Brazilian Electronic Journal of Mathematics, v.2 - n.4, jul/dez, 2021. ISSN: 2675-1313

A teoria algébrica de formas quadráticas aplicada a uma disputa entre dois orixás

The algebraic theory of quadratic forms applied to a dispute between two orixás

Kaique Matias de Andrade Roberto
Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
kaique.roberto@usp.br
ORCID: 0000-0001-7136-8951

Hugo Luiz Mariano
Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
hugomar@ime.usp.br
ORCID: 0000-0002-9745-2411

Resumo. Esta é uma pequena introdução lúdica à Teoria Algébrica de Formas Quadráticas, como apresentada em [1], e intermediada por fábulas ou anedotas do Candomblé brasileiro contadas em [2], no intuito de expor e fortalecer a Teoria de Formas Quadráticas perante a comunidade brasileira, dado que esta é uma teoria abrangente dentro da matemática (por exemplo, com conexões em teoria dos números e geometria algébrica real), e com importantes contribuições dadas por matemáticos latino-americanos, como por exemplo, as contribuições dos professores M. Dickmann e F. Miraglia nos artigos [3] e [4], e a contribuição do professor M. Spira no artigo [5]. O texto se concentra em apresentar os conceitos iniciais da teoria, como forma quadrática, espaços quadráticos, elementos representados por uma forma, discriminante, hiperbolicidade, anisotropia e diagonalização de formas. Após isso é apresentada uma fábula (inspirada pelo estilo de R. Smullyan em [6], e pelos jogos topológicos) envolvendo uma disputa entre Orixás solucionada através de um jogo que utiliza elementos da aritmética de formas quadráticas, como forma lúdica de envolver/interessar o leitor na bela teoria de formas quadráticas através de elementos da cultura afro-brasileira.

Palavras-chave. Teoria algébrica de formas quadráticas. Formas quadráticas. Candomblé brasileiro.

Abstract. This is an brief and ludic introduction to the Algebraic Theory of Quadratic Forms, as presented in [1], and intermediated by fables or anecdotes from Brazilian Candomblé told in [2], in order to expose and strengthen the Theory of Quadratic Forms among the Brazilian community, because that this is a broad theory within Mathematics (for example, with connections in number theory and real algebraic geometry), and with important contributions made by Latin American mathematicians, such as the contributions of professors M. Dickmann and F. Miraglia in the articles [3] and [4], and the contribution of Professor M. Spira in the article [5]. The text focuses on presenting the initial concepts of the theory, such as quadratic form, quadratic spaces, elements represented by a form, discriminant, hyperbolicity, anisotropy and diagonalization of forms. After that, a fable is presented (inspired by the style of R. Smullyan in [6], and by the topological games) involving a dispute between Orixás solved through a game that uses elements of arithmetic in quadratic forms, as a ludic way of involving /interest the reader in the beautiful theory of quadratic forms through elements of Afro-Brazilian culture.

Keywords. Algebraic theory of quadratic forms. Quadratic forms. Brazilian Candomblé.

Mathematics Subject Classification (MSC): primary 11E81; secondary 11E24.

1 Introdução

Estive (Kaique Roberto) durante os dias 10 a 15 de fevereiro de 2019 em Salvador, na UFBA, participando da Semana Temática de Lógica, Teoria dos Conjuntos e Fundamentos. Logo no primeiro dia de evento, assisti uma palestra da Enathielle T. S. de Andrade sobre Jogos de Banach-Mazur e Choquet. A palestra foi tão boa e inspiradora que logo quis aplicá-la no meu "contexto quadrático", tema que tenho estudado, sob vários aspectos, desde minha iniciação científica sob a supervisão do professor Hugo Mariano. Para isso, após boas conversas com ele, tendo em vista alguns *itans*[1] que podem ser consultados (por exemplo) em [2], nos inspiramos no estilo de R. Smullian ([6]) para escrever o que chamamos de "anedota matemática", e que, no caso, é um texto introdutório à Teoria Algébrica de Formas Quadráticas, ilustrado pelo Candomblé brasileiro.

O contexto aqui, é o itan da página 286 do livro [2], onde é relatado que "... só uma vez Xangô venceu Ogum na luta". Aproveitamos desse excerto para criar uma narrativa (ou fábula) onde essa disputa se resolvesse por meio de um jogo matemático. Para que esse jogo matemático faça sentido é necessário que os jogadores entendam uma quantidade razoável de teoria de formas quadráticas, de modo que, com isso, nos propomos a alcançar dois objetivos simultaneamente: (1) apresentar os conceitos iniciais da teoria algébrica de formas quadráticas (que por sinal é uma teoria com contribuição extremamente relevante

[1] Itans são fábulas, anedotas ou mitos para explicar diversas situações, principalmente aquelas em que interagem as energias dos Orixás, seus poderes e domínios.

de matemáticos brasileiros!); (2) apresentar um pouco da cultura afro-brasileira, ilustrada em uma situação matemática.

Assim, na seção 2 introduzimos os Orixás que farão parte do nosso conto. Na seção 3 falamos de formas quadráticas e na seção 4 ocorre o jogo de fato. A seção 5 tem as soluções dos problemas propostos na seção 4, e o trabalho acaba na seção 6 com algumas sugestões de leituras posteriores.

Aproveitamos a oportunidade para agradecer as críticas e sugestões oportunas da professora Ana Luíza da Conceição Tenório. Também agradecemos em particular, ao professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira, pela leitura atenciosa, e pelos diversos comentários extremamente valiosos para o aprimoramento deste texto.

2 Exú, Ogum, Xangô, Oxalá

Certa vez, insisti para que a minha Mãe de Santo, a ialorixá Mãe Maria[2], que contasse um pouco mais sobre o Jogo de Búzios[3]. A resposta que obtive foi a seguinte

Você bem sabe que o Jogo de Búzios é um dos muitos segredos do Candomblé. Ainda não é o momento de você aprendê-lo. Mas eu posso contar a história de um outro jogo digamos, mais "profano", envolvendo uma das muitas brigas entre Ogum e Xangô (e que acabou sobrando pra Exú e Oxalá).

Claro que eu parei para ouvir a história! Mas antes de continuarmos, é importante que você que está lendo visualize quem são estes Orixás.

Exú é o Orixá dono dos caminhos, senhor do princípio e da transformação. Ele adora ludibriar e preparar armadilhas para todo mundo (inclusive outros Orixás), mas adota sempre o princípio da reciprocidade: ele será um amigo e fiel escudeiro, quando agradado corretamente, mas quando esquecido, volta-se contra o negligente, tirando-lhe a sorte, fechando-lhe os caminhos.

Ogum é o Orixá guerreiro, senhor da tecnologia e rei de Ifé. Foi Ogum quem ensinou aos seres humanos como forjar o ferro e o aço. Ele tem um molho de sete instrumentos de ferro: alavanca, machado, pá, enxada, picareta, espada e faca, com as quais ajuda a humanidade a vencer a natureza.

[2]Uma ialorixá ou mãe de santo é a sacerdotisa de um terreiro, seja ele de Candomblé, Umbanda ou Quimbanda. Mãe Maria é um nome fictício, apenas para ilustrar a nossa narrativa.

[3]O Jogo de Búzios é a maneira pela qual consultamos um certo oráculo no Candomblé, sendo este um assunto para um outro artigo...

Xangô é o Orixá da justiça, Rei absoluto de Oyó e detentor do poder mágico do fogo, do trovão, do raio que corta o céu. Seu poder é implacável para com seus inimigos, mas também transforma, protege, e ilumina seus súditos.

Há (pelo menos) dois Orixás que atendem pelo nome de Oxalá: Oxalufã e Oxaguiã. Para os propósitos deste texto, Oxalá será Oxalufã, que é o mais velho dos Orixá, criador do ser humano[4]. Sua idade é tão avançada, que ele anda com dificuldade, auxiliado por seu opaxorô[5]. Considerado como o Orixá da paz, da paciência, senhor do branco e da pureza, tudo que se refere a Oxalá é ligado à calma e à tranquilidade.

Feitas as apresentações, podemos voltar para a história:

Muitas foram as vezes que Ogum e Xangô guerrearam. Lutaram no passado e continuam lutando. Ogum usa da sua força, sua tecnologia, as armas que fabrica. Xangô usa da estratégia e da magia. Ambos são destemidos, fortes e valentes. Contudo, é sabido que Xangô venceu Ogum apenas uma vez na luta. Essa história todo mundo conhece!

Para os menos interados no assunto, uma das versões desse itan está na página 286 do livro [2], "Xangô vence Ogum na pedreira"

A história que eu vou contar, e que é pouco conhecida, é sobre o dia que eles possivelmente empataram.

Há muito tempo, quando os Orixás ainda viviam entre nós, Ogum e Xangô estavam em uma de suas intermináveis guerras. Não se sabe ao certo o motivo pelo qual eles começaram a brigar. O que se sabe é que ambos estavam muitíssimo irritados, a ponto de despertar o interesse em Exú (que não perde a oportunidade para zombar de alguém).

Eles brigaram tanto que, trovões, terremotos e queimadas se espalharam por todo o reino de Irê e Oyó. Sempre que a batalha caminhava para um fim, Exú dava um jeito de conter o oponente mais forte, de modo que a guerra se arrastou até a cidade de Ifon.

Ora, o senhor de Ifon é ninguém menos que Oxalá, de modo que quando essa batalha chegou aos seus domínios, afim de proteger o seu povo e dar um basta a essa balbúrdia, ele decidiu intervir: ordenou que seu filho Oxaguiã parasse a batalha, e trouxesse-os ao palácio para que fossem julgados. Tal tarefa foi executada com grande rapidez: apesar de grandes guerreiros, Ogum e Xangô estavam exauridos da batalha, de modo que Oxaguiã

[4]Oxaguiã é o Oxalá novo. Aqui ele terá um papel coadjuvante, mas em trabalhos futuros voltaremos a falar dele.

[5]Uma espécie de cajado ou grande bastão de metal branco, que, no culto brasileiro, costuma ter no topo a imagem de um pássaro e ornado por discos de metal e pequenos sinos.

não teve dificuldades em imobilizá-los com suas tropas. Assim, Ogum, Xangô e Exú foram levados (a contragosto) ao palácio de Oxalá.

Chegando ao palácio, após estarem limpos e vestidos de branco, foram introduzidos à presença do rei Oxalá, e ele proferiu sua sentença:

"Ogum e Xangô: não aguento mais essa briga de vocês! Vocês dois vão se resolver hoje, aqui e agora! E claro, por óbvio que eu não quero ninguém destruindo meu palácio, por isso arrumei uma solução pacífica, através de um jogo que criei e chamei de ***Jogo Quadrático****. Vocês serão os primeiros a jogar, e quem vencer a partida será o ganhador dessa disputa, de modo que vocês não poderão guerrear mais entre si!"*

"Mas Pai, eu sou o senhor da Guerra!" disse Ogum.

"E eu sou o senhor do Fogo!" disse Xangô.

"E eu sou o senhor dos Caminhos e adoro zoar com esses dois aí!" disse Exú.

"E eu sou o Pai de Todos e vocês vão fazer como eu estou mandando!" disse Oxalá, colocando um ponto final na querela.

"A Benção meu Pai!"responderam os dois.

Claro, todos eles eram excelentes matemáticos. Mas ninguém estava a fim de pausar a guerra. Principalmente Exú, que foi privado de sua diversão. Assim, a resposta dele foi:

"Excelente! Tudo resolvido então! Bom jogo pra vocês! Fui!"

"Não!" disse Oxalá. "Você vai me auxiliar na condução da partida. Pode sentar aí junto com eles, que vou começar a explicar as regras".

"A Benção meu Pai!"responderam dessa vez os três.

3 Os Fundamentos do Jogo: Formas Quadráticas

E assim, Oxalá começou a explicar as regras:

"Para jogar o Jogo Quadrático primeiro vocês vão ter que aprender o que eu chamo de Teoria Algébrica de Formas Quadráticas. Tenho pensado nessa teoria nos últimos dias, e obtive alguns resultados interessantes. Tudo começa com um corpo de característica diferente de 2..."

Esse foi o começo de um monólogo de pelo menos 5 horas. Ogum, Xangô e Exú estavam frustradíssimos com o caminho que as coisas tinham tomado. Mas nenhum deles ousava desrespeitar o velho Oxalá, de modo que ouviram com resiliência o discurso interminável do velho, que ficava cada vez mais empolgado com a sua nova teoria.

Pausa dramática: por favor, não pense que irei te submeter a um texto de 5 horas de leitura! Não temos a idade nem o tempo que Oxalá tinha para descrever a teoria. Vamos fazer uma rápida introdução apenas para que você entenda o jogo quadrático (que será descrito logo em seguida). Assim, aqui estabeleceremos os "Fundamentos do Jogo", i.e, uma lista de definições e resultados básicos da teoria algébrica de formas quadráticas, em sua grande maioria, extraídos do capítulo 1 do livro [1].

Dito tudo isso, uma coisa é certa: Oxalá começou de fato do início: para nós, a palavra "corpo" será sinônimo de "corpo de característica diferente de 2" durante todo esse texto.

De maneira geral, na maioria dos bons livros de álgebra linear tem um capítulo final (na maioria das vezes ignorado pelos estudantes) onde os autores falam de "formas bilineares" (por exemplo, no clássico livro do K. Hoffman e R. Kunze [7] este é o capítulo 10). Acontece que sob um certo ponto de vista, uma forma quadrática nada mais é do que uma forma bilinear simétrica. Chegaremos nessa discussão, mas por ora trabalharemos com uma outra definição, que considero um pouco mais palatável:

Definição 3.1. Uma **forma quadrática (n-ária)** sobre um corpo[6] F é um polinômio f em n variávies sobre F, que é homogêneo[7] de grau 2. Dito em outras palavras, uma forma quadrática nada mais é do que um polinômio que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$f(X_1,...,X_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}X_iX_j\in F[X_1,...,X_n]=F[X].$$

No intuito de lidarmos com coeficientes simétricos, reescrevemos f como

$$f(X)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})X_iX_j=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}X_iX_j,$$

onde $b_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$. Dessa forma, f determina de maneira única uma **matriz simétrica** (b_{ij}) (denotada por M_f) tal que:

$$f(X)=X^t\cdot M_f\cdot X=(X_1...X_n)\cdot M_f\cdot\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}$$

onde t indica a transposição de matrizes, X está sendo considerado como um vetor coluna

[6]Como já disse, todos os corpos considerados neste trabalho terão característica diferente de 2.

[7]Um polinômio $f\in F[X_1,...,X_n]$ é dito homogêneo quando todo monômio não nulo tem o mesmo grau total.

e identificamos matrizes 1×1 com elementos do corpo. Formas quadráticas surgem naturalmente em diversos contextos matemáticos. Vejamos alguns exemplos:

- O produto interno real $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$;
- A variância discreta de variáveis aleatórias $X = \{x_1, ..., x_n\}$:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \overline{x})^2$$

onde $\overline{x}$ é a média de X e p_i é a probabilidade associada a x_i.

Enquanto isso, ressaltemos uma frase importante da explicação do velho Oxalá:
"... Você pode pensar em forma quadrática *como sinônimo de* produto interno generalizado. *Continuando..."*

Agora, como "bons matemáticos", vamos estudar o comportamento de tais "produtos internos generalizados". A primeira coisa a ser feita, sob essa perspectiva, é "colapsar" formas quadráticas que "descrevem o mesmo fenômeno":

Definição 3.2. Sejam f e g formas quadráticas n-árias. Diremos que f é **equivalente** a g, notação $f \cong g$, se existir uma matriz invertível $C \in \text{GL}_n(F)$ tal que $f(X) = g(C \cdot X)$.

Isso significa que existe uma mudança de variáveis linear, homogênea e não-singular $X_1, ..., X_n$ que leva a forma g na forma f. Uma vez que

$$g(C \cdot X) = (C \cdot X)^t \cdot M_g \cdot (C \cdot X) = X^t \cdot (C^t \cdot M_g \cdot C) \cdot X,$$

a condição equivalente a $f(X) = g(C \cdot X)$, estipulada anteriormente, resulta na equação matricial

$$M_f = C^t \cdot M_g \cdot C.$$

Daí, a equivalência de formas implica na congruência das matrizes associadas (lembrando que a matriz $C^t \cdot M_g \cdot C$ também é simétrica).

Exemplo 3.3. Seja $f(X_1, X_2) = X_1 X_2$. Temos que f é equivalente à forma $g(X_1, X_2) =$

$X_1^2 - X_2^2$, uma vez que

$$
\begin{aligned}
g\left(\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}\right) &= g(X_1/2+X_2/2, X_1/2-X_2/2) =\\
&= (X_1/2+X_2/2)^2-(X_1/2-X_2/2)^2 =\\
&= X_1^2/4+X_1X_2/2+X_2^2/4-X_1^2/4+X_1X_2/2-X_2^2/4\\
&= X_1X_2 = f(X_1,X_2),
\end{aligned}
$$

ou em termos matriciais,

$$
\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}.
$$

Lembrando que $\mathrm{char}(F) \neq 2$.

Vale a pena mencionar que há outras formulações para a noção de forma quadrática equivalentes (do ponto de vista categorial) à que usamos aqui. Também recomendamos que consulte o capítulo 1 de [8] para uma abordagem mais detalhada neste tema. Lá o autor descreve pelo menos quatro possíveis axiomáticas equivalentes para a noção de forma quadrática.

Definição 3.4. Um **espaço quadrático** (V, B) consiste em um F-espaço vetorial V de dimensão finita e uma função bilinear simétrica $B : V \times V \to F$ em V. A aplicação $q_B : V \to F$ dado pela regra $q_B(x) = B(x, x)$ para todo $x \in V$ será chamada de **aplicação quadrática** associado ao espaço quadrático (V, B). Às vezes denotaremos (V, B) por (V, q_B).

Note que B pode ser recuperado através de q_B por

$$
B(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)), \text{ para todo } x, y \in V.
$$

A noção de aplicação quadrática sobre um F-espaço vetorial de dimensão finita pode ser convenientemente axiomatizada e também determina unicamente um espaço quadrático.

Definição 3.5. Diremos que dois espaços quadráticos (V, B) e (W, C) são **isométricos**, notação $V \cong W$, se existir um isomorfismo linear $\tau : V \to W$ tal que

$$
C(\tau(x), \tau(y)) = B(x, y)
$$

para todo $x, y \in V$.

Naturalmente, queremos um resultado do tipo:

Proposição 3.6. Seja F um corpo. Há uma correspondência bijetiva e natural entre as classes de equivalência de formas quadráticas n-árias $\mathcal{Q}_F$ e as classes de isometria de espaços quadráticos n-dimensionais Quad_F.

Demonstração. Dada uma forma quadrática n-ária f, defina $Q_f : F^n \to F$ por $Q_f(x) = x^t \cdot M_f \cdot x$. Em seguida, defina $B_f : F^n \times F^n \to F$ por

$$B_f(x,y) = \frac{1}{2}(Q_f(x+y) - Q_f(x) - Q_f(y)).$$

Claramente (F^n, B_f) é um espaço quadrático.

Sejam $f \cong g$ formas isométricas, onde $M_f = C^t \cdot M_g \cdot C$ com $C \in \text{GL}_n(F)$. Temos então

$$\begin{aligned}
2B_f(x,y) &= Q_f(x+y) - Q_f(x) - Q_f(y) \\
&= (x+y)^t \cdot M_f \cdot (x+y) - x^t \cdot M_f \cdot x - y^t \cdot M_f \cdot y \\
&= (x+y)^t \cdot (C^t \cdot M_g \cdot C) \cdot (x+y) - x^t \cdot (C^t \cdot M_g \cdot C) \cdot x - y^t \cdot (C^t \cdot M_g \cdot C) \cdot y \\
&= (C \cdot (x+y))^t \cdot M_g \cdot (C \cdot (x+y)) - (C \cdot x)^t \cdot M_g \cdot (C \cdot x) - (C \cdot y)^t \cdot M_g \cdot (C \cdot y) \\
&= 2B_g(C(x), C(y)).
\end{aligned}$$

Assim, temos uma aplicação bem definida

$$\begin{aligned}
\Phi \colon \mathcal{Q}_f &\to \text{Quad}_F \\
[f] &\mapsto [(F^n, B_f)]
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado um espaço quadrático (V, B) com $dim_F(V) = n$, para uma escolha de base $\{e_1, ..., e_n\}$ de V, definimos uma forma quadrática

$$f_B(X_1, ..., X_n) = \sum_{i,j} B(e_i, e_j) X_i X_j$$

com $M_f = (B(e_i, e_j))$. Se escolhermos outra base $\{e'_1, ..., e'_n\}$, a forma f' resultante da nova escolha é equivalente à forma f. De fato, se $e'_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k$, então

$$\begin{aligned}
(M'_f)_{ij} &= B\left(e'_i, e'_j\right) \\
&= B\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ki} \cdot B(e_k, e_l) \cdot c_{lj} \\
&= (C^t \cdot M_f \cdot C)_{ij}
\end{aligned}$$

onde $C = (c_{kl})$. Analogamente, temos que espaços quadráticos isométricos determinam a mesma classe de equivalência de formas quadráticas, independentemente de escolhas particulares de bases ordenadas. Temos assim uma aplicação

$$\begin{aligned}
\Psi \colon \mathrm{Quad}_F &\to \mathcal{Q}_f \\
[(V, B)] &\mapsto [f_B]
\end{aligned}$$

Segue que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$ (pois $M_{f_B} = (B(e_i, e_j))_{ij}$) e $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$, o que completa a prova.

Provamos que formas quadráticas e espaços quadráticos descrevem o mesmo fenômeno, e, portanto, no futuro trocaremos entre estas formulações de acordo com a conveniência. Naturalmente que a noção da definição se assemelha mais com aquela da álgebra linear que citamos há pouco.

Enquanto isso, Oxalá continuava sua aula, aparentemente sem perceber (ou se importar com o tédio dos seus três alunos compulsórios...

“...Quais classes de formas quadráticas importam? Quais propriedades das formas quadráticas importam?...” dizia o velho.

Tendo esses questionamentos em mente, precisamos classificar as formas, sendo necessário para isso, introduzir novas definições e operações. Vamos começar essa missão com o seguinte lema: seja (V, B) um espaço quadrático e M a matriz simétrica associada a alguma forma na classe de equivalência de f_B.

Lema 3.7. São equivalentes:

a - M é uma matriz não singular.

b - $x \mapsto B(\ , x)$ define um isomorfismo $V \to V^*$, onde V^* denota o espaço vetorial dual de V.

c - Dado $x \in V$, se $B(x, y) = 0$ para todo $y \in V$ então $x = 0$.

Definição 3.8. Seja (V, B) um espaço quadrático. (V, B) é dito **regular (ou não singular)** se satisfazer alguma das (e portanto todas as) condições equivalentes do Lema 3.7.

Tendo em mente a analogia do "produto interno generalizado", vamos equipar nossa teoria com um pouco de terminologia proveniente da Álgebra Linear:

Definição 3.9. Seja (V, B) um espaço quadrático e S um subespaço de V. Então $(S, B|_{S\times S})$ também é um espaço quadrático. O **complemento ortogonal** de S é definido por

$$S^{\perp} = \{x \in V : B(x, y) = 0, \forall y \in S\}.$$

O complemento ortogonal de V será chamado de **radical** de (V, B), e denotado por $V^{\perp} = \mathrm{rad}(V)$.

Lema 3.10. Seja (V, B) um espaço quadrático regular e S um subespaço de V. Então vale o que segue.

a - $\dim S + \dim S^{\perp} = \dim V$;

b - $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Definição 3.11. Dados espaços quadráticos (V_1, B_1) e (V_2, B_2), definimos a **soma ortogonal** (V, B) de (V_1, B_1) e (V_2, B_2), denotada por $(V, B) = (V_1, B_1) \perp (V_2, B_2)$, da seguinte maneira: $V := V_1 \oplus V_2$ e $B : V \times V \to F$ é dada pela regra

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2, y_2).$$

Consequentemente, $q_B = q_{B_1} + q_{B_2}$.

Exemplo 3.12. Se q_1 é a forma ternária $XY - 3Z^2$ e q_2 é a forma binária $X^2 - Y^2$, então $q_1 \perp q_2$ é a forma $XY - 3Z^2 + V^2 - W^2$ em cinco variáveis V, W, X, Y, Z.

Lema 3.13. Sejam (V_1, B_1) e (V_2, B_2) espaços quadráticos. Então, $(V_1, B_1) \oplus (V_2, B_2)$ é regular se e somente se (V_1, B_1) e (V_2, B_2) são regulares.

Agora, vamos avançar mais um passo no nosso objetivo de classificar as formas quadráticas. A próxima definição é crucial.

Definição 3.14. Seja f uma forma quadrática sobre F e $d \in \dot{F} := F \setminus \{0\}$. Diremos que f **representa** d se existirem $x_1, x_2, ..., x_n \in F$ tais que $f(x_1, ..., x_n) = d$.

Observe que $(x_1, ..., x_n)$ acima é necessariamente um vetor não-nulo. $D_F(f) = D(f) \subseteq \dot{F}$ denotará o conjunto dos valores em $\dot{F}$ representados por f. Ao lidarmos com um espaço quadrático (V, B), denotaremos o conjunto dos valores representados por sua forma quadrática associada por $D(V, B)$, ou apenas $D(V)$. Dada uma forma f sobre um corpo F, o conjunto $D(f)$ depende apenas da classe de equivalência de f. Além disso, $d \in D(f)$ se e somente se $da^2 \in D(f)$ para todo $a \in \dot{F}$.

Para $d \in F$, escreveremos $\langle d \rangle$ para denotar a classe de isometria do espaço 1-dimensional correspondente à forma quadrática dX^2. Segue da Definição 3.8 que $\langle d \rangle$ é regular se e somente se $d \in \dot{F}$.

Proposição 3.15. Seja (V, B) um espaço quadrático e $d \in \dot{F}$. Então, $d \in D(V)$ se e somente se existe um outro espaço quadrático (V', B') tal que $V \cong \langle d \rangle \perp V'$.

Demonstração. Se $V \cong \langle d \rangle \perp V'$, então $d \in D(\langle d \rangle \perp V') = D(V)$. Inversamente, supondo $d \in D(V)$, temos que existe $v \in V$ com $q(v) = d$ (onde $q = q_B$). Primeiramente, façamos uma redução para o caso onde V é regular. Considere um subespaço W qualquer e tal que $V = \text{rad}(V) \oplus W$, então segue $V = \text{rad}(V) \perp W$. Pela definição de soma ortogonal, valem $D(V) = D(W)$ e que W é regular pois, por construção, temos que $q_B(w, w) \neq 0$ se $w \in W \setminus \{0\}$. Assim, vamos assumir sem perda de generalidade que V é regular.

O subespaço quadrático $F \cdot v$ é isométrico a $\langle d \rangle$, e $(F \cdot v) \cap (F \cdot v)^\perp = 0$. Daí

$$\dim(F \cdot v) + \dim(F \cdot v)^\perp = \dim V,$$

e pelo Lema 3.10 concluímos que $V \cong \langle d \rangle \perp (F \cdot v)^\perp$.

Corolário 3.16. Se (V, B) é um espaço quadrático sobre F, então existem escalares $d_1, ..., d_n \in F$ (uma "base ortogonal") tal que $V \cong \langle d_1 \rangle \perp \langle d_2 \rangle \perp ... \perp \langle d_n \rangle$. Em outras palavras, toda forma quadrática n-ária é equivalente a alguma forma diagonal $d_1 X_1^2 + \cdots + d_n X_n^2$.

Abreviaremos a forma diagonal $\langle d_1 \rangle \perp \langle d_2 \rangle \perp ... \perp \langle d_n \rangle$ para $\langle d_1, d_2, ..., d_n \rangle$. A forma n-ária $\langle d, ..., d \rangle$ será abreviada como $n\langle d \rangle$. Por exemplo, $2\langle a \rangle \perp 3\langle b \rangle$ é uma abreviação da forma 5-ária $\langle a, a, b, b, b \rangle$. Segue um outro corolário.

Corolário 3.17. Seja f uma forma quadrática n-ária sobre F. Então $b \in D(f)$ se e somente se existem $b_2, ..., b_n \in \dot{F}$ tais que $f \cong \langle b, b_2, ..., b_n \rangle$. Além disso, se f é regular então podemos escolher $b_2, ..., b_n \in \dot{F}$.

A Proposição 3.15 e os Corolários 3.16, 3.17 são ferramentas poderosas para lidar com formas quadráticas. Com elas, reduzimos o estudo das formas quadráticas ao estudo das formas diagonais, isto é, ao invés de lidarmos com matrizes, polinômios e espaços vetoriais, nos preocupamos apenas com n-uplas de elementos em $\dot{F}$. Claro, faremos deste método o nosso "arado para o campo quadrático" de agora em diante.

Corolário 3.18. Se (V, B) é um espaço quadrático e S um subespaço regular, vale o que segue.

a - $V = S \perp S^{\perp}$.

b - Se T é um subespaço de V tal que $V = S \perp T$, então $T = S^{\perp}$.

Demonstração.

a - Como $S \cap S^{\perp} = \text{rad}S = 0$, é suficiente provar que V é gerado por S e $S^{\perp}$. Pelo Corolário 3.16, S tem uma base ortogonal $x_1, ..., x_p$, e a regularidade de S implica que $B(x_i, x_i) \neq 0$ para todo i. Dado $z \in V$, considere o vector

$$y = z - \sum_{i=1}^{p} \frac{B(z, x_i)}{B(x_i, x_i)} x_i.$$

Temos

$$\begin{aligned} B(y, x_j) &= B(z, x_j) - \sum_{i=1}^{p} \frac{B(z, x_i)}{B(x_i, x_i)} B(x_i, x_j) \\ &= B(z, x_j) - \frac{B(z, x_j)}{B(x_j, x_j)} B(x_j, x_j) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $y \in S^{\perp}$ e

$$z = y + \sum_{i=1}^{p} \frac{B(z, x_i)}{B(x_i, x_i)} x_i \in S \perp S^{\perp}.$$

b - Se $V = S \perp T$, então $T \subseteq S^{\perp}$. Mas, valem as identidades

$$\dim T = \dim V - \dim S = \dim S^{\perp}$$

sendo que $\dim T \leq \dim V$ e $\dim S^{\perp} \leq \dim V$. Disso segue obrigatoriamente que $T = S^{\perp}$.

Corolário 3.19. Seja (V, B) um espaço quadrático regular. Então, um subespaço S é regular se e somente se existe $T \subseteq V$ tal que $V = S \perp T$.

Definição 3.20. Seja f uma forma quadrática não-singular. O **discriminante** de f é definido por $d(f) = \det(M_f) \cdot \dot{F}^2$ (sendo $d(f)$ um elemento de $\dot{F}/\dot{F}^2$), onde M_f é a matriz simétrica associada à f.

Observe que, se $f \cong g$, então temos $M_f = C^t M_g C$ para alguma matriz não-singular C, e portanto,

$$d(f) = \det(M_f) \cdot \dot{F}^2 = \det(M_g) \cdot (\det C)^2 \cdot \dot{F}^2 = d(g).$$

Isso mostra que $d(f)$ é um **invariante** da classe de equivalência de f.

Seja (V, B) um espaço quadrático (regular) em correspondência com a classe de equivalência de f. Se $V \cong \langle d_1, ..., d_n \rangle$ é uma "diagonalização" de V, então $d(f) = d_1 ... d_n \cdot \dot{F}^2$. Pode ser conveniente nomear $d(f)$ como o **discriminante** de V, e denotar por $d(V)$.

Não vamos esquecer que enquanto isso, o monólogo continua. Neste ponto da teoria, Oxalá certamente disse algo como

"...Obtemos alguns resultados interessantes sobre formas regulares, e você poderia estar pensando algo do tipo: Nosso trabalho está pronto! Formas regulares classificam as formas quadráticas!*..."*

"Eu só estou pensando no meu amalá" disse Xangô a si mesmo mentalmente.

"...Mas ainda não é o suficiente..." continuou o velho.

Apesar de estar compadecido com Xangô, Oxalá tem razão. Por exemplo, considere a forma binária $q = \langle 1, -1 \rangle$ (digamos em $\mathbb{R}$). Neste caso q é uma forma regular, satisfazendo $q(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, do "ponto de vista da forma q", todos os vetores da reta $y = x$ tem "comprimento" zero. Em um mundo ideal, vetores não-nulos deveriam ter "comprimento não nulo"! Assim, formas regulares permitem que tais "vetores estranhos" permeiem o nosso universo quadrático...

Definição 3.21. Seja v um vetor não nulo em um espaço quadrático (V, B). Diremos que v é um vetor **isotrópico** se $B(v, v) = 0$, e **anisotrópico** caso contrário. O espaço quadrático (V, B) será **isotrópico** se contiver um vetor isotrópico (não nulo) e **anisotrópico** caso contrário. Finalmente, diremos que (V, B) é **totalmente isotrópico** se todo vetor não nulo de V for isotrópico (e, portanto, $B \equiv 0$).

Teorema 3.22. Seja (V, q) um espaço quadrático de dimensão 2. São equivalentes as afirmações abaixo.

a - V é regular e isotrópico.

b - V é regular, com $d(V) = -1 \cdot \dot{F}^2$.

c - V é isométrico a $\langle 1, -1 \rangle$.

d - V corresponde à classe de equivalência da forma binária X_1X_2.

A classe de isometria do espaço quadrático de dimensão 2 satisfazendo estas condições será chamada de **plano hiperbólico**, denotado por $\mathbb{H}$.

Demonstração. Já vimos $(c) \Leftrightarrow (d)$ no Exemplo 3.3, e $(d) \Rightarrow (a)$ é imediato.

$(a) \Rightarrow (b)$: Seja $\{x_1, x_2\}$ uma base ortogonal de V. A regularidade de V implica $q(x_i) = d_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Agora seja $ax_1 + bx_2$ um vetor isotrópico com $a \neq 0$ (sem perda de generalidade). Então segue.

$$\begin{aligned} 0 = q(ax_1 + bx_2) = a^2d_1 + b^2d_2 &\Rightarrow d_1 = -(ba^{-1})^2 \cdot d_2 \\ &\Rightarrow d(V) = d_1d_2 \cdot \dot{F}^2 = -1 \cdot \dot{F}^2. \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (c)$: Sob as hipóteses de (b), temos a diagonalização $V \cong \langle a, -a\rangle$ para algum $a \in \dot{F}$. Pelo argumento no Exemplo 3.3, sabemos que $aX^2 - aY^2$ é equivalente a aXY. Esta última representa todos os elementos de $\dot{F}$. Em particular, (V, q) representa 1. Pela Proposição 3.15 concluímos que $V \cong \langle 1, -1\rangle$.

Uma soma ortogonal de planos hiperbólico será chamada de **espaço hiperbólico**. A forma quadrática correspondente pode ser considerada como

$$(X_1^2 - X_2^2) + \cdots + (X_{2m-1}^2 - X_{2m}^2) \text{ ou } X_1X_2 + \cdots + X_{2m-1}X_{2m}.$$

Definição 3.23. Uma forma quadrática (ou espaço quadrático) será chamado **universal** se representa todo elemento não nulo de F.

Teorema 3.24. Seja (V, B) um espaço quadrático regular. Vale o que segue.

a - Todo subespaço totalmente isotrópico $U \subseteq V$ de dimensão $r \geq 0$, está contido em um subespaço hiperbólico $T \subseteq V$ de dimensão $2r$.

b - V é isotrópico se e somente se V contém algum plano hiperbólico.

c - Se V é isotrópico, então V é universal.

Demonstração.

a - Provaremos por indução em r. Tome uma base qualquer $x_1, ..., x_r$ em U, e seja S o subespaço gerado por $x_2, ..., x_r$. Temos que $U^\perp \subseteq S^\perp$. Como V é regular, aplicamos a Proposição 3.15 para obter

$$\dim S^\perp = \dim V - \dim S > \dim V - \dim U = \dim U^\perp.$$

Isso significa que existe um vetor $y_1 \in S^\perp$ que é ortogonal a $x_2, ..., x_r$, mas não é ortogonal a x_1. Em particular, x_1, y_1 são linearmente independentes (uma vez que x_1 é isotrópico). O subespaço $H_1 = Fx_1 + Fy_1$ tem discriminante

$$d(H_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & B(x_1, y_1) \\ B(x_1, y_1) & B(y_1, y_1) \end{pmatrix} \cdot \dot{F}^2 = -1 \cdot \dot{F}^2,$$

e portanto $H_1 \cong \mathbb{H}$ pelo Teorema 3.22. Temos uma decomposição $V = H_1 \perp V'$, onde $V' = H_1^\perp$ contém $x_2, ..., x_r$ (Corolário 3.18). Como V' é regular (Corolário 3.19), a prova segue por indução.

b - Segue de (a) tomando $r = 1$.

c - Segue de (b) e do fato de que $\mathbb{H}$ é universal.

Teorema 3.25. Sejam f, g formas quadráticas arbitrárias sobre um corpo F, sejam $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \dot{F}$ e $\pi \in S_n$[8]. Então valem as seguintes afirmações.

a - Se $f \cong g$, então $\dim(f) = \dim(g)$ e $d(f) = d(g)$.

b - Se $f \cong g$, então $af \cong ag$ para todo $a \in \dot{F}$.

c - $\langle a_1 b_1^2, ..., a_n b_n^2 \rangle \cong \langle a_1, ..., a_n \rangle$.

d - $\langle a_{\pi(1)}, ..., a_{\pi(n)} \rangle \cong \langle a_1, ..., a_n \rangle$.

e - Se $\langle a_1, ..., a_k \rangle \cong \langle b_1, ..., b_k \rangle$ e $\langle a_{k+1}, ..., a_n \rangle \cong \langle b_{k+1}, ..., b_n \rangle$, então

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle \cong \langle b_1, ..., b_n \rangle.$$

Corolário 3.26. Sejam $a, b, c, d \in \dot{F}$. Então vale o que segue.:

a - Temos $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ se e somente se $a \equiv b \pmod{\dot{F}^2}$.

b - Temos $\langle a, b \rangle \cong \langle c, d \rangle$ se e somente se $ab \equiv cd \pmod{\dot{F}^2}$ e existem $x, y \in F$ tais que $c = ax^2 + by^2$.

Corolário 3.27. $\langle a, -a \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle$ para todo $a \in \dot{F}$.

Corolário 3.28. Seja f uma forma quadrática regular sobre F e de dimensão n. Então, f é isotrópica se e somente se existem $b_3, ..., b_n \in \dot{F}$ tais que $f \cong \langle 1, -1, b_3, ..., b_n \rangle$. Em particular, $n \geq 2$.

[8] O grupo das bijeções $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

Proposição 3.29. Sejam $q = \langle a, b\rangle$ e $q' = \langle c, d\rangle$ formas binárias regulares. Então, temos $q \cong q'$ se e somente se $d(q) = d(q')$ e q, q' representam um elemento comum $e \in \dot{F}$.

Demonstração. Precisamos provar apenas ($\Leftarrow$). Suponha que $d(q) = d(q') \in \dot{F}/\dot{F}^2$ e seja $e \in D(q) \cap D(q')$. Pela Proposição 3.15, sabemos que $q \cong \langle e, e'\rangle$ para algum $e' \in \dot{F}$. Observando os discriminantes, temos $ab\dot{F}^2 = ee'\dot{F}^2$, e daí $q \cong \langle e, abe\rangle$. Analogamente, $q' \cong \langle e, cde\rangle$. Por outro lado, temos $ab\dot{F}^2 = cd\dot{F}^2$ e, portanto, $q \cong q'$.

Agora sabemos o que precisamos fazer: é necessário descobrir um critério para decompor uma forma quadrática genérica em uma forma diagonal **anisotrópica**. Porém, antes de lidarmos com isso, vamos criar alguma familiaridade com as operações entre formas quadráticas. Nossa missão de classificar as formas retornará na sequência.

"...Com isso", continuou Oxalá, "Já sabemos como somar formas quadráticas. A pergunta natural que se segue é: podemos multiplicar?..."

"Quem se importa?" pensou Exú.

"Claro que podemos!" continuou o nosso adorável velhinho.

E a multiplicação das formas é o conteúdo da definição a seguir.

Definição 3.30. Sejam $(V_1, B_1, q_1), (V_2, B_2, q_2)$ espaços quadráticos sobre F, de dimensão m e n respectivamente. Produzimos um novo espaço $V := V_1 \otimes V_2$ (onde, $\otimes = \otimes_F$) e uma nova função bilinear simétrica $B : V \times V \to F$ (notação, $B = B_1 \otimes B_2$) como sendo a única satisfazendo

$$B(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') = B_1(v_1, v_1')B_2(v_2, v_2'),\ v_1, v_2 \in V_1,\ \text{e}\ v_1', v_2' \in V_2.$$

e portanto, $q_B(v_1 \otimes v_2) = q_1(v_1)q_2(v_2)$. O par (V, B) é um novo espaço quadrático sobre F de dimensão mn, chamado o **produto de Kronecker** (ou **produto tensorial**) de V_1 e V_2.

Se $(V_1, B_1) \cong (V_1', B_1')$ e $(V_2, B_2) \cong (V_2', B_2')$, temos $(V_1 \otimes V_2, B_1 \otimes B_2) \cong (V_1' \otimes V_2', B_1' \otimes B_2')$.

Sejam $\{e_1, ..., e_m\}$ e $\{f_1, ..., f_n\}$ bases de V_1 e V_2 respectivamente. Considerando $a_{ij} = B_1(e_i, e_j)$ e $b_{lk} = B_2(f_l, f_k)$, temos que $M = (a_{ij})$ e $N = (b_{lk})$ são as matrizes simétricas associadas com q_1 e q_2, respectivamente (com a escolha de base dada). Agora, considere a base de $V = V_1 \otimes V_2$ dada por $\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, ..., e_1 \otimes f_n, ..., e_m \otimes f_1, ..., e_m \otimes$

$f_n\}$. Com respeito a essa escolha de bases, a forma q produz a seguinte matriz simétrica

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}N & a_{12}N & \cdots & a_{1m}N \\ a_{21}N & a_{22}N & \cdots & a_{2m}N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}N & a_{m2}N & \cdots & a_{mm}N \end{pmatrix}$$

que é precisamente o produto de Kronecker usual de duas matrizes M, N. Em particular, $\langle a\rangle \otimes \langle b\rangle \cong \langle ab\rangle$ para todo $a, b \in F$.

Como consequência das propriedades usuais de matrizes, temos o lema a seguir.

Lema 3.31. O produto de Kronecker nas formas quadráticas possui as propriedades a seguir.

a - $q_1 \otimes q_2 \cong q_2 \otimes q_1$.

b - $(q_1 \otimes q_2) \otimes q_3 \cong q_1 \otimes (q_2 \otimes q_3)$.

c - A “Lei Distributiva” $q \otimes (q_1 \perp q_2) \cong (q \perp q_1) \otimes (q \perp q_2)$.

Utilizando a distributividade, temos a seguinte regra:

$$\langle a_1, ..., a_m\rangle \otimes \langle b_1, ..., b_n\rangle \cong \langle a_1b_1, ...a_1b_m, a_2b_1, ..., a_2b_m, ..., a_nb_1, ..., a_mb_n\rangle.$$

Se $r \geq 0$ e f é uma forma quadrática, $r \cdot f$ (ou rf) denotará a soma ortogonal de r cópias de f.

Lema 3.32. Dada uma forma quadrática regular arbitrária q, vale $q \otimes \mathbb{H} \cong (\dim q) \cdot \mathbb{H}$.

Demonstração. Diagonalizando q temos $q \cong \langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ com $a_1, \cdots, a_n \in \dot{F}$. Logo, pela lei distributiva (item (c) do lema anterior), obtemos $q \otimes \mathbb{H} \cong \langle a_1\rangle \otimes \mathbb{H} \perp \cdots \perp \langle a_n\rangle \otimes \mathbb{H}$. Reduzimos a prova ao caso $q = \langle a\rangle$, $a \neq 0$. Daí, pelo Teorema 3.22 vale

$$\langle a\rangle \otimes \mathbb{H} = \langle a\rangle \otimes \langle 1, -1\rangle \cong \langle a, -a\rangle \cong \mathbb{H}.$$

“...Uma vez de posse dos fatos e propriedades básicas da isometria, soma e produto de formas, estamos preparados para lidar com a questão da classificação das formas. Gostaria que vocês prestassem bastante atenção nesses resultados que demonstrarei agora...”

“Com certeza!” pensou Ogum ironicamente.

Obteremos a decomposição desejada nesta seção, como consequência de alguns teoremas clássicos demonstrados por Ernest Witt (talvez ele estivesse inspirado por Oxalá?).

Para provar o primeiro destes teoremas, o Teorema do Cancelamento, precisamos da noção de **reflexão por um hiperplano**. Seja (V, B, q) um espaço quadrático. Escreveremos $O_q(V) = O(V)$ para denotar o grupo das isometrias de (V, q). Este é o **grupo ortogonal**, que carrega as informações da geometria subjacente ao nosso espaço quadrático fixado. A seguinte construção associa um elemento $\tau_y \in O(V)$ para todo vetor anisotrópico $y \in V$. Como função de V em V, a isometria τ_y é definida para todo $x \in V$ pela regra

$$\tau_y(x) = x - \frac{2B(x,y)}{q(y)}y.$$

Abaixo seguem algumas propriedades de τ_y.

a - A isometria τ_y é um endomorfismo linear.

b - Temos $\tau_y(y) = -y$ e τ_y restrito a $(F \cdot y)^\perp$ é a função identidade. De fato, na fórmula acima, se $B(x, y) = 0$, então $\tau_y(x) = x$. Além disso, se aplicarmos τ_y em y, obtemos

$$\tau_y(y) = y - \frac{2B(y,y)}{q(y)}y = y - 2y = -y.$$

En particular, τ_y é uma involução ($\tau_y^2 = id$). Em outras palavras, ela fixa o hiperplano $(F \cdot y)^\perp$ e reflete o vetor λy através $(F \cdot y)^\perp$ em $-\lambda y$.

c - Vale $\tau_y \in O(V)$, tendo em vista as contas que seguem.

$$\begin{aligned} B(\tau_y(x), \tau_y(x')) &= B\left(x - \frac{2B(x,y)}{q(y)}y, x' - \frac{2B(x',y)}{q(y)}y\right) \\ &= B(x,x') - \frac{4B(x,y)B(x',y)}{q(y)^2}B(y,y) - \frac{4B(x,y)B(x',y)}{q(y)} \\ &= B(x,x') \text{ (dado que } B(y,y) = q(y)). \end{aligned}$$

d - Como automorfismo linear, τ_y tem discriminante -1. Isto segue diretamente da (prova da) Proposição 3.15 tomando $d = q(y) \in \dot{F}$.

e - O conjunto das reflexões através do hiperplano $\{\tau_y : q(y) \neq 0\}$ é fechado por conjugação no grupo ortogonal $O(V)$. Isso acontece pois, se $\sigma \in O(V)$, então $\sigma\tau_y\sigma^{-1} = \tau_{\sigma y}$.

De fato, para todo $x \in V$ temos

$$\begin{aligned}\sigma\tau_y\sigma^{-1}(x) &= \sigma[\tau_y\sigma^{-1}x] \\ &= \sigma\left[\sigma^{-1}x - \frac{2B(\sigma^{-1}x, y)}{q(y)}y\right] \\ &= x - \frac{2B(x, \sigma y)}{q(\sigma y)}\sigma y = \tau_{\sigma y}(x).\end{aligned}$$

Proposição 3.33. Seja (V, q) um espaço quadrático, e x, y vetores em V tal que $q(x) = q(y) \neq 0$. Então existe um elemento $\tau \in O(V)$ tal que $\tau(x) = y$.

Demonstração. Geometricamente, se considerarmos a reflexão com respeito ao hiperplano $(F \cdot (x - y))^{\perp}$, então x deveria ser levado em y. Mas $x - y$ é necessariamente anisotrópico? Primeiramente, vamos obter a Lei do Paralelogramo:

$$\begin{aligned}q(x + y) + q(x - y) &= B(x + y, x + y) + B(x - y, x - y) \\ &= 2B(x, x) + 2B(y, y) = 2q(x) + 2q(y) \\ &= 4q(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Isso implica que $q(x + y)$ e $q(x - y)$ não podem ser ambos zero. Substituindo y por $-y$, se necessário, podemos assumir $q(x - y) \neq 0$ (pois se pudermos encontrar $\tau \in O(V)$ tal que $\tau(x) = -y$, então temos $q(-y) = q(y) \neq 0$, e daí, $\tau_{-y}(\tau(x)) = \tau_{-y}(-y) = y$). Aplicando a reflexão τ_{x-y} em x, obtemos

$$\tau_{x-y}(x) = x - \frac{2B(x, x - y)}{q(x - y)}(x - y).$$

Por outro lado, valem as identidades

$$\begin{aligned}q(x - y) &= B(x - y, x - y) \\ &= B(x, x) + B(y, y) - 2B(x, y) \\ &= 2(B(x, x) - B(x, y)) = 2B(x, x - y).\end{aligned}$$

Assim, $\tau_{x-y}(x) = x - (x - y) = y$.

Agora é o momento de apresentarmos os teoremas centrais da Teoria Algébrica das Formas Quadráticas[9]:

[9]Estes são os instrumentos para o desenvolvimento da teoria de E. Witt ([9]), que associa um anel comutativo com unidade para cada corpo. Este anel classifica o conjunto das formas quadráticas anisotrópicas sobre o corpo em questão.

Teorema 3.34 (Cancelamento de Witt)**.** Se q, q_1 e q_2 são formas quadráticas arbitrárias, então

$$q \perp q_1 \cong q \perp q_2 \text{ implica } q_1 \cong q_2.$$

Demonstração. Suponhamos $q \perp q_1 \cong q \perp q_2$.

Caso 1. A forma q é totalmente isotrópica e q_1 é regular. Sejam M_1 e M_2 as matrizes simétricas associadas com q_1 e q_2, respectivamente. A hipótese implica que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ é congruente a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, logo existe uma matriz inversível $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, com $\dim(A) = \dim(q)$ e $\dim(D) = \dim(q_1) = \dim(q_2)$, tal que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix} &= E^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} E \\ &= \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_2C & M_2D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^tM_2C & C^tM_2D \\ D^tM_2C & D^tM_2D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, $M_1 = D^tM_2D$. Como M_1 é não singular, D também é não singular, e portanto, M_1 e M_2 são congruentes. Isso nos dá $q_1 \cong q_2$.

Caso 2. A forma q é totalmente isotrópica. Para isso, diagonalize q_1 eq_2, e assuma que q_1 tem exatamente r zeros na diagonalização, e que q_2 tem pelo menos r zeros. Reescrevendo as hipóteses, temos

$$q \perp r\langle 0\rangle \perp q_1' \cong q \perp r\langle 0\rangle \perp q_2'.$$

Como $q \perp r\langle 0\rangle$ é totalmente isotrópico e q_1' é regular, o Caso 1 implica que $q_1' \cong q_2'$. Adicionando os r termos iguais a $\langle 0\rangle$, concluímos que $q_1 \cong q_2$.

Caso 3. Caso geral. Sejam as diagonalizações $q \cong \langle a_1, ..., a_n\rangle$, $q_1 \cong \langle b_1, ..., b_k\rangle$ e $q_2 \cong \langle c_1, ..., c_k\rangle$. Como

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle \perp \langle b_1, ..., b_k\rangle \cong \langle a_1\rangle \perp (\langle a_2, ..., a_n\rangle \perp \langle b_1, ..., b_k\rangle),$$

através de um argumento de indução em n, podemos reduzir ao caso $n = 1$. Isto é, $q = \langle a_1 \rangle$. O caso em que q e q_1 (ou q_2) são totalmente isotrópicas já está coberto no Caso 2, assim tomando reordenamentos podemos assumir que $q = \langle a_1 \rangle$, com $a_1 \neq 0$. Feito tudo isso, a hipótese nos dá: $\langle a_1 \rangle \perp q_1 \cong \langle a_1 \rangle \perp q_2$. Sejam $p_1 = \langle a_1 \rangle \perp q_1$ e $p_2 = \langle a_1 \rangle \perp q_2$ e podemos assumir que as formas quadráticas p_1 e p_2 estão definidas sobre o mesmo espaço vetorial V e que existe um automorfismo linear $\sigma : V \to V$ que testemunha a isometria $(V, p_1) \cong (V, p_2)$. Como $a_1 \neq 0$, existem x_1 e x_2, ambos em V tais que

$$p_1(x_1) = p_2(\sigma(x_1)) = p_2(x_2) = a_1 \neq 0,$$

uma vez que $a_1 \in D(p_1) = D(p_2)$. Como $a_1 \neq 0$, os subespaços de V, $S_1 = F.x_1$ e $S_2 = F.x_2$ são regulares, e combinando a Proposição 3.33 com o Corolário 3.18(a), concluímos que existe uma isometria $\tau \in O(V, p_2)$ tal que $\tau(\sigma(x_1)) = x_2$ e, assim, encontramos o isomorfismo

$$\tau\restriction : (F.\sigma(x_1))^{\perp} \overset{\cong}{\to} (F.x_2)^{\perp} \text{ com } q_2 = S_2^{\perp} = (F.x_2)^{\perp} \text{ e } q_1 = S_1^{\perp} \overset{\sigma}{\cong} (F.\sigma(x_1))^{\perp}.$$

Portanto $q_1 \cong q_2$. Isto encerra a demonstração.

Finalmente, obtemos a nossa tão desejada decomposição:

Teorema 3.35 (Decomposição de Witt)**.** Todo espaço quadrático (V, q) se decompõe em uma soma ortogonal

$$(V_t, q_t) \perp (V_h, q_h) \perp (V_a, q_a),$$

onde V_t é totalmente isotrópico, V_h é hiperbólico (ou zero), e V_a é anisotrópico (ou zero). Além disso, as classes de isometria de V_t, V_h e V_a são unicamente determinadas.

Demonstração. Para a existência, tomemos qualquer subespaço V_0 tal que $V = (\text{rad}V) \oplus V_0 = (\text{rad}V) \perp V_0$. Então $V_t = \text{rad}V$ é totalmente isotrópico, e V_0 é regular. Se V_0 for isotrópico, podemos escrever $V_0 = H_1 \perp V_1$ (pelo Teorema 3.24), onde $H_1 \cong \mathbb{H}$. Se V_1 for isotrópico, escrevemos $V_1 = H_2 \perp V_2$, onde $H_2 \cong \mathbb{H}$. Após um número finito de etapas (pois $\dim(V_n) < \dim(V_{n-1})$) obtemos uma decomposição

$$V_0 = (H_1 \perp ... \perp H_r) \perp V_a, \text{ com } r \geq 0,$$

onde $H_1 \perp ... \perp H_r = V_h$ é hiperbólico (ou zero) e V_a é anisotrópico. Isso prova a existência.

Para a unicidade, suponhamos que V tem alguma outra decomposição de Witt, digamos $V = V'_t \perp V'_h \perp V'_a$. Como V'_t é totalmente isotrópico e o espaço vetorial $V'_h \perp V'_a$ é

regular, temos
$$\text{rad}V = (\text{rad}V'_t) \perp \text{rad}(V'_h \perp V'_a) = V'_t,$$

logo $V_t \cong V'_t$. Pelo cancelamento de Witt 3.34, agora temos $V_h \perp V_a \cong V'_h \perp V'_a$. Escrevamos $V_h \cong m \cdot \mathbb{H}$ e $V'_h \cong m' \cdot \mathbb{H}$. Cancelando $\mathbb{H}$ um a um, concluímos que $m = m'$, pois ambos V_a e V'_a, são anisotrópicos. Após cancelar todos os m planos hiperbólicos, obtemos $V_a \cong V'_a$ completando a prova.

"...com o teorema da Decomposição de Witt, posso dizer que vocês têm informação suficiente para o jogo começar" disse o velho, *"mas eu acho importante acrescentar só mais alguns detalhes..."*

Foi nesse momento que Oxalá fez com que dois rivais tivessem um momento único de concordância. Ogum, Xangô e Exú se entreolharam e "disseram com os olhos": *"Isso não acaba nunca!"*

Na verdade para nós, os pré-requisitos acabaram (porém não sei dizer quanto tempo eles continuaram ouvindo o monólogo). Resta apenas uma observação: em situações práticas, considerar uma forma anisotrópica (diagonal) genérica de dimensão n pode nos trazer certos problemas com o "tamanho" deste dado n. Em outras palavras, não queremos fazer muitos cálculos com formas de dimensão alta. Na verdade, queremos reduzir esse "tamanho" o máximo possível. Este é o conteúdo dos próximos dois teoremas que citaremos (a demonstração destes resultados pode ser adaptada usando a teoria dos grupos especiais desenvolvida por M. Dickmann e F. Miraglia em [10]).

Teorema 3.36 (Descrição indutiva da Isometria)**.** Sejam $n \geq 3$ e $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \dot{F}$. Então, temos $\langle a_1, ..., a_n\rangle \cong \langle b_1, ..., b_n\rangle$ se e somente se existirem $a, b, c_3, ..., c_n \in \dot{F}$ tais que

$$\langle a_2, ..., a_n\rangle \cong \langle a, c_3, ..., c_n\rangle,\ \langle b_2, ..., b_n\rangle \cong \langle b, c_3, ..., c_n\rangle \text{ e } \langle a_1, a\rangle \cong \langle b_1, b\rangle.$$

Teorema 3.37 (Descrição indutiva da Representação)**.** Se σ e τ são formas regulares, então
$$D(\sigma \perp \tau) = \bigcup\{D(\langle s, t\rangle) : s \in D(\sigma),\, t \in D(\tau)\}.$$

Em particular, se $a \in \dot{F}$,

$$D(\langle a\rangle \perp \tau) = \bigcup\{D(\langle a, t\rangle) : t \in D(\tau)\}.$$

"Com isso, a conclusão a que eu cheguei é que com as formas regulares binárias e um pouco de ousadia, você pode construir todas as outras! Vamos começar o jogo agora?"

Ao falar isso, Oxalá percebeu que os três estavam dormindo! Com um sorriso, também ele decidiu tirar um cochilo.

"E pensar que ninguém consegue lembrar o começo da briga desses dois! Ao menos serviu para eu expor a minha teoria" pensou ele com satisfação.

4 O Jogo quadrático

"Todos acordados?" Perguntou Oxalá logo cedo no dia seguinte.

"Sim!" Responderam os três, com um certo constrangimento por terem sucumbido ao sono na explicação.

"Pois vamos ao jogo!"

Esse é outro momento dramático, de modo que até irei separar a explicação dele sobre o jogo.

$*$ $*$ $*$ O Jogo Quadrático $*$ $*$ $*$

"As regras são bem simples: primeiro, eu escolho um corpo de característica diferente de 2. Em seguida, Exú escolhe um subconjunto não-vazio dos inversíveis desse corpo. Daí o jogo começa: os participantes são Ogum e Xangô, começando por Ogum, e uma rodada consiste em falar um elemento inversível do corpo. Assim, na n-ésima rodada, teremos uma sequência de comprimento n formada por elementos não nulos do corpo. Ogum ganha se, na sua rodada, a parte anisotrópica da forma constituída por estes n-elementos representar todos os elementos do complementar do conjunto escolhido por Exú. Por outro lado, Xangô ganha se, na sua rodada a parte anisotrópica da forma constituída por estes n-elementos representar todos os elementos do conjunto escolhido por Exú. Se em alguma das rodadas a forma obtida tiver sua parte anisotrópica equivalente à forma nula, então a partida é considerada empatada e iniciamos uma outra partida, eu escolhendo um outro corpo (ou mantendo o mesmo), Exú escolhendo um outro subconjunto dos inversíveis (ou mantendo o mesmo), e alternando a ordem de quem começa."

"Uma última regra: Exú, sendo o senhor dos caminhos, terá total liberdade de escolher o subconjunto que quiser. Apenas intervirei se porventura o subconjunto escolhido

favorecer algum dos jogadores."

$*$ $*$ $*$

Claro que os três participantes do jogo ficaram estarrecidos com essa explicação, e foi necessário que ela fosse repetida algumas vezes até que o jogo de fato começasse. De fato, foi uma explicação no mínimo intensa. Mas vamos dar um desconto para Oxalá: eles estão discutindo formas quadráticas apenas oralmente, enquanto que nós temos toda a simbologia do século XXI à nossa disposição.

Assim, vamos "decifrar" as instruções de Oxalá, descrevendo o que seria a primeira partida. O jogo começa com Oxalá escolhendo um corpo F. Em seguinda, Exú escolhe um subconjunto não vazio $A \subseteq \dot{F}$. Daí, na primeira rodada Ogum escolhe um elemento $a_1 \in \dot{F}$. Na rodada seguinte, Xangô escolhe um elemento $b_1 \in \dot{F}$, e assim sucessivamente. Assim, na rodada $2n$, teremos uma sequência de elementos $a_1, b_1, ..., a_n, b_n \in \dot{F}$. A fim de facilitar as nossas análises posteriores, vamos denotar as formas das rodadas pares e ímpares, respectivamente, por

$$\varphi_n := \langle a_1, b_1, ..., a_n, b_n \rangle$$
$$\psi_n := \langle a_1, b_1, ..., a_n, b_n, a_{n+1} \rangle.$$

Nestes termos, na primeira partida temos as três possíveis situações a seguir.

1. Na rodada (ímpar) $2n+1$, temos $\dot{F} \setminus A \subseteq D(\psi_n)$, e, neste caso, Ogum ganha.

2. Na rodada (par) $2n$, temos $A \subseteq D(\varphi_n)$, e neste caso Xangô ganha.

3. Se em alguma rodada, que por ser par ou ímpar, ocorre $(\varphi_m)_a \cong 0$ ou $(\psi_m)_a \cong 0$ (aqui $(\varphi_m)_a$ denota a parte anisotrópica da forma), vemos que neste caso a partida empata. Vamos então para uma nova partida, com a ordem de quem começa se alternando: Xangô será o participante das rodadas ímpares e Ogum o participante das rodadas pares.

Feita a descrição do jogo, convidamos o leitor a analisar as partidas que se sucederam:

$*$ $*$ $*$ I - Primeira Partida $*$ $*$ $*$

"Para a primeira partida, o corpo escolhido é $\mathbb{Q}$," disse Oxalá.

"Escolho o conjunto $A = \{5, 6, 7\}$," disse Exú.

"Hei! Você está favorecendo Xangô!" disse Ogum.

"A escolha é válida, podem começar!" disse Oxalá.

De fato, a escolha favorece Xangô, que poderia ganhar o jogo rapidamente. Contudo essa partida empatou. Você poderia explicar o porquê?

$*\quad*\quad*$

$*\quad*\quad*$ II - Jogos que mal começariam... $*\quad*\quad*$

Antes de começar a segunda partida, Xangô e Exú rapidamente perceberam dois fatos importantes:

"Curioso... qualquer partida pode ser empatada em apenas duas rodadas!" disse Xangô.

"Claro, vocês podem fazer isso. Mas desse jeito nunca irão voltar para casa!" disse Oxalá.

"Também faz todo o sentido que o jogador da rodada ímpar tenha que representar os elementos do complementar da minha escolha..." salientou Exú.

"Sim! Se fosse ao contrário, muitas partidas terminariam logo na primeira rodada!" completou Oxalá.

"Por que isso acontece?"

$*\quad*\quad*$

$*\quad*\quad*$ III - Segunda Partida $*\quad*\quad*$

"Para a segunda partida, continuo com $\mathbb{Q}$. Não se esqueçam que trocaremos a ordem de início, e, portanto, Xangô começará o jogo."

"Eu escolho $A = \{4, 5, 6\}$" disse Exú.

"Hei! Você está favorecendo Xangô de novo!" disse Ogum.

"Não! Essa escolha também é válida" disse Oxalá.

Após alguns momentos de reflexão, Ogum percebeu que na verdade, essa escolha o favorecia!. Claro que Xangô rapidamente percebeu a mesma coisa, e o jogo empatou *novamente. Por quê?*

$*\quad*\quad*$

$*\quad*\quad*$ IV - Exú enxerga um caminho $*\quad*\quad*$

Exú percebeu que enquanto Oxalá continuasse escolhendo $\mathbb{Q}$, se A for um subconjunto de inteiros positivos, então com um pouco de sorte seria possível que o jogador da rodada par vencesse. Por quê?

$*\quad*\quad*$

$*\quad*\quad*$ V - Aquilo que quase foi a Terceira Partida $*\quad*\quad*$

"Para a terceira partida, escolho $\mathbb{C}$" disse Oxalá, também ciente do mesmo que Exú concluiu com relação à $\mathbb{Q}$.

"Pai, esse corpo você não pode escolher!" disseram os três.

De fato, esse é um corpo onde todas as escolhas de Exú são inválidas. Por quê?

$*\quad*\quad*$

$*\quad*\quad*$ VI - A Terceira Partida $*\quad*\quad*$

"Como vocês já devem ter percebido, a tarefa de calcular $D(\varphi)$ pode ser arbitrariamente complicada," disse Oxalá. "Para essa partida, o corpo que vou escolher é $\mathbb{R}$. Aqui vocês poderão usar o fato de que se φ é uma forma anisotrópica sobre $\mathbb{R}$ e $\dim(\varphi) = n$, então temos as possibilidades $\varphi \cong 0$, $\varphi \cong n\langle 1\rangle$ ou $\varphi \cong n\langle -1\rangle$, dependendo se $n = 0$ ou se $n \geq 1$".

"Eu escolho $A = \mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$", disse Exú.

E começou a partida. Após algumas jogadas, eles perceberam que seria perda de tempo continuar essa partida, de modo que chegaram a um acordo para que um empate fosse forçado. Por quê?

$*\quad*\quad*$

* * * VII - Oxalá generaliza a ideia de Exú * * *

A terceira partida durou tempo suficiente para que Oxalá pensasse sobre o que Exú tinha percebido.

"Ora, essa ideia de que com quatro quadrados é possível representar qualquer inteiro positivo pode ser generalizada! Seja F um corpo que admite uma única ordenação e n o menor número tal que qualquer elemento positivo se escreve como uma soma de no máximo n quadrados. Então, se tal n é finito, existe uma estratégia vencedora para qualquer conjunto de elementos positivos A!" e Oxalá ficou maravilhado com a sua descoberta.

Por que podemos concluir isso?

* * *

* * * VIII - Uma conclusão inusitada * * *

"Para a quarta partida, vou escolher..."

"Agô, meu Pai!", interrompeu Ogum, "percebi que na maioria das partidas, se os dois participantes quiserem vencer, então a partida não vai acabar nunca!".

"Ou então só acaba quando os dois decidem empatar o jogo" disse Xangô.

"Ou se um de vocês decidirem perder o jogo" ironizou Exú.

"Pois bem", disse o velho Oxalá, "é isso que acontece quando vocês persistem em uma briga sem saber como ela começou. Desse jeito, como vocês vão saber quando ela vai parar?"

"Verdade..." responderam os três.

"Nesse caso, que Ogum fique com a vitória" disse Xangô.

"De maneira nenhuma! Eu ganhei quase todas as vezes, podemos dizer que desta vez você venceu!" retrucou Ogum.

"Eu venci e vocês dois perderam!" replicou Exú.

"Não é melhor todo mundo empatar e vocês irem embora em paz para as suas casas?"

disse Oxalá, colocando um ponto final na disputa.

* * *

5 Soluções

Seguem as soluções dos problemas propostos na seção anterior:

I - Note que

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$$
$$6 = 4 + 1 + 1 = 2^2 + 1 + 1,$$
$$7 = 4 + 1 + 1 + 1 = 2^2 + 1 + 1 + 1.$$

Assim, para que Xangô ganhasse bastaria que a sequência de jogadas fosse, por exemplo, $(1, 1, 1, 1)$ (daí $\{5, 6, 7\} \subseteq D(\langle 1, 1, 1, 1\rangle))$ ou $(2, 1, 1, 1)$ (daí $\{5, 6, 7\} \subseteq D(\langle 2, 1, 1, 1\rangle))$. Percebendo isso, Ogum fez de tudo para que a partida empatasse. Uma possível sequência que empata a partida é

$$(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1).$$

Lembremos que estamos sempre lidando com a parte anisotrópica da forma!

II - Para empatar a partida na segunda rodada basta que as escolhas sejam $(a, -a)$ (ou $(-a, a)$ para algum $a \in \dot{F}$. Se o jogador da rodada ímpar tivesse que representar os elementos do conjunto A escolhido por Exú, e se $A \subseteq \dot{F}^2$, por exemplo, então $A \subseteq D(\langle 1\rangle)$.

III - Claro, temos

$$4 = 2^2,$$
$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$$
$$6 = 4 + 1 + 1 = 2^2 + 1 + 1.$$

Claro que, por exemplo, $\{4, 5, 6\} \subseteq D(\langle 1, 1, 1\rangle)$. Mas o jogador da rodada ímpar (que desta vez é Xangô) deve representar $\dot{\mathbb{Q}} \setminus A$! Assim, para que Ogum ganhasse bastaria que a sequência de jogadas fosse, por exemplo, $(1, 1, -1, 1, 1, 1)$.

IV - Há um famoso teorema de Lagrange, que diz que todo inteiro positivo é soma de quatro quadrados. Daí bastaria que houvesse, por exemplo, quatro 1's em sequência para que o jogador da rodada par vencesse.

V - Como todo número complexo admite raiz quadrada, qualquer que seja $A \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ temos $A \subseteq D(\langle z \rangle)$ para todo $z \in \dot{\mathbb{C}}$, e portanto o jogo acaba logo na primeira rodada.

VI - Eles perceberam que após "descascarem" a parte hiperbólica da forma obtida, a forma anisotrópica restante seria $\varphi = \langle 1, 1, ..., 1 \rangle$ ou $\psi = \langle -1, -1, ..., -1 \rangle$. Ora, φ representa apenas números positivos e ψ representa apenas números negativos, de modo que nunca teremos $\mathbb{Z} \subseteq D(\varphi)$ ou $\mathbb{Z} \subseteq D(\psi)$. O resultado citado por Oxalá é conhecido como "Princípio de Inércia de Sylvester", e pode ser consultado no capítulo 2 do livro [1].

VII - Seja F um corpo que admite uma única ordem (linear, compatível com +, $\cdot$). Então P, o conjunto dos positivos coincide com $\sum F^2 = \{\sum_{i=1}^n x_i^2$: para algum $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in F\}$ (isto decorre da teoria de Artin-Schreier). De acordo com o raciocínio de Oxalá, n seria o menor número tal que

$$P = \sum_{j=1}^{n} F^2 := \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 : x_i \in F \text{ para todo } i = 1, ..., n\}.$$

Por exemplo, como todo número real positivo é um quadrado, para $\mathbb{R}$ esse n é igual a 1. Para $\mathbb{Q}$, esse número é 4. O menor $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que toda soma de quadrados é uma soma de no máximo n quadrados é conhecido como **número de Pitágoras de um corpo**. Note que $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenável e seu número de Pitágoras é 1. Para mais detalhes sobre o tema, recomendo consultar [1].

Voltando ao jogo, se F tem número de Pitágoras $n \in \mathbb{N}$, então $P \subseteq D(n\langle 1 \rangle)$, e daí a sequência com n entradas iguais a 1,a upla $(1, ..., 1)$ dará a vitória para o jogador da jogada n, a depender de ocorrer $A \subseteq P$ ou $\dot{F} \setminus A \subseteq P$.

VIII - Talvez por conta da competitividade de Ogum e Xangô, ou pelo fato de Exú (como ele mesmo disse) adorar pregar peças nestes dois, eles demoraram algumas partidas para perceber que sequências do tipo

$$(a, b, -b, b, -b, b, -b, ...)$$

ou ainda

$$(a, b_1, -b_1, b_2, -b_2, ..., b_n, -b_n, ...)$$

prolongam o jogo indefinidamente.

6 Algumas Considerações Finais

Não poderia terminar essa anedota sem fazer algumas considerações:

i - O livro [1] apresenta uma excelente abordagem para a teoria algébrica de modo geral. O autor consegue fazer um panorama vasto das aplicações e questões mais relevantes da teoria, de modo que esta indicação não poderia faltar. Para uma abordagem detalhada do tripé ordens – valorações – formas quadráticas, pode-se consultar o livro [11], do mesmo autor. Para uma leitura complementar à dos livros do Lam (inclusive, essa foi uma excelente sugestão do referee), indicamos o livro [12].

ii - A Conjectura de Milnor, descrita em [13] também é de grande beleza e relevância para a teoria de formas quadráticas como um todo.

iii - Não poderíamos deixar de frisar que a matemática desenvolvida por brasileiros foi (e é) importante para o desenvolvimento e expansão das teorias algébrica e abstrata de formas quadráticas. Do ponto de vista da teoria algébrica de formas quadráticas, temos o artigo [5], onde J. Minác e o brasileiro M. Spira estabelecem a relação precisa entre a teoria de Galois e o anel de Witt de um corpo. Para as teorias abstratas, temos o artigo [3], onde os professores M. Dickmann e F. Miraglia solucionam a Conjectura de Marshall e o artigo [4] onde eles resolvem a Conjectura de Lam, ambos usando a teoria dos grupos especiais (também desenvolvida por eles).

iv - Grupos especiais são uma teoria interessante por si. Para mais detalhes, consulte os livros [10], [14]. Não poderia deixar de citar o artigo [15], onde é desenvolvida uma K-teoria para os grupos especiais, com propriedades funtoriais privilegiadas em relação à K-teoria dos corpos.

v - Formas quadráticas não se restringem a coeficientes em corpos. Para uma abordagem generalizada de formas bilineares em anéis, pode-se consultar [16]. Para uma teoria geral de formas quadráticas sobre anéis que ainda tem a vantagem de ser descrita em linguagem da lógica de primeira ordem, consulte [17].

vi - Para aqueles que estão interessados em teorias abstratas de formas quadráticas, minha dissertação de mestrado foi elaborada numa tentativa de compilar os resultados fundamentais para aqueles que querem iniciar a pesquisa na área. Por ora, consulte [18]. Estamos trabalhando em uma tradução deste trabalho para nosso idioma materno.

vii - Sobre o jogo quadrático, por motivos didáticos, escolhemos apenas os corpos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. O jogo faz sentido, e certamente seria muito interessante de se pensar no contexto de outros corpos (com outros subconjuntos escolhidos por Exú). Mas para isso, seria necessário um volume muito maior da teoria de formas quadráticas, o que não cabe no escopo deste texto introdutório.

viii - Ainda sobre o jogo quadrático, como uma forma anisotrópica de uma forma só é zero se a forma tiver dimensão par, se o jogador da rodada par não quiser, o jogo se prolonga indefinidamente. Ou seja, em certo sentido, o jogador par tem vantagem no que concerne ao empate.

ix - Existem muitos outros Orixás que não fizeram parte dessa história por motivos variados. A leitura do livro [2] além de divertida, nos permite conhecer outros itans (não matemáticos).

x - Fomos fortemente inspirados pelos contos e anedotas propostos por R. Smullyan em [6] e R. Prandi em [2]. Acreditamos que essa inspiração pode ser frutífera na elaboração de outros jogos matemáticos neste estilo anedótico.

No mais, sempre é bom lembrar que intolerância religiosa é crime, e que as pessoas do Candomblé querem apenas cultuar seus deuses em paz.

Um grande abraço e saúde a todas e todos!

Referências

[1] LAM, T.-Y. *Introduction to quadratic forms over fields*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2005. v. 67.

[2] PRANDI, R. *Mitologia dos orixás*. [S.l.]: Companhia das Letras, 2020.

[3] DICKMANN, M.; MIRAGLIA, F. On quadratic forms whose total signature is zero mod 2nsolution to a problem of M. Marshall. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 133, n. 2, p. 243–278, 1998.

[4] DICKMANN, M.; MIRAGLIA, F. Lam's conjecture. In: SPRINGER-VERLAG 175 FIFTH AVE, NEW YORK, NY 10010 USA. *Algebra Colloquium*. [S.l.], 2003. v. 10, n. 2, p. 149–176.

[5] MINÁC, J.; SPIRA, M. Witt rings and Galois groups. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 35–60, 1996.

[6] SMULLYAN, R. *A Dama ou o Tigre?* [S.l.]: Zahar, 2004.

[7] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear algebra. 1971*. [S.l.]: Englewood Cliffs, New Jersey.

[8] SANTOS, D. F. *Elementos da teoria algébrica das formas quadráticas e de seus anéis graduados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015.

[9] WITT, E. Theorie der quadratischen formen in beliebigen körpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, De Gruyter, v. 1937, n. 176, p. 31–44, 1937.

[10] DICKMANN, M.; MIRAGLIA, F. *Special groups: Boolean-theoretic methods in the theory of quadratic forms*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2000.

[11] LAM, T.-Y. *Orderings, valuations and quadratic forms*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1983. v. 52.

[12] ELMAN, R. S.; KARPENKO, N.; MERKURJEV, A. *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2008. v. 56.

[13] MILNOR, J. Algebraic k-theory and quadratic forms. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 9, n. 4, p. 318–344, 1970.

[14] DICKMANN, M.; MIRAGLIA, F. *Faithfully quadratic rings*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2015. v. 238.

[15] DICKMANN, M.; MIRAGLIA, F. Algebraic k-theory of special groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Elsevier, v. 204, n. 1, p. 195–234, 2006.

[16] KNUS, M.-A. *Quadratic and Hermitian forms over rings*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1991. v. 294. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, v. 294).

[17] DICKMANN, M.; PETROVICH, A. Real semigroups and abstract real spectra. i. *Contemporary Mathematics*, Providence, RI: American Mathematical Society, v. 344, p. 99–120, 2004.

[18] ROBERTO, K. M. d. A. *Multirings and The Chamber of Secrets: relationships between abstract theories of quadratic forms*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2019.