

**CINCO PROBLEMAS APLICADOS DE CÁLCULO  
DIFERENCIAL E INTEGRAL**

**FÁBIO JOSÉ BERTOLOTO<sup>1</sup>  
HEITOR DE ALMEIDA SENE<sup>2</sup>**

---

<sup>1</sup>FAMAT/UFU - Uberlândia/MG, bertoloto@famat.ufu.br

<sup>2</sup>FEMEC/UFU - Uberlândia/MG, heitorsene@gmail.com

**Resumo:** Os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral estão amplamente presentes em situações cotidianas, e neste artigo serão estudados cinco casos bastante interessantes: Onde um Piloto Deve Iniciar a sua Descida, Onde Sentar-se no Cinema, Rotação em Torno de uma Reta Inclinada, Xícaras de Café Complementares, Tudo que Sobee Eventualmente tem que Descer.

**Abstract:** The concepts of Calculus are largely applied in daily situations, in this article will be studied five very interesting cases: Where a Pilot Must Start his Landing, Where to Sit on a Movie Theater, Rotation Around an Inclined Line, Complementary Coffee Mugs, What Goes Up Must Come Down Eventually.

**Palavras Chave:** Problemas aplicados, Cálculo Diferencial e Integral.

# 1 Introdução

Neste trabalho, temos por inspiração alguns projetos aplicados propostos em Stewart [3] e [4]. São eles:

- 1) *Onde um Piloto Deve Iniciar a sua Descida*: analisar a trajetória descrita por um avião e observar, sob certas condições, a que distância do local de pouso o piloto deve começar a descer. Encontra-se proposto em Stewart [3, pag. 191].
- 2) *Onde Sentar-se no Cinema*: Impondo algumas condições sobre uma sala de cinema, analisar qual o melhor lugar para se sentar de maneira que o ângulo de visão seja o melhor possível. Um fato interessante aqui é que o solo não é considerado horizontal. Encontra-se proposto em Stewart [3, pag. 420].
- 3) *Rotação em Torno de uma Reta Inclinada*: Em geral, estamos acostumados a calcular volumes, via integrais, de sólidos obtidos pela rotação de um gráfico em torno de uma reta horizontal. Também, estamos acostumados a calcular áreas entre o gráfico de uma função e uma reta horizontal. Agora, demonstraremos a expressão da área entre o gráfico de uma função  $f$  e uma reta inclinada. Também, calcularemos o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de  $f$  em torno da mesma reta. Encontra-se proposto em Stewart [3, pag. 509].
- 4) *Xícaras de Café Complementares*: Suponha que seja possível escolher entre duas xícaras de café de superfícies curvas. Uma se curva para fora e outra para dentro de maneira que se encaixam perfeitamente e os volumes destas xícaras são obtidos pela rotação de um gráfico em torno de retas verticais distintas. Neste tópico, pretende-se analisar e comparar os volumes das xícaras conforme o eixo escolhido e a função considerada. Encontra-se proposto em Stewart [3, pag. 520].
- 5) *Tudo que Sobee Eventualmente tem que Descer*. Suponha que uma partícula é lançada verticalmente para cima a partir de uma velocidade inicial e sujeita apenas às forças gravitacional e de resistência do ar. Sob estas condições, daremos uma resposta a pergunta: O que é mais rápido para a partícula, atingir a sua altura máxima ou retornar ao ponto de partida a partir de sua altura máxima? Este projeto encontra-se proposto em Stewart [4, pag. 559].

## 2 Materiais e Métodos

Para realizar este trabalho, fizemos uso de alguns conceitos e técnicas de Cálculo Integral e Diferencial, Equações Diferenciais Ordinárias e também de conteúdos da Engenharia tais como a Dinâmica e Programação Aplicada.

## 3 Onde um Piloto Deve Iniciar sua Descida

Analisaremos, de maneira simplificada, o comportamento da trajetória de um avião enquanto está aterrissando considerando medidas de altura e distância para pouso especificadas.

### 3.1 O Problema

Neste problema, consideramos que a trajetória percorrida pela aeronave é descrita por um polinômio  $y = P(x)$ . O piloto deve manter a velocidade horizontal constante e igual a  $v$  em toda a descida. A descida irá iniciar-se a partir de uma altura inicial  $h$  e uma distância horizontal  $l$  do ponto de pouso, como mostra a Figura 1.

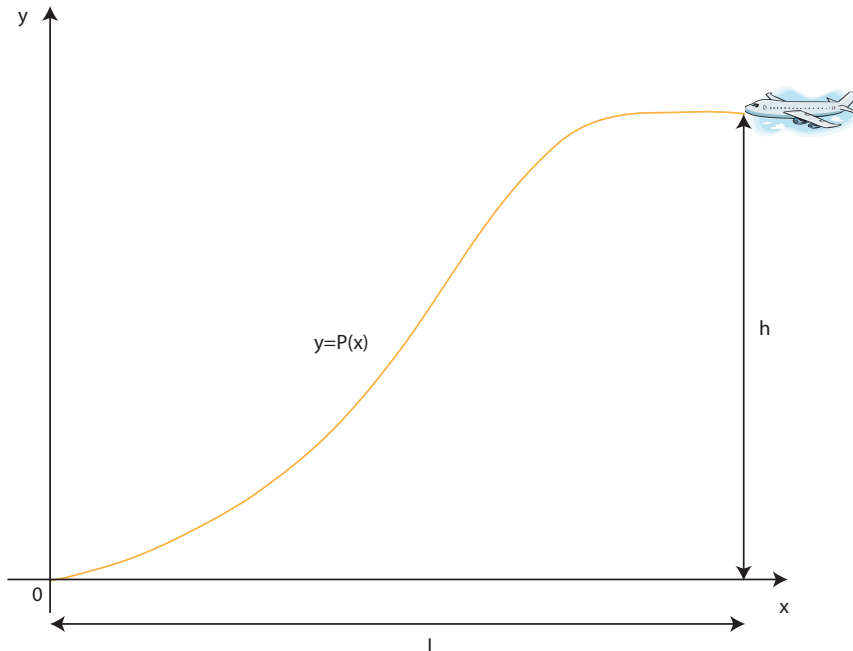


Figura 1: Visualização do Problema

A melhor trajetória é aquela que proporciona uma aterrissagem horizontal com aceleração vertical inferior a um valor de referência supostamente conhecido  $k < g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Consideraremos que esta trajetória é descrita por um polinômio do terceiro grau e iremos encontrar condições que devam ser satisfeitas pelos coeficientes do polinômio.

## 3.2 Resolução

### 3.2.1 Encontrando o Polinômio $P(x)$

Observando a Figura 1 extraímos que  $P(0) = 0$  e  $P(l) = h$ . Porém, sabemos que a derivada de um polinômio é numericamente igual a tangente do ângulo da reta tangente à curva (gráfico de  $P$ ), em um determinado ponto, com o eixo horizontal. Com isso em mente veremos que a reta tangente ao polinômio  $P(x)$  da Figura 1 nos pontos  $x = 0$  e  $x = l$  serão retas paralelas ao eixo  $x$ . Portanto seu ângulo será zero e teremos que  $P'(0) = 0$  e  $P'(l) = 0$ .

Para resolvermos este problema, queremos encontrar um polinômio cúbico  $P(x)$  que descreve a trajetória do avião. Sendo este polinômio cúbico, expressaremos-o sob a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (1)$$

Desta maneira, para encontrarmos o polinômio  $P(x)$  é necessário encontrar os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  que satisfaçam as condições iniciais.

Se derivarmos (1) em relação a  $x$  teremos

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c. \quad (2)$$

Portanto, se fizermos  $x = 0$  nas equações (1) e (2) obteremos:

$$\begin{aligned} P(0) &= 0, \\ d &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P'(0) &= 0, \\ c &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (1) e (2) segue que:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 \quad (5)$$

$$\implies P'(x) = 3ax^2 + 2bx. \quad (6)$$

Fazendo  $x = l$  nas equações (5) e (6) obteremos:

$$\begin{aligned} P(l) &= h \\ \implies al^3 + bl^2 &= h; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P'(l) &= 0 \\ \implies 3al^2 + 2bl &= 0 \\ \implies a &= \frac{-2b}{3l}. \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7) segue que:

$$b = \frac{3h}{l^2}. \quad (9)$$

Finalmente se substituirmos (9) em (8) obteremos:

$$a = \frac{-2h}{l^3}. \quad (10)$$

Então o polinômio  $P(x)$  que foi encontrado é

$$P(x) = \frac{-2h}{l^3}x^3 + \frac{3h}{l^2}x^2. \quad (11)$$

### 3.2.2 Encontrando $k$

Uma vez que temos  $P(x)$  podemos fazer a derivada deste polinômio em relação ao tempo  $t$ . Apesar de não haver esta variável no polinômio, entendemos que a variável  $x$  é na verdade uma  $x(t)$ . Então fazendo a derivada de (11) em  $t$ :

$$\frac{dP(x)}{dt} = \frac{-2h}{l^3}3x^2\frac{dx}{dt} + \frac{3h}{l^2}2x\frac{dx}{dt}. \quad (12)$$

Mas sabemos que  $\frac{dx}{dt}$  é a variação da variável  $x$  no tempo, ou seja, é na verdade a velocidade horizontal. E como foi estabelecido que durante a descida o piloto deve manter a velocidade horizontal constante, temos que  $\frac{dx}{dt} = v$ . Dessa forma, (12) fica

$$\frac{dP(x)}{dt} = \frac{-2h}{l^3}3x^2v + \frac{3h}{l^2}2xv. \quad (13)$$

O polinômio  $P(x)$  determina a posição vertical  $y$  do avião em função da sua posição horizontal  $x$ . Portanto, se  $y = P(x)$ , a derivada segunda de  $P(x(t))$  em relação a  $t$  determina a aceleração vertical da aeronave. Sendo assim, derivando (13) em relação a  $t$ , lembrando que  $v$  é constante com relação ao tempo, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d^2P(x)}{dt^2} &= \frac{-12hv^2x}{l^3} + \frac{6hv^2}{l^2} \\ &= \frac{6hv^2}{l^2} \left( \frac{-2x}{l} + 1 \right) \\ &= \frac{6hv^2}{l^2} \left( \frac{l-2x}{l} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Como sabemos que o valor absoluto da componente vertical da aceleração do avião não deve exceder uma constante  $k$  podemos fazer

$$\left| \frac{d^2P(x)}{dt^2} \right| \leq k. \quad (15)$$

Substituindo (14) obtemos

$$\left| \frac{6hv^2}{l^2} \left( \frac{l-2x}{l} \right) \right| \leq k. \quad (16)$$

Porém, sabendo que a variável  $x$  é tal que  $x \in [0, l]$ , segue que

$$\frac{6hv^2}{l^2} \leq k. \quad (17)$$

Que é uma condição envolvendo os parâmetros  $h, v, l$  e a aceleração-limite de segurança  $k$ .

### 3.3 Conclusão

Obtivemos o polinômio que descreve a trajetória de descida da aeronave em função de  $h$  e  $l$  como mostra a equação 11, de forma que a trajetória ideal do avião é dependente somente dessas duas variáveis. A inequação  $\frac{6hv^2}{l^2} \leq k$ , junto com os parâmetros  $h, l, v$  (lidos através dos controles da aeronave, por exemplo) permitem ao piloto decidir entre uma aterrissagem segura ou insegura. Conhecidos  $h, v, l$  sabemos, pelo que foi demonstrado nos cálculos, que a aceleração vertical de descida será sempre menor do que a aceleração máxima de segurança  $k$ , desde que  $\frac{6hv^2}{l^2} \leq k$ .

## 4 Onde Sentar-se no Cinema

Ao longo dos anos o cinema vem se tornando um dos grandes locais de entretenimento da humanidade. Grandes salas são projetadas para garantir o máximo de conforto para as pessoas poderem assistir seus filmes com alta qualidade. Entretanto as salas são feitas para comportarem um grande número de pessoas e devido a isso um grande número de assentos são dispostos na mesma, causando muitas vezes dúvida de onde sentar-se.

### 4.1 O Problema

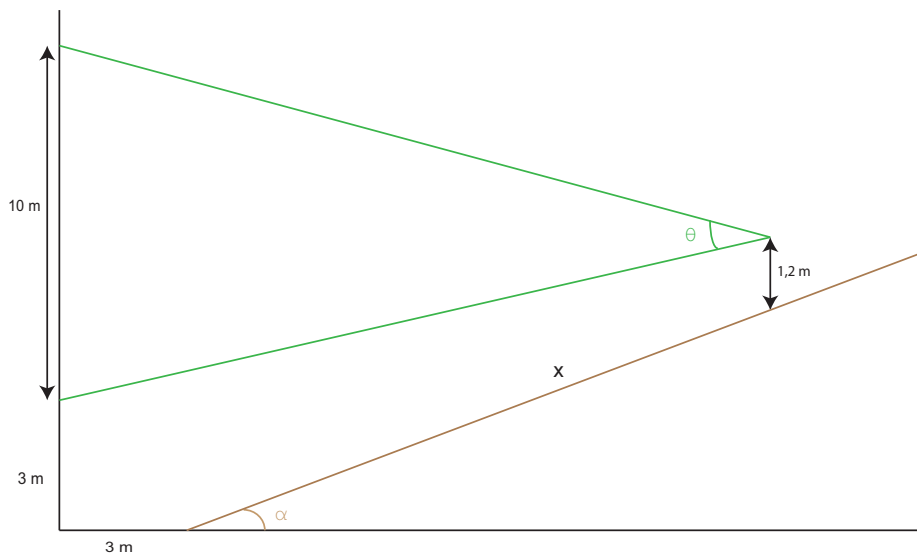


Figura 2: Visualização do Problema

Neste projeto iremos abordar o problema descrito acima em uma sala de



cinema hipotética. Nesta sala há uma tela de 10m de altura, posicionada a 3m do chão, conforme ilustra a Figura 2. As fileiras de poltronas estão dispostas em um piso inclinado de  $20^\circ$  em relação ao chão, e distam 1m entre si. A posição desejada pela pessoa é  $x$ , e como nesta sala há apenas 21 fileiras de poltronas, temos  $0 \leq x \leq 20$ , pois a primeira fileira situa-se no início da rampa, ou seja, em  $x = 0$ .

Consideraremos que o melhor lugar para se sentar é a fileira na qual o ângulo subtendido pela tela em seus olhos é o máximo, ou seja, procuramos um valor aproximado para  $x$  que maximize o ângulo de visão  $\theta$ . Admitiremos também que os olhos das pessoas estão a 1,2m de altura do solo.

## 4.2 Resolução

### 4.2.1 Encontrando a Equação de $\theta$

O ângulo de visão da pessoa no cinema será denotado por  $\theta$ . Vamos primeiro expressar esse ângulo, num contexto um pouco mais geral, em função de  $x$  e de um ângulo genérico  $\alpha$  qualquer que mede a inclinação entre o plano das cadeiras e o solo; em particular, o nosso problema inicial é o caso  $\alpha = 20^\circ$ . Observando a Figura 2 notamos que  $\theta$  está dentro de um triângulo. Podemos dividir este triângulo em 2 triângulos retângulos como mostra na Figura 3.

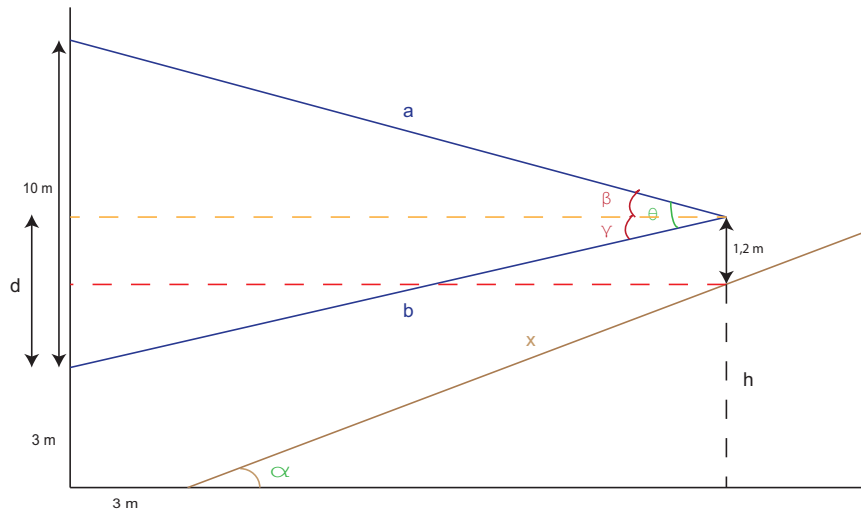


Figura 3: Divisão do Ângulo  $\theta$

Observando os dois triângulos retângulos da Figura 3 temos as seguintes identidades:

$$\theta = \beta + \gamma, \quad (18)$$

$$\cos\beta = \frac{3 + x \cos \alpha}{a}, \quad (19)$$

$$\cos\gamma = \frac{3 + x \cos \alpha}{b}, \quad (20)$$

$$\sin\beta = \frac{10 - d}{a}, \quad (21)$$

$$\sin\gamma = \frac{d}{b}. \quad (22)$$

Vemos também que a altura  $h$  mostrada na Figura 3 pode ser escrita como:

$$h = x \sin \alpha. \quad (23)$$

Com isso segue que:

$$\begin{aligned} 1,2 &= d - (h - 3) \\ &= d - x \sin \alpha + 3. \end{aligned}$$

E daí obtemos:

$$d = x \sin \alpha - 1,8. \quad (24)$$

Além disso, aplicando o Teorema de Pitágoras aos dois triângulos retângulos com lado comum  $a \cos \beta$ , conforme Figura 3, e em seguida substituindo (19) e (24) obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} a^2 &= (3 + x \cos \alpha)^2 + (10 - d)^2 \\ &= (3 + x \cos \alpha)^2 + (11,8 - x \sin \alpha)^2; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} b^2 &= (3 + x \cos \alpha)^2 + d^2 \\ &= (3 + x \cos \alpha)^2 + (x \sin \alpha - 1,8)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Substituindo (19),(20),(21) e (22) na equação do cosseno do arco duplo:

$$\cos\theta = \cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma,$$

obtemos que

$$\cos\theta = \frac{(3 + x\cos\alpha)^2 - 10d + d^2}{ab} \quad (27)$$

Se somarmos as equações (25) e (26) segue que:

$$\frac{a^2 + b^2 - 100}{2} = (3 + x\cos\alpha)^2 - 10d + d^2. \quad (28)$$

Finalmente se substituírmos (28) em (27) temos:

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}\right). \quad (29)$$

#### 4.2.2 Utilizando a Equação de $\theta$

Visto que encontramos uma função que descreve o ângulo de visão  $\theta$  em função do ângulo de inclinação  $\alpha$  e do deslocamento inclinado  $x$ , podemos desenhar o seu gráfico. Fixamos o valor de  $\alpha$  em  $20^\circ$  possuindo então uma função de apenas uma variável  $\theta = f(x)$ . Temos também que  $0 \leq x \leq 20$ . Utilizando o software MATLAB obteve-se o gráfico representado na Figura 4:

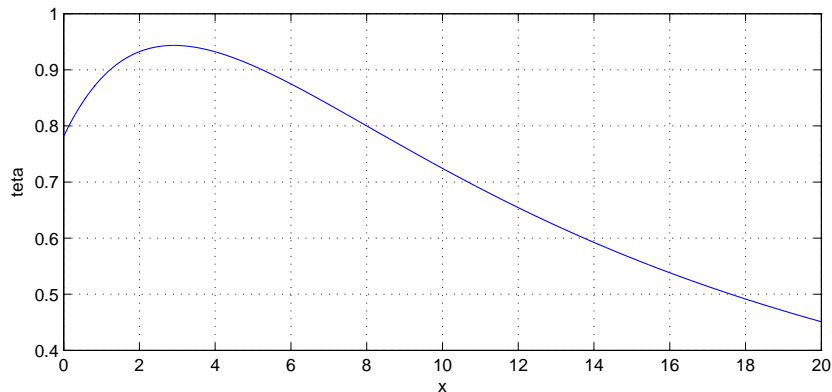


Figura 4: Gráfico de  $\theta$

A melhor posição para sentar-se será aquela em que o ângulo  $\theta$  seja máximo. Pelo gráfico dado na Figura 4 vemos que esta posição corresponde a um valor de  $x$  entre 2 e 3. Para encontramos este valor usaremos a derivada da função de  $\theta$ . Utilizando novamente o MATLAB derivamos a expressão em (29) obtendo uma função  $\frac{d\theta}{dx}$  cujo gráfico é mostrado na Figura 5.

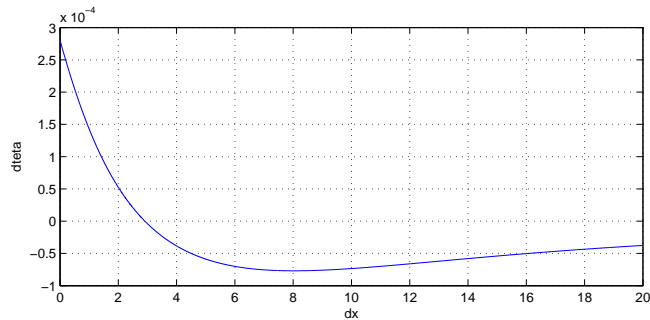


Figura 5: Gráfico de  $\frac{d\theta}{dx}$

A raiz da função  $\frac{d\theta}{dx}$  é dada pelo MATLAB e é  $x = 2,9134$ , confirmando o que observamos na Figura 3. Este é o valor de  $x$  que zera a função  $\frac{d\theta}{dx}$  e maximiza o ângulo de visão  $\theta$  e, portanto, o melhor local para se sentar neste cinema. Como neste local não é possível sentar, o mais próximo é  $x = 3$ , portanto na 4ª fileira de poltronas.

### 4.3 Conclusão

A melhor posição para se sentar na sala de cinema descrita no problema, é na 4ª fileira, pois é neste local que o ângulo de visão será o maior possível.

## 5 Aplicações da Integral para Eixos Inclinados

Nesta seção, temos por objetivo encontrar a área entre gráficos de funções e uma reta inclinada, bem como, o volume por rotação e a área da superfície dos sólidos gerados, quando consideramos eixos de rotação inclinados.

### 5.1 O Problema

Dada uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , costumamos, em cursos de Cálculo da graduação, encontrar a área da região  $\mathcal{R}$  compreendida entre o gráfico de  $f$

e o eixo- $x$  (eixo- $y$ ), ou entre o gráfico de  $f$  e um eixo paralelo ao eixo- $x$  (eixo- $y$ ). Também procuramos o volume do sólido gerado pela rotação da região  $\mathcal{R}$  em torno de um eixo paralelo ao eixo- $x$  (eixo- $y$ ), ou ainda a área da superfície do sólido gerado. Nesta seção, abordaremos o estudo de todos os problemas acima citados, porém, com uma diferença: não apenas consideraremos eixos paralelos ao eixo- $x$  (eixo- $y$ ), mas eixos inclinados quaisquer.

## 5.2 Resolução

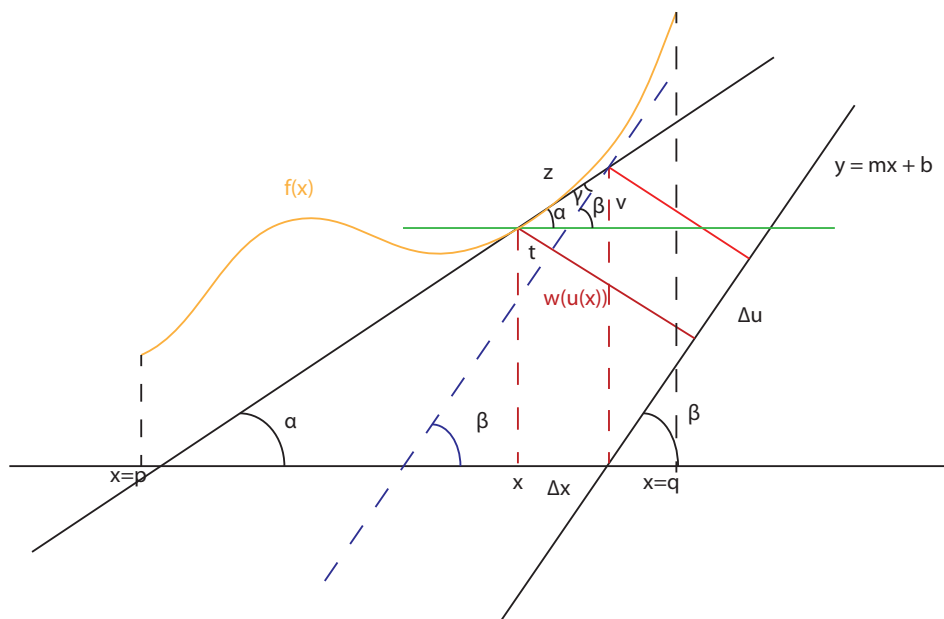


Figura 6: Visualização dos ângulos envolvidos no problema

Possuímos uma função  $y = f(x)$  e desejamos obter a área da região compreendida entre o gráfico de  $f$  e uma reta qualquer  $y = mx + b$ , para  $p \leq x \leq q$ . Se esta reta fosse paralela ao eixo  $x$ , bastaria que fizéssemos a integral desta função em relação a  $x$ . Porém, em se tratando de uma reta qualquer deveremos adotar outro procedimento.

### 5.2.1 Cálculo de $\Delta u$

Primeiramente precisamos encontrar uma forma de associar  $\Delta u$  com  $\Delta x$ , sendo que  $\Delta x$  é a variação realizada na direção do eixo  $x$  e  $\Delta u$  a variação realizada na direção da reta dada. Para isso consideremos a Figura 6.

A partir da observação da mesma, podemos fazer as seguintes afirmações:

$$tg(\alpha) = f'(x);$$

$$tg(\beta) = m;$$

$$\beta = \alpha + \gamma,$$

donde:

$$\gamma = \beta - \alpha. \quad (30)$$

Ainda, observando a Figura 6 é possível visualizar os dois triângulos abaixo:

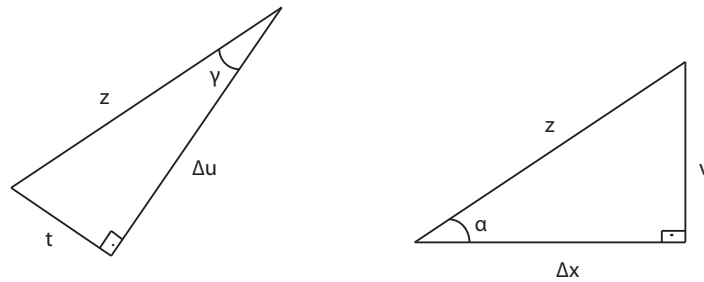


Figura 7: Triângulos observados

A partir daí, podemos extrair as seguintes relações:

i) Do triângulo à esquerda da Figura 7

$$tg\gamma = \frac{t}{\Delta u},$$

donde:

$$t = tg(\beta - \alpha)\Delta u. \quad (31)$$

ii) Do triângulo à direita da Figura 7

$$tg\alpha = \frac{v}{\Delta x},$$

e daí:

$$v = f'(x)\Delta x. \quad (32)$$

A partir do teorema de Pitágoras, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} z^2 = t^2 + \Delta u^2 \\ z^2 = v^2 + \Delta x^2. \end{cases} \quad (33)$$

Igualando as expressões em (33), substituindo em seguida

$$t = \operatorname{tg}(\beta - \alpha)\Delta u, \quad v = f'(x)\Delta x$$

e usando a relação trigonométrica

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}$$

obtemos a seguinte expressão:

$$\Delta u = \frac{|1 + mf'(x)|}{\sqrt{1 + m^2}} \Delta x, \quad (34)$$

uma vez que  $\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x)$  e  $\operatorname{tg}(\beta) = m$ .

### 5.2.2 Cálculo de $w(u(x))$

Nesta seção vamos calcular a distância entre  $f(x)$  e a reta  $y = mx + b$  denotada por  $w(u(x))$ . Para isso, analisemos primeiramente a Figura 8.

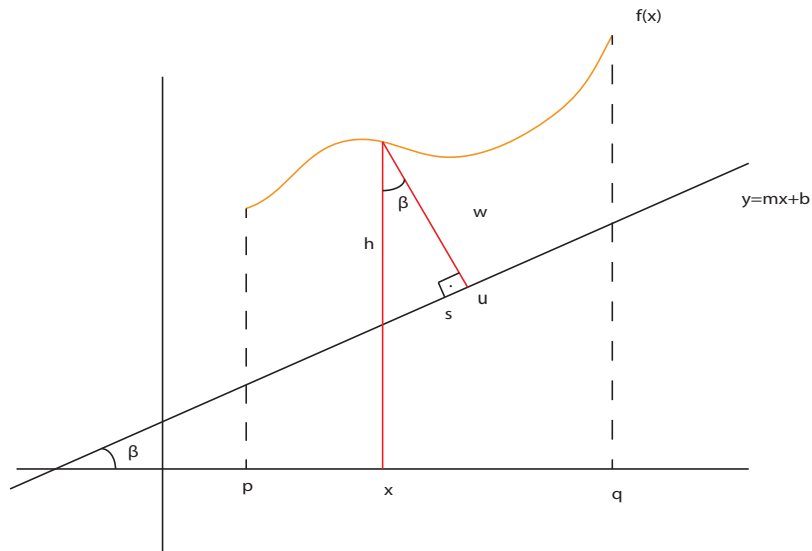


Figura 8: Projeção ortogonal de  $f(x)$  sobre a reta  $y = mx + b$

Dela podemos extrair que:

$$h = f(x) - (mx + b); \quad (35)$$

$$\operatorname{tg}\beta = m = \frac{s}{w} \Rightarrow s = mw. \quad (36)$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras para o triângulo da Figura 8, temos

$$h^2 = s^2 + w^2.$$

Substituindo (36) segue que

$$h^2 = m^2w^2 + w^2;$$

donde:

$$w = \frac{h}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

E substituindo (35)

$$w = \frac{f(x) - (mx + b)}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (37)$$

Ou seja  $w(u) = w(u(x))$  é dado por (37).

### 5.2.3 Cálculo da Área, Volume e Área da Superfície de Revolução

Visto que já calculamos  $w(u)$  e  $\Delta u$ , podemos encontrar a área, o volume e a área da superfície de revolução. Utilizando da soma de Riemann encontramos as seguintes expressões:

Para a área da região  $\mathcal{R}$ :

$$A = \frac{1}{m^2 + 1} \int_p^q (f(x) - mx - b)|1 + mf'(x)|dx. \quad (38)$$

Para o volume da sólido de rotação da região  $\mathcal{R}$  em torno da reta temos:

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{1 + m^2}^3} \int_p^q [f(x) - (mx + b)]^2 |1 + mf'(x)|dx. \quad (39)$$

E para a área lateral do sólido de rotação da região  $\mathcal{R}$  em torno da reta temos:

$$A_l = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + m^2}^3} \int_p^q [f(x) - (mx + b)] \sqrt{|1 + mf'(x)| + (f'(x) - m)^2} dx. \quad (40)$$



### 5.3 Conclusão

As fórmulas 38, 39 e 40 obtidas são válidas para curvas  $y = f(x)$ ,  $p \leq x \leq q$ , que também são gráficos da variável  $u$ ; isto é, qualquer reta perpendicular à reta  $y = mx + b$  intersecta à curva dada em no máximo um ponto. Se utilizarmos uma reta que coincida com o eixo das abscissas, ou seja,  $m = 0$  e  $b = 0$  obteremos as conhecidas expressões utilizadas para encontrar a área sob uma curva e sobre o eixo- $x$  ou o volume de rotação da mesma em torno do eixo- $x$ .

## 6 Xícaras de Café Complementares

Suponhamos que temos duas xícaras de café do tipo mostrado na Figura 9.

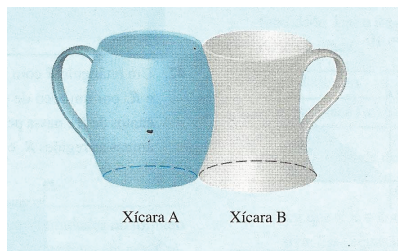


Figura 9: Xícaras

Observando que o lado de uma se encaixa perfeitamente no lado da outra, queremos determinar em qual das xícaras há o maior volume. Poderíamos simplesmente encher as xícaras com um determinado líquido e medir em qual coube o maior volume. Porém, caso não fossem volumes pequenos, a quantidade de líquido para este teste seria inviável. Então procuramos uma abordagem matemática para o problema.

### 6.1 O Problema

Se fizermos um corte transversal nas xícaras passando pelo eixo de rotação das mesmas temos uma seção parecida com a Figura 10.

Desejamos determinar o eixo de rotação  $x = k$ , conforme Figura 10, que faça a equivalência das xícaras em termos de volume.

### 6.2 Resolução

Observando a Figura 10 vemos que as áreas  $A_A$  e  $A_B$  representadas, se rotacionadas respectivamente em torno do eixo  $y$  e do eixo  $x = k$ , descreverão

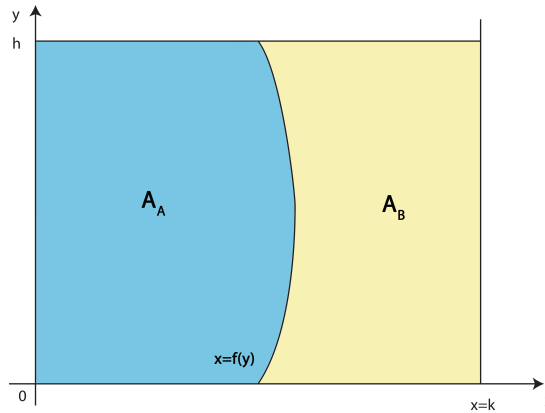


Figura 10: Seção transversal de metade de cada xícara

volumes de revolução expressados pelas seguintes equações:

$$V_A = \int_0^h \pi(f(y))^2 dy; \quad (41)$$

$$V_B = \int_0^h \pi(k - f(y))^2 dy. \quad (42)$$

Para calcularmos o valor de  $k$  que faça a equivalência dessas áreas basta igualarmos as expressões (41) e (42):

$$\int_0^h f(y)^2 dy = \int_0^h [k^2 - 2kf(y) + f(y)^2] dy.$$

Daí segue que:

$$k \int_0^h dy = 2 \int_0^h f(y) dy.$$

Portanto,

$$k = \frac{2 \int_0^h f(y) dy}{h}. \quad (43)$$

Sabemos também que a área da região  $A_A$  pode ser descrita por uma integral simples

$$A_A = \int_0^h f(y) dy. \quad (44)$$

Observando a Figura 10 temos que a somas das áreas 1 e 2 formam um retângulo de base  $k$  e altura  $h$ . Sendo assim utilizando (43) e (44) segue que

$$\begin{aligned}A_A + A_B &= kh \\ &= 2 \int_0^h f(y) dy \\ &= 2A_A,\end{aligned}$$

donde:

$$A_A = A_B. \tag{45}$$

### 6.3 Conclusão

Quando tivermos duas superfícies de revolução, no caso as xícaras A e B, a primeira formada pela rotação da curva  $x = f(y)$ ,  $0 \leq y \leq h$  em torno da reta  $x = 0$ , e a segunda pela rotação da mesma curva em torno da reta  $x = k$ , como indicado na figura 10, os volumes  $V_A$  e  $V_B$  serão iguais mediante uma escolha adequada de  $k$  dada pela equação (43). Muito interessante, porém, é constatar que para esta escolha de  $k$  as áreas das seções transversais das superfícies,  $A_A$  e  $A_B$ , também serão equivalentes.

## 7 Tudo que Sobe Eventualmente tem que Descer

O comportamento de corpos em movimento é um assunto amplamente estudado em disciplinas da engenharia e da física. Isto se deve ao fato de que uma boa análise do movimento de um objeto nos permite prever comportamentos que talvez não esperássemos. Neste trabalho, estudamos uma situação um tanto comum no dia a dia: o lançamento vertical de um corpo. E obtemos aqui um resultado que pode ser surpreendente.

Para realizar este trabalho, necessitamos de alguns conceitos e técnicas de Cálculo Integral e Diferencial, Equações Diferenciais Ordinárias e também de conteúdos da área de Dinâmica.

## 7.1 O Problema

Uma partícula de massa  $m$  é lançada verticalmente, para cima, a partir da superfície da terra com uma velocidade inicial  $v_0$  sujeita apenas à força gravitacional constante e à força de resistência do ar. Neste trabalho assumimos que a força de resistência do ar  $F(v)$  satisfaz a condição adicional  $F(v) > 0$  se  $v < 0$  e  $F(v) < 0$  se  $v > 0$ , sendo  $v = v(t)$  a velocidade vertical da partícula no instante  $t$ . Dessa forma, a força  $F(v)$  terá sempre sentido contrário ao da velocidade, sendo contra o movimento da partícula.

Sob estas condições, provaremos que a partícula leva menos tempo para alcançar sua altura máxima do que para cair de volta à Terra a partir de sua altura máxima.

## 7.2 Resolução

### 7.2.1 Caso Linear

Para resolver este problema geral, começamos com o ensaio do caso particular, dado em [4], em que se admite que a força de resistência do ar é dada por um modelo linear, ou seja, supõe-se que  $F(v)$  é proporcional à velocidade, digamos  $F(v) = -pv$ , onde  $p$  é uma constante positiva.

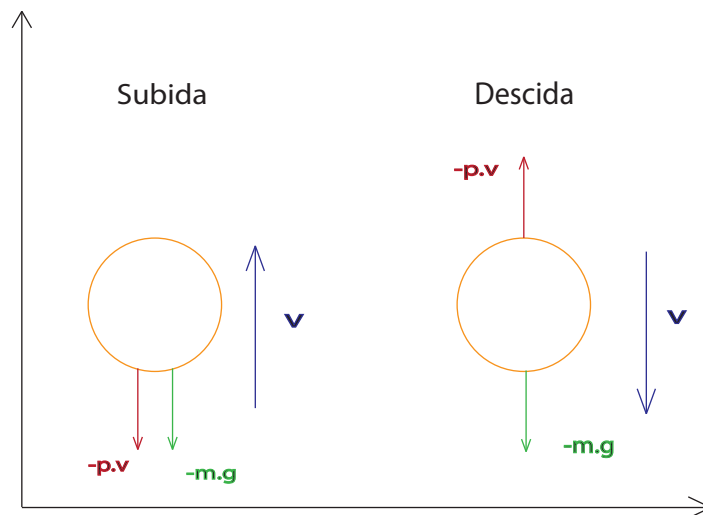


Figura 11: Diagrama de Corpo Livre - Caso Linear

Neste caso, pela segunda Lei de Newton, a equação do movimento é descrita pelo problema de valor inicial

$$mv' = -pv - mg, \quad v(0) = v_0. \quad (46)$$

em que  $v'$  é a derivada da velocidade vertical com o tempo, ou seja,  $v'$  é a aceleração vertical. Resolvendo essa EDO obtemos:

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-\frac{pt}{m}} - \frac{mg}{p}. \quad (47)$$

Como a velocidade  $v(t) = y'(t)$ , em que  $y(t)$  é a altura da partícula no instante  $t$ , então a altura da partícula, até ela atingir o solo, é obtida por integração da solução de (46), estabelecida em (47), com  $y(0) = 0$  e portanto é dada por:

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right) \frac{m}{p} \left(1 - e^{-\frac{pt}{m}}\right) - \frac{mgt}{p}. \quad (48)$$

Assim sendo, derivando a equação (48) e resolvendo a equação  $y'(t) = 0$  encontramos o tempo  $t_1$  que a bola leva para alcançar sua altura máxima:

$$t_1 = \frac{m}{p} \ln \left( \frac{mg + pv_0}{mg} \right). \quad (49)$$

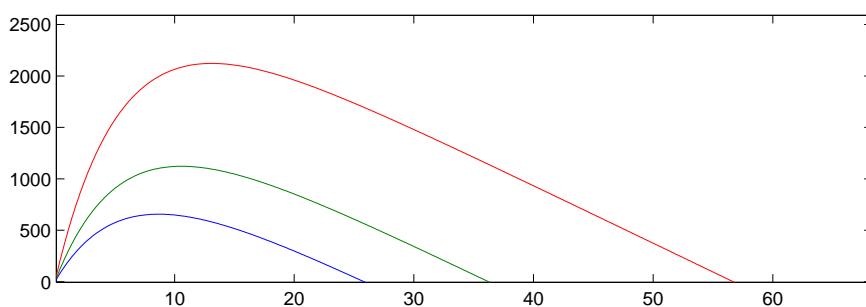


Figura 12: Gráficos de  $y(t)$ , com diferentes valores de  $m$ ,  $p$  e  $v_0$

É possível estimar o tempo  $t_2$  no qual a partícula volta para a Terra usando métodos aproximados e o gráfico da função altura. Porém, trabalharemos com um método indireto. Calcularemos a altura  $y(2t_1)$ . Pelo fato de termos partido da origem, o tempo de descida  $t_2$  será tal que  $y(t_2) = 0$ . Entretanto se a partícula inicia a sua descida em  $t = t_1$ , se  $y(2t_1) > 0$  isto significaria que após um tempo de descida equivalente ao de subida a partícula ainda terá uma certa altura em relação à origem (tempo de subida menor que o tempo de descida). O contrário,  $y(2t_1) < 0$ , implica que após um tempo de descida equivalente ao de subida, a partícula estaria abaixo do eixo  $x$ , caso não houvesse impedimento do solo, o que indica que o objeto atingiu a superfície em um intervalo de tempo inferior a  $2t_1$  (tempo de subida maior que o tempo de descida).

Das igualdades (48) e (49), denominando  $x^* = e^{\frac{pt_1}{m}}$ , obtemos que:

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2} \left( x^* - \frac{1}{x^*} - 2 \ln x^* \right). \quad (50)$$

Com  $m, t_1, p > 0$  observa-se que  $x^* > 1$ . Sendo  $f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$ , é possível ver que  $f(1) = 0$  e que  $f$  é crescente para  $x > 1$ . Portanto concluímos que:

$$y(2t_1) > 0. \quad (51)$$

### 7.2.2 Caso Geral

No caso geral, a diferença é que a força de resistência do ar é dada por uma função diferenciável  $F(v)$  qualquer satisfazendo a condição adicional  $F(v) > 0$  se  $v < 0$  e  $F(v) < 0$  se  $v > 0$  e não, necessariamente, por uma função linear  $F(v) = -pv$ .

O movimento da partícula, no trecho da subida, de acordo com [1], é regido pela equação,

$$mv' = -mg + F(v), \quad v(0) = v_0. \quad (52)$$

Resolvendo esta EDO por variáveis separáveis, obtém-se

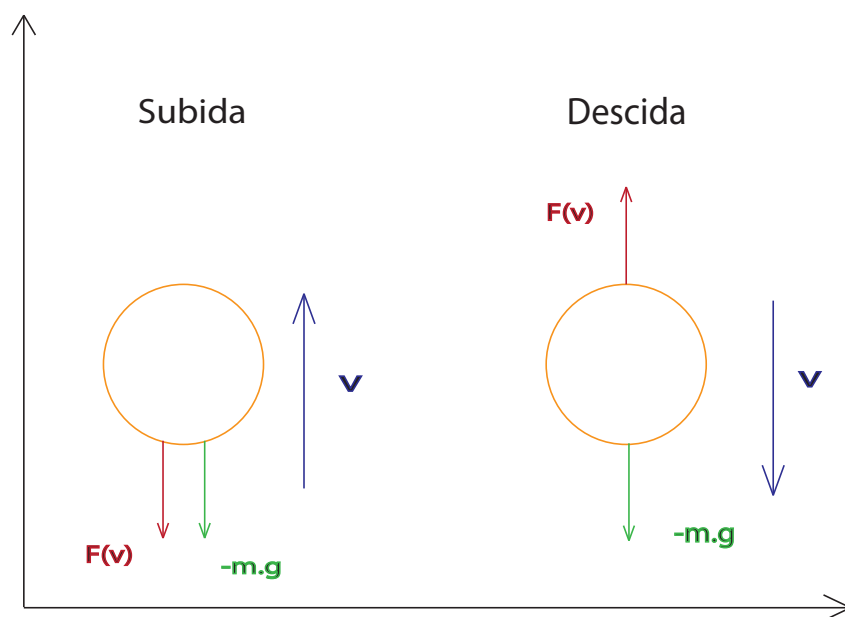


Figura 13: Diagrama de Corpo Livre - Caso Geral

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{mdv}{mg - F(v)} = -t. \quad (53)$$

E substituindo  $t = t_1$ , ou seja,  $v(t_1) = 0$ , segue que:

$$t_1 = \int_0^{v_0} \frac{mdv}{mg - F(v)}. \quad (54)$$

Adotando o mesmo procedimento para o trecho da descida, o movimento da partícula será descrito por

$$mv' = -mg + F(v), \quad v(t_1) = 0. \quad (55)$$

Resolvendo também por variáveis separáveis, obtém-se:

$$\int_0^{v(t)} \frac{mdv}{mg - F(v)} = -(t - t_1). \quad (56)$$

Se substituirmos  $t = 2t_1$

$$t_1 = \int_{v(2t_1)}^0 \frac{mdv}{mg - F(v)}. \quad (57)$$

Igualando as equações (54) e (57), observando que devido à hipótese  $F(v) > 0$  se  $v < 0$  e  $F(v) < 0$  se  $v > 0$  o integrando de (57) é maior que o integrando de (54), devemos compensar o último fato por meio dos intervalos de integração, donde obtemos que:

$$v_0 > -v(2t_1). \quad (58)$$

### 7.3 Conclusão

De (58) vemos que a velocidade vertical inicial da partícula é maior do que a sua velocidade vertical em um tempo equivalente ao dobro do tempo de sua subida. Podemos expandir este resultado para qualquer ponto inicial  $(\tau, v(\tau))$  na curva solução  $v(t)$  com  $0 \leq \tau \leq t_1$ .

Com isto o tempo de subida será  $t_s = t_1 - \tau$ . Considerando um tempo de descida equivalente ao tempo de subida, estaremos no instante  $t_d = t_1 + (t_1 - \tau)$ .

Assim, é válido de (58) que

$$v(\tau) > -v(2t_1 - \tau), \quad (59)$$

para todo  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t_1$ .

Se fizermos a integração de (59),



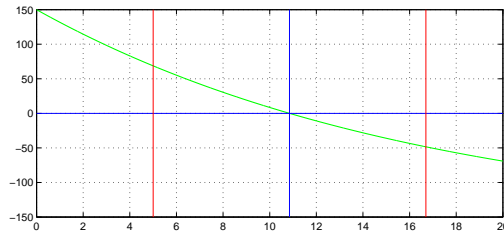


Figura 14: Gráfico de  $v(t)$

$$\int_0^{t_1} v(\tau) d\tau > - \int_0^{t_1} v(2t_1 - \tau) d\tau,$$

obtemos que

$$y(t_1) > y(t_1) - y(2t_1)$$

e portanto

$$y(2t_1) > 0. \tag{60}$$

De (60) concluímos que em um tempo equivalente ao dobro do tempo de subida, a posição vertical da partícula será maior do que zero, ou seja, ela ainda estará acima do solo.

Portanto nessas condições, é mais rápido subir do que descer.

## 8 Referências Bibliográficas

- [1] Brauer, F., What Goes Up Must Come Down, Eventually, *Amer. Math. Monthly* 108 (2001) 437-440.
- [2] Hibbeler, R.C, *Dinâmica: Mecânica para Engenharia*, Prentice Hall, São Paulo, 10ª ed., 2005.
- [3] Stewart J., *Cálculo*, Cengage Learning, São Paulo, vol. 1, 6ª ed., 2009.
- [4] Stewart J., *Cálculo*, Cengage Learning, São Paulo, vol. 2, 6ª ed., 2009.