - Le_{k,n+1} & Le_{k,n} - Le_{k,n+2} \end{vmatrix} \\
&= Le_{k,n}^2 - Le_{k,n+2}^2 - 3Le_{k,n+2}Le_{k,n+1} + Le_{k,n+1}Le_{k,n} + Le_{k,n+1}^2 - \\
&\quad 3Le_{k,n+2}^2 + Le_{k,n}Le_{k,n+2} + Le_{k,n+1}Le_{k,n+2} + 3Le_{k,n+2}Le_{k,n} - \\
&\quad Le_{k,n}^2 - Le_{k,n}Le_{k,n+1} \\
&= Le_{k,n}^2 - Le_{k,n+2}^2 - 2Le_{k,n+1}Le_{k,n+2} + Le_{k,n+1}^2 - 3Le_{k,n+2}^2 + \\
&\quad 4Le_{k,n}Le_{k,n+2} - Le_{k,n}^2 \\
&= Le_{k,n+1}^2 - 2Le_{k,n+1}Le_{k,n+2} + 4Le_{k,n}Le_{k,n+2} - 4Le_{k,n+2}^2 \\
&= Le_{k,n}^2 + Le_{k,n+1}^2 - 2Le_{k,n+1}Le_{k,n+2} + Le_{k,n+2}^2 - Le_{k,n+2}^2 - \\
&\quad 4Le_{k,n+2}^2 + 4Le_{k,n}Le_{k,n+2} - Le_{k,n}^2 \\
&= Le_{k,n}^2 + (Le_{k,n+1} - Le_{k,n+2})^2 - Le_{k,n+2}^2 - Le_{k,n+3}^2 \\
&= C(Le_{k,n}).
\end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HLe_{k,n}\| = \sqrt{|\ C(HLe_{k,n})\ |}$, temos que $\|HLe_{k,n}\| = \sqrt{|\ det\varphi_{HLe_{k,n}}\ |}$, como pretendíamos provar.

A seguir, forneceremos a função geradora de $HLe_{k,n}$, sua fórmula de Binet e algumas identidades encontradas que envolvem essa sequência.

Teorema 2. *A função geradora do número híbrido de K-Leonardo, dado por $G_{HLe_{k,n}}(t)$,* *é:*

$$G_{HLe_{k,n}}(t) = \frac{(HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t)(1-2kt) + HLe_{k,2}t^2}{1-2kt+t^3}.$$

Demonstração. *Para definir a função geradora do número híbrido de k-Leonardo, denotada por $G_{HLe_n}(t)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.*

$$G_{HLe_{k,n}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HLe_{k,n}t^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
G_{HLe_{k,n}}(t) &= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} HLe_{k,n}t^n \\
&= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(2kHLe_{k,n-1} - HLe_{k,n-3})t^n \\
&= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 + 2kt\sum_{n=3}^{\infty} HLe_{k,n-1}t^{n-1} - \\
&\quad t^3\sum_{n=3}^{\infty} HLe_{k,n-3}t^{n-3} \\
&= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 + 2kt\left(\sum_{n=0}^{\infty}[HLe_{k,n}t^n] - HLe_{k,0} - \right. \\
&\quad \left. HLe_{k,1}t\right) - t^3\sum_{n=0}^{\infty} HLe_{k,n}t^n \\
&= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 - 2ktHLe_{k,0} - 2kt^2HLe_{k,1} + \\
&\quad 2kt\sum_{n=0}^{\infty} HLe_{k,n}t^n - t^3\sum_{n=0}^{\infty} HLe_{k,n}t^n \\
&= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 - 2ktHLe_{k,0} - 2kt^2HLe_{k,1} + \\
&\quad 2ktG_{HLe_{k,n}} - t^3G_{HLe_{k,n}}.
\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
G_{HLe_{k,n}}(t) - 2ktG_{HLe_{k,n}} + t^3 G_{HLe_{k,n}} &= HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t + HLe_{k,2}t^2 - \\
&\quad 2ktHLe_{k,0} - 2kt^2 HLe_{k,1} \\
G_{HLe_{k,n}}(t)(1 - 2kt + t^3) &= HLe_{k,0}(1 - 2kt) + HLe_{k,1}t(1 - 2kt) + \\
&\quad HLe_{k,2}t^2 \\
G_{HLe_{k,n}}(t) &= \frac{(HLe_{k,0} + HLe_{k,1}t)(1 - 2kt) + HLe_{k,2}t^2}{1 - 2kt + t^3}.
\end{aligned}$$

Agora iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do n-ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência utilizando a fórmula de Binet, onde é necessário utilizar as raízes da equação característica desta sequência.

Teorema 3. *A fórmula de Binet dos híbridos de K-Leonardo, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:*

$$HLe_{k,n} = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes reais da equação característica $x^3 - 2kx^2 + 1 = 0$ e

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{HLe_{k,2} + (-x_2 - x_3)HLe_{k,1} + (x_2x_3)HLe_{k,0}}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3}, \\
\beta &= \frac{HLe_{k,2} + (-x_1 - x_3)HLe_{k,1} + (x_1x_3)HLe_{k,0}}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3}, \\
\gamma &= \frac{HLe_{k,2} + (-x_1 - x_2)HLe_{k,1} + (x_1x_2)HLe_{k,0}}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.
\end{aligned}$$

Demonstração. *Por meio da fórmula de Binet $HLe_{k,n} = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ e da recorrência dos híbridos de K-Leonardo $HLe_{k,n+1} = 2kHLe_{k,n} - HLe_{k,n-2}$, com os valores iniciais $HLe_{k,0}, HLe_{k,1}$ e $HLe_{k,2}$, é possível obter o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases}
\alpha + \beta + \gamma & = HLe_{k,0} \\
\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma t_3 & = HLe_{k,1} \\
\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma t_3^2 & = HLe_{k,2}
\end{cases}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer, tem-se que os coeficientes encontrados *foram:*

$$\alpha = \frac{HLe_{k,2} + (-x_2 - x_3)HLe_{k,1} + (x_2x_3)HLe_{k,0}}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3},$$
$$\beta = \frac{HLe_{k,2} + (-x_1 - x_3)HLe_{k,1} + (x_1x_3)HLe_{k,0}}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3},$$
$$\gamma = \frac{HLe_{k,2} + (-x_1 - x_2)HLe_{k,1} + (x_1x_2)HLe_{k,0}}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.$$

3 Propriedades dos híbridos de K-Leonardo

A seguir, são estudadas algumas propriedades inerentes aos números híbridos de K-Leonardo.

Propriedade 1. *A soma dos n primeiros números híbridos de K-Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} HLe_{k,m} = 2kHLe_{k,n-2} + 2kHLe_{k,n-1} - (HLe_{k,0} + HLe_{k,1}) + (2k-1)\sum_{s=2}^{n-3} HLe_{k,s}.$$

Demonstração. *Utilizando a relação de recorrência dos híbridos de K-Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$HLe_{k,n+1} = 2kHLe_{k,n} - HLe_{k,n-2} \tag{4}$$

Assim, avaliando a relação dada na Equação (4)*, em valores de $n \geq 2$, obtemos:*

$$\begin{aligned}
HLe_{k,3} &= 2kHLe_{k,2} - HLe_{k,0} \\
HLe_{k,4} &= 2kHLe_{k,3} - HLe_{k,1} \\
HLe_{k,5} &= 2kHLe_{k,4} - HLe_{k,2} \\
HLe_{k,6} &= 2kHLe_{k,5} - HLe_{k,3} \\
HLe_{k,7} &= 2kHLe_{k,6} - HLe_{k,4} \\
&\vdots \\
HLe_{k,n-2} &= 2kHLe_{k,n-3} - HLe_{k,n-5} \\
HLe_{k,n-1} &= 2kHLe_{k,n-2} - HLe_{k,n-4} \\
HLe_{k,n} &= 2kHLe_{k,n-1} - HLe_{k,n-3}
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum_{m=3}^{n} HLe_{k,m} &= (2k-1)HLe_{k,2} - HLe_{k,0} + (2k-1)HLe_{k,3} - HLe_{k,1} + \\ &\quad (2k-1)HLe_{k,4} + \cdots + (2k-1)HLe_{k,n-3} + 2HLe_{k,n-2} + 2HLe_{k,n-1} \\ &= 2kHLe_{k,n-2} + 2kHLe_{k,n-1} - (HLe_{k,0} + HLe_{k,1}) + (2k-1)\sum_{s=2}^{n-3} HLe_{k,s}.\end{aligned}$$

Propriedade 2. *A soma dos números de índices pares dos híbridos de K-Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} HLe_{k,2m} = 2kHLe_{k,2n-1} - HLe_{k,1} + (2k-1)\sum_{s=3}^{2n-3} HLe_{k,s}.$$

Demonstração. *Utilizando a relação de recorrência dos híbridos de K-Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$HLe_{k,n+1} = 2kHLe_{k,n} - HLe_{k,n-2}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}HLe_{k,4} &= 2kHLe_{k,3} - HLe_{k,1} \\ HLe_{k,6} &= 2kHLe_{k,5} - HLe_{k,3} \\ HLe_{k,8} &= 2kHLe_{k,7} - HLe_{k,5} \\ &\vdots \\ HLe_{k,2n-2} &= 2kHLe_{k,2n-3} - HLe_{k,2n-5} \\ HLe_{k,2n} &= 2kHLe_{k,2n-1} - HLe_{k,2n-3}\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{n} HLe_{k,2m} &= (2k-1)HLe_{k,3} - HLe_{k,1} + (2k-1)HLe_{k,5} + \cdots + (2k-1)HLe_{k,2n-3} + \\ &\quad 2kHLe_{k,2n-1} \\ &= 2kHLe_{k,2n-1} - HLe_{k,1} + (2k-1)\sum_{s=3}^{2n-3} HLe_{k,s}.\end{aligned}$$

Propriedade 3. *A soma dos números de índices ímpares dos híbridos de K-Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=2}^{n} HLe_{k,2m-1} = 2kHLe_{k,2n-2} - HLe_{k,0} + (2k-1)\sum_{s=2}^{2n-4} HLe_{k,s}.$$

Demonstração. *Utilizando a relação de recorrência dos híbridos de K-Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$HLe_{k,n+1} = 2kHLe_{k,n} - HLe_{k,n-2}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} HLe_{k,3} &= 2kHLe_{k,2} - HLe_{k,0} \\ HLe_{k,5} &= 2kHLe_{k,4} - HLe_{k,2} \\ HLe_{k,7} &= 2kHLe_{k,6} - HLe_{k,4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HLe_{k,2n-3} &= 2kHLe_{k,2n-4} - HLe_{k,2n-6} \\ HLe_{k,2n-1} &= 2kHLe_{k,2n-2} - HLe_{k,2n-4} \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{n} HLe_{k,2m-1} &= (2k-1)HLe_{k,2} - HLe_{k,0} + (2k-1)HLe_{k,4} + \cdots + \\ &\quad (2k-1)HLe_{k,2n-4} + 2HLe_{k,2n-2} \\ &= 2kHLe_{k,2n-2} - HLe_{k,0} + (2k-1)\sum_{s=2}^{2n-4} HLe_{k,s}. \end{aligned}$$

4 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um estudo em torno da sequência de Leonardo, sequência esta que está relacionada a famosa sequência de Fibonacci e Lucas. Com o intuito de explorar mais esta sequência, foi apresentado os números de K-Leonardo e realizado a hibridização desta nova sequência, apresentando assim a sequência híbrida de K-Leonardo. Com isso, foi exibido a sua relação de recorrência, função geradora, fórmula de Binet, representação matricial e propriedades em torno dos híbridos de K-Leonardo.

Essas novas propriedades foram descobertas a partir do que já se é conhecido da sequência de Leonardo, trabalhado juntamente com a definição e propriedades dos Números Híbridos, e para chegar aos resultados obtidos foi utilizado manipulações algébricas e provas matemática.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

[1] ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M. . The Newton Fractal's Leonardo Sequence Study with the Google Colab. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, p. 1-9, 2020.

[2] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. . Generalized Fibonacci and k-Pell Matrix sequences: another way of demonstrating their properties. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, p. 93-105, 2019.

[3] CATARINO, P.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 1, p. 75-86, 2020.

[4] CATARINO, P. On k-Pell hybrid numbers. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography**, Taylor & Francis, p. 1-7, 2019.

[5] CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. **arXiv preprint arXiv:1806.02231**, 2018.

[6] ERKAN, E.; DAGDEVIREN, A. k- Fibonacci and k- Lucas Hybrid Numbers. **Tamap Journal of Mathematics and Statistics**, v. 2021, Article ID 125. DOI:10.29371/2021.16.125.

[7] GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. R. B. de. O teorema de Cayley-Hamilton. **IME-USPOswaldo Rio Branco de Oliveira**, p. 1-11, 2019.

[8] MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V. Números Híbridos de Fibonacci e Pell. **Revista Thema**, vol. 17, n. 3, p. 831-842, 2020. https://doi.org/10.15536/thema.V17.2020.831-842.1353

[9] MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. The Oresme sequence: The generalization of its matrix form and its hybridization process. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, vol. 27, n. 1, p. 101-111, 2021. DOI: 10.7546/nntdm.2021.27.1.101-111.

[10] MANGUEIRA, M. C. S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Números híbridos de Mersenne. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 1-11, 2020. Edição Iniciação Científica. DOI: 10.21167/cqdvol18ic202023169664mcsmfrvapmmcc0111

[11] MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. The Hybrid Numbers of Padovan and Some Identities. **Annales Mathematicae Silesianae**, vol. 34, n. 2, p. 256-267, 2020. https://doi.org/10.2478/amsil-2020-0019

[12] ÖZDEMIR, M. Introduction to Hybrid Numbers. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, vol. 28, n. 11, 2018. https://doi.org/10.1007/s00006-018-0833-3

[13] SZYNAL-LIANA, A. The horadam hybrid numbers. **Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, Sciendo**, v. 38, n. 1, p. 91-98, 2018.

[14] SZYNAL-LIANA, A.; WLOCH, I. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. **Annales Mathematicae Silesianae, Sciendo**, p. 276-283, 2019.

[15] VIEIRA, R. P. M. et al. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, vol. 42, p. 1-13, 2020.

[16] VIEIRA, R. P. M. ; ALVES, FRANCISCO REGIS VEIRA ; CATARINO, P. M. M. C. . Relações bidimensionais e identidades de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, p. 156-173, 2019.

Submetido em 08 jun. 2021
Aceito em 12 jan. 2022